促进其线性频散特征另一种形式的 Boussinesq 方程

张永刚　　李玉成
(大连理工大学土木工程系, 大连 116023)

摘要　Boussinesq 方程能够用于模拟表面重力波传播过程中的折射、绕射、反射以及浅化,非线性作用等现象. 用不同垂直积分方法所得到的二维 Boussinesq 方程形式具有不同的线性频散特征. 采用两个不同的水深层的水平速度变量组合, 推导出一个新形式的 Boussinesq 方程. 通过对其参数的设置可得到精确的线性频散解 Pade 近似 4 阶精度. 其适用范围已由原来的浅水, 向深水拓进. 相速误差小于 2 %, 其拓展适用范围可达到 0.8 个波长水深. 应用所得到的新型 Boussinesq 方程, 采用有限差分法, 对经典工况进行了数值模拟, 其计算结果表明, 计算值与物模实验值吻合较好. 这说明本文新形式的 Boussinesq 方程对变水深非线性效应所产生的能量频散有着较为精确的描述.

关键词　Boussinesq 方程, Airy 波, Pade 近似, 非线性作用, 不规则波, 数值模拟

引　言

当表面重力波从深水传至浅水时, 由于折射、绕射和反射以及浅化等作用, 波动场将被转换. 关于 Boussinesq 方程变水深问题应用早已被 Peregrine (1967)[1]所推导, 能够描述不规则波和方向谱在浅水区的变形. 其形式表现为质量守恒的连续性方程, 动量方程为不可压的无粘性流体的欧拉方程, 沿水深积分, 使三维波浪传播问题转化成二维问题.

Boussinesq 方程包含了线性频散特征和非线性低阶效应. 它能够讨论能量在频率间的转换和每个单波形的变化, 以及波包在浅水区变形等[2]. 其主要缺点是只能适用于相对浅的水深区域, 位相速度误差小于 5 %, 其适用水深仅为波长的 1/15[3].

近些年来, 一些工作已经扩展了 Boussinesq 方程在深水中的应用范围, 靠促进其方程频散特征. Witting (1984)[4]使用了在等水深条件下一种精确的水平速度变量近似展开, 沿水深积分得到连续性方程和动量方程, 来表示水平二维波面传播运动. 所采用方法是用展开系数来决定最好的线性频散关系. 其展开的系数可求到精确线性频散解的 Pade 近似 4 阶精度. 因此不论深水区还是浅水区 Witting 都获得了相对精确的结果. 然而在有变水深的条件下, Witting 方程则无法适应.

Madsen, et al. (1991)[5], 仿 Witting 做法, 扩展了 Boussinesq 方程的应用范围. 采用变量线性组合构成的量级小项加入沿水深平均的水平速度变量所得到的 Boussinesq 的动量方程, 来拓展变水深条件下的应用范围. 基于精确 Pade 近似特征, Nwogu (1993)[6]采用某一特定层的水平速度变量, 推导出可随水深层选取来调整其频散特征的 Boussinesq 方程.

1995-11-02 收到第一稿, 1996-08-25 收到修改稿.

本文采用不同的两个水深层的水平速度变量组合推导出一个新形式的 Boussinesq 方程，通过对其两层水深参数的设置可以使其频散特征达到精确 Airy 波频散解 Pade 展开 4 阶精度．从相速和群速与精确解之比随水深变化可以看出，本文所推导的 Boussinesq 方程其适用范围已由过去的浅水向深水拓进．在保证相速和群速误差小于 2 %，其水深应用范围可达到 0.8 个波长水深，这为 Boussinesq 方程模拟中等水深波浪的演变和不规则波宽谱结构提供了可能．从结果上看，本文所得到的 Boussinesq 方程远好于曾获得 ICCE94 大会金奖的 Nwogu 形式．数值结果也证明，本文的 Boussinesq 方程对非线性作用产生的能量转化有着较好的模拟效果．

1　方程推导

考虑一个三维波动场，其自由波面由 $\eta(x_i,\ t)$ 表示．在时刻 t，波浪传播越过一个变水深 $h(x_i)$ 的下垫面．采用笛卡尔坐标系即 $(x_i',\ z')$，z 方向为静水面向上为正．流体被认为是无粘性和不可压缩的．采用两个重要的特征尺度因子，其一是特征水深 h_0 为垂直方向上的尺度因子，其二是特征波长 l_0 为水平方向上的尺度因子．无量纲变量定义为

$$t = \frac{\sqrt{gh_0}}{l_0}t',\ x_i = \frac{x_i'}{l_0},\qquad z = \frac{z_0'}{h_0},\qquad h = \frac{h'}{h_0},\qquad i = 1,2 \tag{1.1}$$

$$\eta = \frac{\eta'}{a_0},\ u_i = \frac{h_0}{a_0\sqrt{gh0}}u_i',\ w = \frac{h_0^2}{a_0\sqrt{gh_0}}w',\ p = \frac{p'}{\rho g a_0},\qquad i = 1,2 \tag{1.2}$$

其中 g 为重力加速度，$(u_i,\ w)$ 为水质点速度矢量，p 是压力，ρ 为流体密度．

流体控制方程可由连续性方程和欧拉方程所组成．连续性方程在无量纲不可压条件下可写成

$$\mu^2\frac{\partial ui}{\partial xi} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{1.3}$$

水平动量方程和垂直动量方程无量纲形式

$$\mu^2\frac{\partial uj}{\partial t} + \varepsilon\mu^2\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_i} + \varepsilon\frac{\partial ujw}{\partial z} + u^2\frac{\partial p}{\partial x_j},\qquad j = 1,2 \tag{1.4}$$

$$\varepsilon\frac{\partial w}{\partial t} + \varepsilon^2\frac{\partial u_j w}{\partial x_i} + \frac{\varepsilon^2}{\mu^2}\frac{\partial w^2}{\partial z} + \varepsilon\frac{\partial p}{\partial z} + 1 = 0,\qquad i = 1,2 \tag{1.5}$$

其中小参数 $\varepsilon = a_0/h_0$，$\mu = h_0/l_0$ 是分别测量非线性强度和线性频散强度的小参量．

在自由表面运动边界条件可写成

$$\mu^2\frac{\partial\eta}{\partial t} + \varepsilon\mu^2 ui\frac{\partial\eta}{\partial x_i} - w = 0,\qquad z = \varepsilon\eta \tag{1.6}$$

动力边界条件可由穿过自由表面压力连续性获得

$$p = 0,\qquad z = \varepsilon\eta \tag{1.7}$$

沿底部边界条件，$z = -h$ 为无通量边界条件

$$\mu^2 u_i = \frac{\partial h}{\partial x_i} + w = 0,\qquad z = -h \tag{1.8}$$

由于流体为无旋，则无旋条件可写成

$$\frac{\partial u_i}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \tag{1.9}$$

由无旋条件及边界条件对任意水深水平速度分量可表示成（其中 $u_j b = h_j\ (-h,\ t)$）

$$u_i - u_i b = \int_{h} \frac{\partial}{\partial x_i} w\, dz \tag{1.10}$$

即

$$u_i = u_{ib} + \mu^2 \left(\frac{h^2}{2} - \frac{z^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} u_{kb} \right) + \mu^2 (h + z) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} (h u_{kb}) \right] + O(\mu^4) \tag{1.11}$$

现选择某一 α 水深层的水平速度分量 $u_{j\alpha}$ 来代替底部水平速度分量，则得

$$u_i = u_{i\alpha} + \mu^2 \left(\frac{z_\alpha^2}{2} - \frac{z^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} u_{k\alpha} \right) + \mu^2 (z_\alpha - z) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} (h u_{k\alpha}) \right] + O(\mu^4) \tag{1.12}$$

积分连续性方程（1.3）式和水平动量方程（1.4）式，定积分从流体底部积分到自由表面并应用相应边界条件和无旋条件，得到 Nwogu 形式的 Boussinesq 方程

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [(h + \varepsilon\eta) u_{i\alpha}] + \mu^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left(\frac{z_\alpha^2}{2} - \frac{h^2}{6} \right) h \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} u_{k\alpha} \right) \right\} = O(\varepsilon^2, \varepsilon\mu^2, \mu^4) \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial u_{i\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \eta + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_i} (u_{j\alpha} u_{i\alpha}) + \mu^2 \left\{ \frac{z_\alpha^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_{j\alpha}}{\partial t} \right) + \right\} = O(\varepsilon^2, \varepsilon\mu^2, \mu^4) \tag{1.14}$$

一种新形式 Boussinesq 方程的推导

由 Nwogu 方程（1.13）式可知，当水深为 α，β 层时其 $u_{i\alpha}$ 和 $u_{i\beta}$ 所表示的垂直积分后的连续性方程为（1.13）式和（1.15）式，即

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [(h + \varepsilon\eta) u_{i\beta}] + \mu^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left(\frac{z_\beta^2}{2} - \frac{h^2}{6} \right) h \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} u_{k\beta} \right) + \right\} = O(\varepsilon^2, \varepsilon\mu^2, \mu^4) \tag{1.15}$$

8

（1.13）～（1.15）式得

$$\frac{\partial}{\partial x_i} [(h + \varepsilon\eta)(u_{i\alpha} - u_{i\beta})] + \mu^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{z_\alpha^2}{2} h \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} u_{k\alpha} \right) - \frac{z_\beta^2}{2} h \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} u_{k\beta} \right) + \right.$$
$$\left. + \mu^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ -\frac{h^3}{6} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} (u_{k\alpha} - u_{k\beta}) \right] + \right. \right. = O(\varepsilon^2, \varepsilon\mu^2, \mu_4) \tag{1.16}$$

又由（1.11）式可知

$$u_{i\alpha} - u_{i\beta} = O(\mu^2) \tag{1.17}$$

把（1.17）式代入（1.16）式，通过量级分析我们可以发现，（1.16）式中第一项和第二项分别为 μ^2 阶项，其两个大项平衡抵消，第三项为 μ^4 阶项，对（1.16）式而言第三项可略．把略去的第三项写成

$$\mu^2 \frac{\partial}{\partial X_i}\left\{-\frac{h^3}{6}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial}{\partial x_k}(u_{k\alpha}-u_{k\beta})\right]+\frac{h^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial}{\partial x_k}(hu_{k\alpha}-hu_{k\beta})\right]\right\} = O(\mu^4) \qquad (1.18)$$

把（1.13）式，（1.15）式和 3b ×（1.18）式相加，同时写出相应动量方程即

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}[(h+\varepsilon\eta)(u_{i\alpha}+u_{i\beta})]+\mu^2\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\left(\frac{z_\alpha^2}{2}-\frac{h^2}{6}h\frac{\partial}{\partial x_j}u_{k\alpha}\right)+\right.$$

界条　　边

$$+\mu^2\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{z_\beta^2}{2}-\frac{h^2}{6}h\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}u_{k\beta}\right)+\right.$$

$$\left.\left(z_\beta+\frac{h}{2}\right)h\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial}{\partial x_k}(hu_{k\beta})\right]\right\} \quad 2$$

$$\left.\left(\frac{h^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial}{\partial x_k}(hu_{k\alpha}-hu_{k\beta})\right]\right\}\right.$$

6h 和 z_β = - 0.04h 时，新形式 Boussinesq 方程其频散特征可达到 Airy 波精确频散解的 Pade 展开 4 阶精度. 当 b = 0.323 08 时其频散特征可调为大于 Pade 展开 4 阶精度. 由此可见该方程频散阶数远大于 Nwogu 形式的 Boussinesq 方程的 2 阶频散解. 本文 Boussinesq 方程待定参数选择不同值时对应的相应历史发展形式，表 1 给出.

表 1

Table 1

Parameters	Boussinesq form	Dispersion
$b = 0$, $\alpha = \beta = -\frac{1}{3}$	*getting Peregrine* (1967)[1], Yoon (1989)[7], Abbott (1984)[8] Boussinesq equation dispersion precision	Pade first order
$b = 0$, $\alpha = \beta = -\frac{2}{5}$	getting Madsen (1991)[5] equationdispersion precision	second order
$b = 0$, $\alpha = \beta = -0.390$	Nwogu (1993)[6] form of Boussinesqequation	> second order
$b = 0.323$、08 $\begin{cases} \alpha = -0.405\ 22 \\ \beta = -0.039\ 22 \end{cases}$	緉	

为了控制这种现象，本文在空间上应用 Anthes (1978)[10]采用的 Shuman 加权微分格式，在时间层上采用 ADI 交错方向隐式迭代求解．初始条件为小振幅线性余弦波为入射波，出口及侧向边界采用线性 Sommerfeld 辐射条件和海绵 (Sponge Layer) 边界条件．

3.2 数值结果的讨论

仿 Liu (1985)[9]采用 Whalin 透镜焦距地形进行数值模拟讨论．其地形结构如图 3 所示，其水深定义为

$$h(x,y)=\begin{cases}0.4572 & (0\le x<10.67-G(y))\\ 0.4572+\frac{1}{25}(10.67-G-x) & (10.67-G\le x\le 18.29-G)\\ 0.1524 \quad \text{褊} \quad \text{is} & (18.29-G\le x\le 21.34)\end{cases}$$

一个新形式的 Boussinesq 方程. 其线性频散性可达到精确 Airy 波 Pade 展开 4 阶精度. 其适用范围由原来的浅水, 向深水拓进. 新形式 Boussinesq 方程与以往 Nwogu 形式的不同, 在于其对垂直积分过程中进行分层, 增加速度变量来改善方程的频散性. 其基本作法为合而再分思想. 把由垂直积分造成的不足, 再进行分层来弥补, 这样一方面保留了二维形式的计算便利和精确的优越性, 另一方面又改善了由二维化处理带来的缺陷. 使其应用范围得以拓展. 数值结果表明本文的 Boussinesq 方程有着较好的数值模拟效果. 这对非线性问题的讨论提供了有效的手段.

参 考 文 献

1 Peregrine DH. Long waves on a beach. *J. Fluid Mech.*, 1967, 27: 815～827

2 Freilich NH, Guza RT. Nonlinear effects on shoaling surface gravity waves, *Phil Trans.*, *Royal Society of London*, 1984, A311: 1～41

3 McCowan AD. The range of application of Boussinesq type numerical short wave models, In: Proc. 22nd Congress, International Association for Hydraulic Research, Lausame, Switzerland, 1987. 379～384

4 Witting JM. A unified model for the evolution of nonlinear water waves. *J. Computational Physics*, 1984, 56: 203～236

5 Madsen PA, Murray R, Sorensen OR. A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. *Coast. Engrg.*, 1991, 15: 371～388

6 Nwogu O. An alternative form of the Boussinesq equations for nearshore wave propagation. *J. waterway, port, Coastal and Ocean Engineering*, 1993, 119: 618～638

7 Yoon SB, Liu PL. - F. Interactions of currents and weakly nonlinear water waves in shallow water. *J. Fluid Mech.*, 1989, 205: 397～419

8 Abbott MB, McCowan AD, Warren IR. Accuracy of short wave numerical model. *J. Hydraul Eng.*, 1984, 110 (10): 1287～1301

9 Liu PL. - F, Yoon SB. Nonlinar refraction - diffraction of waves in shallow water. *J. Fluid Mech.*, 1985, 153: 185～201

10 Anthes RA, Thomas T, Warner. Development of hydrodynamic models suitable for air pollution and other mesometeorological studies. *Monthly weather Review*, 1978, 106 (8): 1045～1077

ALTERNATIVE FORM OF THE BOUSSINESQ EQUATIONS WITH IMPROVED LINEAR DISPERSION CHARACTERISTICS

Zhang Yonggang Li Yucheng
(*Department of Civil Engineering, Dalian University of Technology, Dalian* 116023, *China*)

Abstract Boussinesq-type equations, can be used to simulate the nonlinear transformation of surface waves due to the effects of shoaling, refraction, diffraction, reflection and nonlinear action so on. Different linear dispersion charateristics can be obtained by different vertically integrated methods. A new form of the Boussinesq equations is derived by using two different layers the horizontal velocity variable. The 4th order of Pade approximation, that is exact linear dispersion relation of Airy waves, is obtain by the coefficients value defined. The new form Boussinesq equation applying water depths range has been improved to $h/l = 0.8$ with phase velocities and group velocities errors of less than 2 %. A finite difference method is used to solve the equations. The results demonstrate that the new form of the Boussinesq equations can reasonably simulate several nonlinear effects.

Key words Boussinesq equation, Airy wave, Pade approximation, nonlinear action, random waves, simulation