第 29 卷 第 1 期 1997 年 1 月
力 学 学 报 ACTA MECHANICA SINICA
Vol 29, No. 1 Jan., 1997

杆、梁离散和连续系统的振动定性性质的统一论证

王其申 (安庆师范学院, 安徽安庆 246011)
王大钧 (北京大学, 北京 100871)

摘要 采用极限过渡法, 从杆、梁差分离散系统刚度矩阵的符号振荡性导出相应系统格林函数的振荡性, 从而统一论证了离散与连续系统的固有频率和模态的定性性质

关键词 杆、梁, 极限过渡, 定性性质

引 言

研究振动系统固有频率和振型的定性性质有其重要的理论意义和应用价值 对一般结构, 其定性性质的研究十分困难, 目前只对单跨杆、梁的研究比较成熟, 有许多重要而漂亮的结果[1~4,6], 但也存在一些重要的缺陷 不能将离散和连续系统作统一论证就是其中之一

考察以下特征值问题

$$Ly = \lambda\rho y \qquad (x \in I) \tag{1}$$

$$B_1 y\big|_{x=0} = 0, \qquad B_2 y\big|_{x=l} = 0 \tag{2}$$

这里L 是结构动力学中几类常见的二阶(杆)或四阶(梁)微分算子, B_1, B_2是相应的边界算子, 点集 $I = \{x \mid x \in [0, l] \cup y(x) \neq 0\}$

方程(1), (2)可以离散为如下特征值问题[1]

$$[A]\{u\} = \omega^2[M]\{u\} \tag{3}$$

这里$[A]$是刚度矩阵, $[M]$是质量矩阵 对静定或超静定的杆和梁, 文献[2~4]已证明$[A]$是符号振荡矩阵, 由此可得杆、梁离散系统有以下基本特性:

1) 系统的频率是分离的, 可按递增次序排列为: $(0<)\,\omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_N$;
2) 相应于 ω_i 的位移模态在 I 上恰有 $i-1$ 个变号数;
3) 称以点 (x_r, u_r) $(r = 0, \cdots, N+1)$ 为顶点的折线为振型线, 则两相邻序号的振型线的节点彼此相间

方程(1), (2)也可化为积分方程特征值问题

$$y(x) = \omega^2 \int G(x, s)\rho(s)y(s)\,\mathrm{d}s \qquad (x \in I) \tag{4}$$

借助振荡核理论[5], 可证静定、超静定的杆和梁的格林函数是振荡核, 从而杆、梁连续系统的频率模态有与离散系统完全类似的基本特性

1995-12-22收到第一稿, 1996-04-30收到修改稿

研读文献[4, 5]后发现, 为了阐明频率和模态的基本性质, 离散系统依据符号振荡矩阵的理论而连续系统则依据振荡核理论, 二者不协调 其次, 证明杆、梁连续系统格林函数属于振荡核的过程冗长繁杂, 而且杆和梁的推理过程差别很大 能否从离散模型直接过渡到连续模型?为此本文全面考察了两种模型之间的对应关系, 通过极限过渡, 成功地由离散模型的基本特性直接导出了连续模型的相应特性

1 从柔度矩阵到格林函数

极限过渡法首先必须解决数学模型之间的对应关系 即从离散系统的何种特性极限过渡到连续系统的相应特性

显然, 差分方程(3)通过极限过程可以逼近微分方程(1)[7]. 但由极限理论, 在此过程中上节的性质1), 3)不一定能保持

考察另一途径 从(3)式的改写形式

$$\{u\} = \omega^2[R][M]\{u\} \tag{5}$$

通过极限过程去逼近积分方程(4). 这里 $[R] = [A]^{-1} = \{r_{ij}\}_1^N$ 是离散系统的柔度矩阵

事实上, 方程(5)的分量形式是

$$u_i = \sum_{j=1}^{N} \omega^2 r_{ij} m_j u_j = \omega^2 \sum_{j=1}^{N} r_{ij}\rho_j u_j (l_{j-1} + l_j)/2 \qquad (i = 1, \cdots, N) \tag{6}$$

式中 $l_r = x_{r+1} - x_r = \nabla x_{r+1}(r = 0, \cdots, N)$ 是差分步长 当分点无限增多且 l_r 同时趋于零时, 文献[6]已证明对任意的 $x, s \in I$, 总存在这样的 i, j 使 $x_{i-1} \le x \le x_i, x_{j-1} \le s \le x_j (0 \le i, j \le N + 1)$ 并有 $r_{ij} \to G(x, s) \approx G(x_i, x_j)$. 又由连续性有 $\rho_j = \rho(x_j) \to \rho(s)$, $u_i = y(x_i) \to y(x)$, $u_j \to y(s)$. 这样, 代数方程(5)以积分方程(4)为极限

2 关于极限过渡的一个定理

在极限过渡法中, 为使系统频率和模态的基本特性得以保持, 如上所述, 单靠极限过程不行. 改而考虑这样的问题: 如果方程(5)中的柔度矩阵是振荡矩阵, 与之对应的格林函数 $G(x, s)$ 是否是振荡核?为此给出下述定理

定理 设有代数特征值问题

$$\{u\} = \lambda[R][M]\{u\} \tag{7}$$

其中 $\{u\}$ 是定义在 $[0, l]$ 上的分点 $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = l$ 上并去掉端点处可能的零分量后的列向量, 若当 $N \to \infty$ 且 $\max\limits_{1 \le r \le N+1} \Delta x_r \to 0$ 时 $[R]$ 的元素 r_{ij} 以函数 $G(x, s)$ 为极限, 则当 $[R]$ 为振荡矩阵时 $G(x, s)$ 为克劳格核

证明 根据克劳格核的定义[5], 我们只要证明, 对 $[0, l]$ 内任意确定的点集 $\{\zeta_r\}_1^n, \{s_r\}_1^n \in I$, 成立下列不等式

$$G\begin{pmatrix} \zeta_1, \cdots, \zeta_n \\ s_1, \cdots, s_n \end{pmatrix} = \det\{G(\zeta_i, s_j)\}_1^n \ge 0 \quad \begin{pmatrix} 0 \le \zeta_1 < \cdots < \zeta_n \le l \\ s_1 < \cdots < s_n \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$G\begin{pmatrix}\xi_1, \cdots, \xi_n \\ \xi_1, \cdots, \xi_n\end{pmatrix} > 0 \quad (0 \leq \xi_1 < \cdots < \xi_n \leq l) \tag{9}$$

为此, 把任意点集 $\{\xi_r\}_1^n \cup \{s_r\}_1^n$ 从小到大重新排列, 注意如果某个 $\xi_r = s_k$ 时二者合为一个分点 这样得新点集 $\{\eta_r\}_1^m (m \leq 2n)$. 以此为基础插入新分点组成满足定理条件的点集 $\{x_r\}_0^{N+1} (N > m)$. 与此对应的离散系统具有特征值方程(7), 相应的矩阵 $[R]$ 是振荡矩阵 因振荡矩阵是完全非负矩阵, 故其子式 $R\begin{pmatrix}i_1, \cdots, i_n \\ j_1, \cdots, j_n\end{pmatrix} \geq 0$. 这里 i_r, j_r 分别是 ξ_r, s_r 在点集 $\{x_r\}_0^{N+1}$ 中的序号数 又当 $N \to \infty$ 且 $\max\limits_{1 \leq r \leq N+1} \Delta x_r \to 0$ 时 $r_{ij} \to G(x, s)$, 取极限即得(8)式

为了证明(9)式, 我们借助结构动力学中应变能正定这一事实

设想在点 ξ_j 上各作用一个集中力 $F_j (j = 1, \cdots, n)$, 则由格林函数定义, 系统内 ξ_i 处的位移是 $u_i = \sum\limits_{j=1}^{n} r_{ij} F_j$, 系统内的应变能是

$$V = \sum_{i, j=1}^{n} r_{ij} F_i F_j \big/ 2 \tag{10}$$

只要系统静定或超静定, 都有 $V > 0$, 故(10)式右端为正定二次型, 亦即(9)式成立 定理证毕

需要指出, 上述定理只能证明相应的格林函数是克劳格核 从应用角度看, 这已够了, 因为在由核的振荡性进一步推导频率和模态的基本特性时只用到(8), (9)两式[4].

3　杆、梁连续系统核的振荡性

综上所述, 杆、梁差分离散系统的柔度系数 r_{ij} 以相应格林函数为极限, 柔度形式的离散系统运动方程组(5)趋于积分方程(4); 另一方面, 静定、超静定的杆、梁离散系统的刚度矩阵是符号振荡矩阵, 它的逆即柔度矩阵必为振荡矩阵[5]. 这样, 根据上节定理得出结论: 静定、超静定的杆、梁连续系统的格林函数是克劳格核 从核 $G(x, s)$ 的振荡性到对称核 $K(x, s) = G(x, s)\sqrt{\rho(x)\rho(s)}$ 的振荡性的证明是显然的

致谢　本文的工作得到胡海昌教授的启发和帮助, 笔者谨向胡海昌教授致谢

参 考 文 献

1 何北昌等. Euler 梁有限差分模型的振动逆问题. 振动工程学报, 1989, 2: 1～7
2 王其申等. 二阶连续系统的离散模型频率和振型的定性性质. 振动与冲击, 1992, 3: 7～12
3 王其申等. Euler 梁的模态和频谱的一些定性性质. 振动工程学报, 1990, 4: 58～66
4 Gladwell GML. Inverse Problems in Vibration. Martinus Nijhoff Publishers. 1986, 中译本: 振动中的反问题, 王大钧, 何北昌译. 北京: 北京大学出版社, 1991
5 Gantmakher FP, Krein MG. Oscillation Matrices and Kernels and Small Vibration of Mechanical Systems, State Publishing House of Technical- Theoretical Literature at Moscow. 1950. 1961 Translation, U. S. Atomic Energy Commision
6 王其申, 王大钧. 杆、梁离散系统的柔度系数和连续系统的格林函数. 力学与实践, 1996, 18(5)
7 南京大学数学系计算数学专业. 常微分方程数值解法. 北京: 科学出版社, 1979

UNITED PROOF FOR QUALITATIVE PROPERTIES OF DISCRETE AND CONTINUOUS SYSTEMS OF VIBRATING ROD AND BEAM

Wang Qishen
(Anqing Normal College, Anqing 246011, China)
Wang Dajun
(Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract Applying a method of limit transition, we have come to the oscillatory properties of Green's functions of continuous systems from the sign oscillatory properties of stiffness matrices of discrete systems for a vibrating rod or beam.

Key words rod, beam, method of limit transition, qualitative properties