

一种值得注意的动力学行为¹⁾

刘曾荣 黄欣

(中国科学院力学研究所 LNM, 北京 100080;
苏州大学数学科学学院, 苏州 215006)

摘要 在讨论一类以 pattern 动力学为背景的二维平面映射时, 发现了一种具有两个正 Lyapunov 特征指数的动力学行为. 分析表明这种行为可能来自于 snap back repeller. 进一步的理论工作有待于深入.

关键词 Lyapunov 指数, snap back repeller

引言

考虑如下典型的 CML 模型^[1]

$$x_{n+1}(i) = (1 - \epsilon)f(x_n(i)) + \frac{\epsilon}{2}[f(x_n(i-1)) + f(x_n(i+1))] \quad (1)$$

其中 $f(x) = 1 - ax^2$, n 代表离散时间, i 代表格点的指标 ($i = 1, 2, \dots, N$), ϵ 为耦合常数. 取周期边界条件.

我们用对耦的相空间映射讨论 (1) 的 pattern 形成. 当 N 为偶数时, 模型 (1) 在 R^N 空间中由特征向量 $(1, 1, \dots, 1)^T$ 和 $(1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1)^T$ 所张成的不变子空间内约化的低维对耦相空间映射为

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - a(x_n^2 + y_n^2) \\ y_{n+1} &= -2a(1 - 2\epsilon)x_n y_n \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

这个映射与 [1] 中数值发现的 Zigzag pattern 存在有密切关系.

如果 a 是使 Logistic 映射 $x_{n+1} = 1 - ax_n^2$ 处于混沌的参数值, 则 (2) 在 (x, y) 平面上存在反映混沌性质的不变集合, $(\{x_n\}, y = 0)_{n=0}$, 其中 $\{x_n\}_{n=0}$ 对应于 Logistic 映射中的混沌集. 因而与过去研究“有序”到“无序”的方法不同, 讨论 ϵ 对 (2) 的影响是研究由“无序”集存在给动力系统动力学行为带来的影响. 由此对 (2) 研究是有特殊意义的.

1 式 (2) 的一维约化

映射 (2) 存在一维不变集 $(\{x_n\}, y = 0)_{n=0}$, 为了讨论这不变集的稳定性的, 用通常线性分析方法, 得 (2) 的两个 Lyapunov 指数为

$$\left. \begin{aligned} LE_1 &= \lim_n \frac{1}{n} \ln |2^n a^n x_1 x_2 \dots x_n| \\ LE_2 &= \lim_n \frac{1}{n} \ln |2^n a^n (1 - 2\epsilon)^n x_1 x_2 \dots x_n| = LE_1 + \ln |1 - 2\epsilon| \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

1) 国家自然科学基金资助项目.

1995-07-01 收到第一稿, 1996-05-07 收到修改稿.

对不变集 $(\{x_n\}, y = 0)_{n=0, \dots, \infty}$, LE_1 和 LE_2 恰好代表 x 方向和 y 方向的 Lyapunov 特征指数. 如果 a 是 Logistic 映射具有混沌性态的参数值, 则 $\{x_n\}_{n=0, \dots, \infty}$ 为混沌集, 故 $LE_1 > 0$. 固定 a , 可选取适当的 ϵ , 使得 $LE_2 < 0$. 此时不变集 $(\{x_n\}, y = 0)_{n=0, \dots, \infty}$ 的小扰动在 y 方向将收敛于 $y = 0$. 因而 (2) 在满足条件 $LE_2 < 0$ 时将退化为一维混沌运动. 数值计算结果也证实了这一点.

2 式(2)的奇怪的混沌动力学行为

设(2)中 ϵ_0 满足 $LE_2 = LE_1 + \ln |1 - 2\epsilon_0| = 0$, 则当 $\epsilon < \epsilon_0$ 时, 对(2)的一维约化条件不满足, (2)的动力学行为本质上是二维的.

我们取 $a = 1.95$, 设 $\epsilon \in [0, 0.22]$, 对不同的 ϵ 计算(2)的两个 Lyapunov 指数(注意由于(2)没有退化为一维, 故它不代表 x 方向和 y 方向). 得到结果见图1.

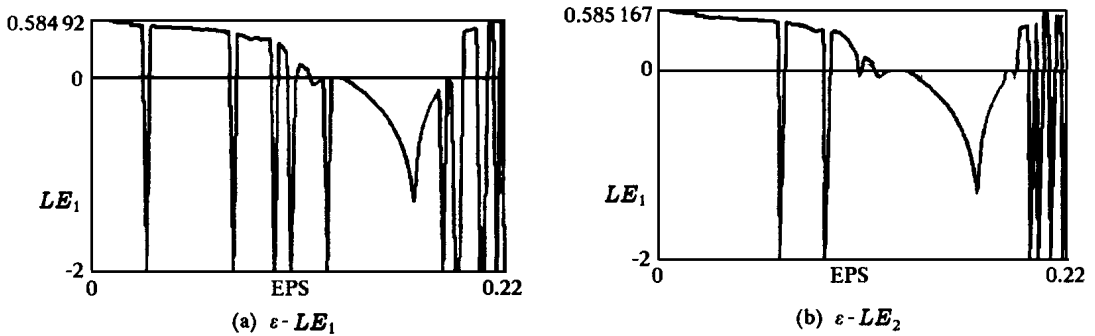


图1 模型(2)的 ϵ -Lyapunov 指数图. 取 $a = 1.95$, $\epsilon = \frac{0.22i}{100}$ ($i = 0, 1, \dots, 100$),

去瞬态20000次后, 对10000次计算Lyapunov 指数

Fig. 1 The plots of ϵ -Lyapunov exponents for model (2). Fix $a = 1.95$, and take

$$\epsilon = \frac{0.22i}{100} \quad (i = 0, 1, \dots, 100). \text{ Lyapunov exponents are calculated for } 10,000$$

time steps after 20,000 iteration of transients

图中低谷处代表 Lyapunov 指数趋于 - 情况, 从图中可发现下列几种典型情况:

- 两个 Lyapunov 特征指数都大于零;
- 一个 Lyapunov 特征指数大于零, 另一个小于零;
- 两个 Lyapunov 特征指数均为负

从相图中看, 反映一些规则轨道, 反映已经比较熟悉的奇怪吸引子^[3]. 而 的情况更值得注意. 为此我们仔细研究了这种情况. 对不同的 ϵ 进行探索, 在每一次数值试验都取足够长时间(30 000次迭代)作为瞬态, 多次重复试验发现有三种典型的情况, 它们分别由 $\epsilon = 0.01$, $\epsilon = 0.11$ 和 $\epsilon = 0.2$ 得到, 结果见图2(图2是去掉瞬态后打印1 000次迭代所得点对 (x, y) 而得).

从这些图中看出一个特点是, 点 (x, y) 在一个有界区域内弥散开来, 这与通常收敛到低维不变流形的奇怪吸引子是不同的.

对模型(2), 取 $a = 1.95$ 对上述三种不同的 ϵ 值进行维数 D_0, D_1 和 Lyapunov 指数 LE_1, LE_2 计算得到表1. 从维数和 Lyapunov 指数计算结果可以认为这是一种奇怪的混沌动力学行为.

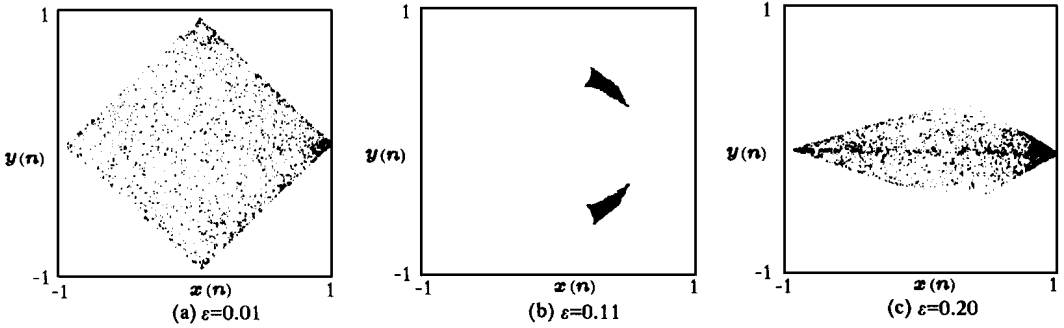


图2 模型(2)的点图 取 $a = 1.95$, 迭代30 000次后, 打印1 000次的结果

Fig 2 The plots of (x_n, y_n) for model (2). The plots are overlaid for 1 000 time steps after 30 000 iteration of transients Fix $a = 1.95$

表1

Table 1

ϵ	D_0	D_1	LE_1	LE_2
0.01	1.797 349	1.735 922	0.575 020	0.573 368
0.11	1.162 061	1.107 673	0.124 517	0.126 183
0.20	1.645 521	1.525 373	0.479 264	0.480 865

3 吸引性与混沌性质分析

对于CML模型(2), 若 $|x_0 + y_0| \leq 1, |x_0 - y_0| \leq 1$, 则对一切 $n \geq N$, 有 $|x_n + y_n| \leq 1, |x_n - y_n| \leq 1$. 即在 (x, y) 平面上存在一个以 $(0, 0)$ 为中心的菱形区域, 使式(2)在该菱形区的点不会跑出该区域. 进一步考虑该菱形周围点能否都进入该区, 为此, 按照式(2)的特征值进行分析和计算可知菱形区域边界上都存在不稳定的点, 因而不能确保菱形区域邻近点出发的轨道都进入该菱形区. 这样, 表面上看起来菱形是一个捕俘区, 但经线性化分析, 在其边界附近都存在要离开这个区域的点. 这种情况与一维Logistic映射类同. 促使这些点不离开该区域的原因也许是在这些点所表现的强烈的非线性作用. 因而是否能称为吸引子还需作进一步研究.

这类具有两个正Lyapunov特征指数的混沌的动力学行为在文献[3]中已经对两个耦合的tent映射进行了研究. 利用这种映射的双曲性可以证明这种弥散集有唯一的混合不变测度. 但对于实践中常见的非双曲情况, 由于理论上的困难没有进行讨论, 更没有把这种行为与高维系统中patterns动力学联系起来. 为了从理论上对这类两个正Lyapunov特征指数行为作出分析, 我们引进Marotto意义下的混沌Marotto^[4]给出了如下定义:

定义 设 $f: R^n \rightarrow R^n$ 是一个可微映射. 对某个 $r > 0, x \in R^n$ 是 f 在开球 $B_r(x)$ 中的扩张不动点, 即对于任意 $y \in B_r(x), Df(y)$ 扩张, 若存在 $x \in B_r(x), x_0 \in x$ 以及 $M > 0$, 使得 $f^M(x_0) = x$ 和 $|Df^M(x_0)| > 0$, 则称 x 为 f 的一个 snap back repeller.

记 $\|\cdot\|$ 为 R^n 中范数, 可以证明

定理 如果 f 有一个 snap back repeller, 则

- 1) 存在一个正整数 K , 使得对每一个整数 $M > K, f$ 有周期为 M 的轨道
- 2) f 有一个 so ram bled 集 S, S 为 f 的非周期的不可数集, 满足
 - (a) $f^{n_0}(S) \subset S, \text{对某一 } n_0 > 0.$

- (b) $\forall x, y \in S, x \neq y$ 有 $\limsup_k \|f^k(x) - f^k(y)\| > 0$,
- (c) $\forall x \in S, \forall p \in per(f)$ 有 $\limsup_k \|f^k(x) - f^k(p)\| > 0$,
- (d) 存在 S 的一个不可数子集 $S_0, S_0 \neq \emptyset, \forall x, y \in S_0$ $\liminf_k \|f^k(x) - f^k(y)\| = 0$.

Marotto 称上述 S 集存在时, f 有混沌性质. 所以按 Marotto 观点, 如果 f 有一个 snap back repeller, 则 $x_{n+1} = f(x_n)$ 为混沌. 继[4]后, Marotto 在[5, 6]中通过对一维 Logistic 映射的讨论, 证明了二维 Henon 映射在 b 参数很小的情况下应该有 Marotto 意义下的混沌. 我们在这儿用 snap back repeller 观点直接对二维映射(2)进行分析.

式(2)有如下不动点(设: $x = (-1 + \sqrt{1 + 4a})/2a$)

$$\begin{aligned}
 A: & \left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 4a}}{2a}, 0 \right), & B: & \left(\frac{-1 - \sqrt{1 + 4a}}{2a}, 0 \right) \\
 C: & \left(x, \sqrt{\frac{1 - ax^2 - x}{a}} \right), & D: & \left(x, -\sqrt{\frac{1 - ax^2 - x}{a}} \right)
 \end{aligned}$$

在 $\epsilon = 0.01$ 和 $\epsilon = 0.2$ 时, B, C, D 位于菱形区外, 而 A 位于菱形区中, 事实上 A 是嵌入于(2)的混沌不变集 $(\{x_n\}, y = 0)_{n=0}^{\infty}$ 中的不稳定不动点. 即 A 的第一分量 $x = (-1 + \sqrt{1 + 4a})/2a$ 是 Logistic 映射 $x_{n+1} = 1 - ax_n^2$ 的不稳定不动点. Marotto 已经证明^[5, 6], 如果 $x = (-1 + \sqrt{1 + 4a})/2a$ 是嵌入在 Logistic 映射 $x_{n+1} = 1 - ax_n^2$ 混沌集中的不稳定不动点, 则该点就是 Logistic 映射的一个 snap back repeller. 现在 A 是二维映射(2)的不稳定不动点, 而 $(\{x_n\}, y = 0)_{n=0}^{\infty}$ 又是(2)的一个不变集, 其中 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为一维 Logistic 映射的混沌集. 这样由 snap back repeller 的定义, 可把 Marotto 在[5]中的证明移植过来证明 A 是(2)的一个 snap back repeller. 两者不同之处在于, 对一维 Logistic 映射, snap back repeller 所形成的混沌集仅限于一维. 对二维映射(2), 两个正 Lyapunov 指数使得这个 snap back repeller 所生成的混沌集在二维方向上弥散开来.

当 $\epsilon = 0.11$, 图2(b)表明奇怪集合点的轨迹分成二块. 经验证此时 A 离这两块很远. 就如我们在[7]中对奇怪吸引子分片分析那样, 此时 snap back repeller 应该来自不稳定周期2点. 经过计算发现此时有两组周期2点, 一组为(0.61114, -0.22057)和(0.17862, 0.41006), 另一组为(0.61114, 0.22057)和(0.17862, -0.41006), 这两组周期2点对应的 Jacobi 阵的本征值为 $\lambda = 2.69476 > 1, \lambda = -2.197443 < -1$, 它们都是不稳定的. 由映射对参数连续依赖性, 在这些点周围有不稳定域, 用数值方法可以确定它们为 snap back repeller. 从而从数值上说明这种情况也有 Marotto 意义下的混沌, 也说明了为何能分成两块. 当然这种情况下还不能从理论上严格证明不稳定周期2点为 snap back repeller.

可是我们讨论的这种弥散型混沌与通常谈到的收缩到低维不变流形的奇怪吸引子上混沌不同, 即它们不是通常说的 Smale 马蹄变换意义下的混沌集合, 而是在 Marotto 意义下的混沌集合. 这是一种在讨论 pattern 形成中值得重视的一种新的动力学现象.

参 考 文 献

- 1 Kaneko K. *Physica*, 1989, D34: 1~ 41
- 2 刘曾荣等. 中国科学, 1993, 23(7): 702~ 708
- 3 Keller G, Kunzle M, Now icki T. *Physica*, 1992, D59: 39~ 51
- 4 Marotto FP. *J. Math. Anal. and Appl.*, 1978, 63: 199~ 223
- 5 Marotto FP. *J. Math. Anal. and Appl.*, 1979, 72: 716~ 729
- 6 Marotto FP. *Commun. Math. Phys.*, 1979, 68: 187~ 194
- 7 刘曾荣, 赵鸿. 力学学报, 1994, 26(5): 536~ 540

A KIND OF DYNAMICS WITH SNAP BACK REPELLER

Liu Zengrong Huang Xin

(LNM, Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing 100080, China;
Department of Mathematics, Suzhou University, Suzhou 215006, China)

Abstract By investigating a class of two dimensional mappings reflecting pattern dynamics, we found a kind of complex dynamics with two positive Lyapunov exponents. Numerical and analytical discussion show this kind of dynamics may be caused by snap back repeller. More theoretical analysis will be expected in future work.

Key words Lyapunov exponents, snap back repeller