

# 用格子 Boltzmann 方程模拟浅水波问题<sup>1)</sup>

施卫平 胡守信 阎广武

(吉林大学数学系力学教研室, 长春 130023)

**摘要** 提出了用格子 Boltzmann 方程 (LBE) 模拟浅水波问题的方法. 通过无粘气体运动方程与浅水波方程的比较, 确定了 LBE 方法中平衡态的形式, 使宏观方程与浅水波方程一致. 计算了二维浅水波的一个问题, 数值结果与精确解做了比较.

**关键词** 格子 Boltzmann 方程, 浅水波

## 引 言

1986 年, U. Frish, B. Hasslacher 和 U. Pomeau<sup>[1]</sup>提出了一种六角形的 FHP 格子气自动机 (简称 LGA) 模型. 早期的计算表明, 无论是运算速度, 还是计算精度都有很大的提高. LGA 模型用布尔量表示粒子的分布函数, 每一节点最多允许 7 个粒子存在, 并且满足泡利不相容原理. 粒子在节点处发生碰撞, 碰撞过程满足质量, 动量守恒. 宏观量通过统计平均获得<sup>[2]</sup>. LGA 模型模拟 Navier-Stokes 方程存在几个问题: 低速度限制; 宏观流体方程中对流项系数一般不等于 1; 计算结果存在噪声.

格子 Boltzmann 方程<sup>[3,4]</sup> (Lattice Boltzmann Equation, 简称 LBE) 是在 LGA 方法基础上提出来的, 它取实数型的格子气, 即将粒子分布函数由布尔量变为  $[0, 1]$  范围内的实数, 碰撞过程可通过选择特定形式的平衡态分布函数来计算. 平衡态的选取要求满足: 各向同性, 质量、动量守恒, 宏观量满足流体力学方程. LBE 方法很好地解决了 LGA 方法的困难. LBE 方法对应的宏观方程与 Navier-Stokes 方程一致, 可计算高 Re (雷诺) 数问题, 计算结果噪声小. 碰撞过程是局部的, 适合并行计算. LBE 方法用于模拟不可压缩流体问题已取得一些进展. 本文对 LBE 方法进行了改动, 修改了平衡态分布函数, 使宏观方程与浅水长波方程一致. 作为数值试验, 计算了“抛物面水波”问题, 并与精确解进行了比较.

## 1 BGK 型 FHP 模型

如图 1, FHP 单松弛模型将二维空间离散化成正六边形, 每一个节点通过 6 条格线与相邻的 6 个节点相连, 粒子沿此 6 条格线方向运动. 7-bit 的 FHP 模型中, 粒子可沿  $e_1, \dots, e_6$  6 个速度方向运动, 其速度的大小  $|e| = C, \quad = 1, \dots, 6; \quad = 0$  表示静止粒子,  $|e_0| = 0$ . 粒子分布函数的演化方程为

$$f(x + e, t + 1) = f(x, t) - \frac{1}{\tau} [f(x, t) - f^{eq}(x, t)] \quad (1)$$

<sup>1)</sup>国家自然科学基金资助项目.

1996-05-17 收到第一稿, 1997-02-02 收到修改稿.

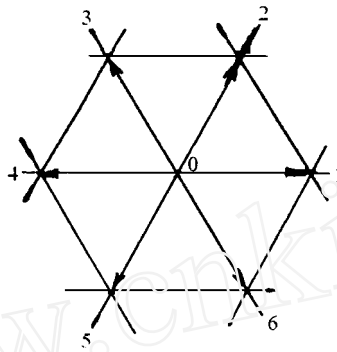


图 1 粒子的速度矢量  
Fig. 1 The velocity vector of each particle

其中  $i = 0, \dots, 6$ ,  $x_i$  矢量  $x$  表示节点位置,  $t = 0, 1, 2, \dots$  表示离散的时间步,  $\omega$  为松弛因子.  $f(x_i, t)$  (简记为  $f$ ) 表示  $x_i$  节点处,  $t$  时刻, 速度为  $e$  的粒子分布函数, 其值在  $[0, 1]$  范围内,  $f^{eq}(x_i, t)$  为  $x_i$  节点处  $t$  时刻的局部平衡态分布函数, 它是流体宏观物理量密度  $\rho$  和速度  $u$  等的函数.

质量和动量为碰撞过程中的守恒量, 可表示为

$$\rho = \sum_e f = \sum_e f^{eq} \tag{2}$$

$$u_i = \sum_e e_i f = \sum_e e_i f^{eq} \tag{3}$$

其中  $u_i, e_i$  表示矢量的  $i$  分量. (1) 式中碰撞算子记为

$$C(f) = -\omega (f - f^{eq}) \tag{4}$$

称为 BGK 模型方程<sup>[5]</sup>.

利用 Chapman-Enskog 展开<sup>[3,4]</sup>由方程 (1) ~ (4) 可导出宏观的流体力学方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_j} = 0 \tag{6}$$

其中定义  $\rho u_i = \sum_e e_i e_j f^{eq}$ , 在展开过程中, 忽略二阶小量, 得到的方程 (5), (6) 在形式上与可压缩气体无粘流的方程一致. (6) 式为无外力作用时的宏观方程, 如果存在外力 (如重力)  $F_i$ , 则 (6) 式改写成

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_j} = F_i \tag{7}$$

上式中  $\rho u_i$  是  $f^{eq}$  的函数, 由  $\rho, u$  和压力  $p$  来决定, 故  $f^{eq}$  的形式确定后, 宏观动量方程就确

定了. H. Chen<sup>[3]</sup>等人给出的平衡态形式为

$$\left. \begin{aligned} f^{eq} &= A_0 + A_2 e_i u_i + A_5 e_i e_j u_i u_j + A_6 u^2, & i, j = 1, \dots, 6 \\ f_0^{eq} &= B_0 + B_6 u^2 \end{aligned} \right\} \quad \text{量}$$

www.cnki.net

(10)

宏观动量方程为

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} = F_i \quad (11)$$

对于等温气体  $p/\rho$  为常数, (10) 式中  $A_0, B_0$  也是常数.

## 2 浅水长波方程

对于浅水长波包含自由表面的运动, 假定水深  $h$  与波长  $\lambda$  之间满足条件  $h/\lambda \ll 1$ , 并认为水平速度在铅直方向无变化, 密度  $\rho$  是常数, 浅水波方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} &= -g \frac{\partial h_b}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} &= -g \frac{\partial h_b}{\partial y} \end{aligned} \right\} )$$

从这种比拟关系可看出, 在可压缩气体无粘流的方程中密度  $\rho$  与浅水长波方程中的水深  $h$  相对应. 气体方程中的压力  $p$  与  $h$  的平方成正比, 这相当于气体为比热比  $\gamma = C_p / C_v = 2$  的多方气体. (13) 式中的  $F_x, F_y$  相当于气体方程中考虑外力 (如重力) 的情况, 其中外力  $F_x, F_y$  与河床高度  $h_b(x, y)$  沿  $x, y$  方向的变化率成正比. 由此我们将浅水波问题转化为用 LBE 方法可以求解的问题.

### 3 算 例

假定河床底部是水平的,  $\frac{\partial h_b}{\partial x} = \frac{\partial h_b}{\partial y} = 0$ , W. C. Thacker<sup>[7]</sup> (1981) 给出了浅水波方程 (12) 的一个解析解

$$u = \frac{xt}{t^2 + T^2}, v = \frac{yt}{t^2 + T^2} \quad (14)$$

$$h = h_{\max} \left[ \frac{T^2}{t^2 + T^2} - \frac{x^2 + y^2}{R_0^2} \left( \frac{T^2}{t^2 + T^2} \right)^2 \right] \quad (15)$$

对应  $t=0$  时初值为  $u=0, v=0$ , 水面高度

$$h = \begin{cases} h_{\max} (1 - (x^2 + y^2) / R_0^2), & x^2 + y^2 < R_0^2 \\ 0, & x^2 + y^2 \geq R_0^2 \end{cases}$$

■

是 LBE 算法在利用 Chapman-Enskog 展开, 推导流体方程时忽略的二阶小量所起的作用. 如果展开时保留二阶小量, 可得到带有数值粘性的流体力学方程<sup>[3,4]</sup>, 其中数值粘性与  $(\tau - 1/2)$  成正比. 如果计算中取  $\tau = 1/2$ , 则数值粘性为零, 但这样的 LBE 算法是数值不稳定的, 会导致数值发散, 为了保证算法的数值稳定, 要求  $\tau > 1/2$ , 即数值粘性为正值. 图 3 为水面高度在  $y = 0$  处的截面上, 沿  $x$  方向的分布图, 计算时, 取  $t = 20$ ,  $T = 80$ ,  $R_0 = 20$ ,  $h_{\max} = 1.5$ ,  $\tau = 1.5$ , 均为无量纲量.

从以上对 LBE 方法的理论分析和数值结果来看, LBE 方法用于计算浅水波问题是可行的, 它拓展了 LBE 方法的应用领域, 为数值求解浅水波问题提供了一个新的算法.

### 参 考 文 献

- 1 Frish U, Hasslacher B, Pomeau Y. *Phys Rev Lett*, 1986, 56: 1505
- 2 胡守信. 计算物理, 1989 (4): 457
- 3 Chen H, Chen S, Matthaeus WH. *Phys Rev A*, 1992, 45: 5339
- 4 Qian YH, Humieres Dh, Lallemand P. *Europhys Lett*, 1992, 17: 479
- 5 Bhatnagar PL, Gross EP, Krook M. *Phys Rev*, 1954, 94: 511~525
- 6 吴江航, 韩庆书. 计算流体力学的理论及应用. 科学出版社, 1988
- 7 Thacker WC. *J Fluid Mech*, 1981, 107: 499~508

## A LATTICE BOLTZMANN EQUATION METHOD FOR THE SHALLOW WATER WAVE EQUATIONS

Shi Weiping Hu Shouxin Yan Guangwu

(Mechanics Section, Department of Mathematics, Jilin University, Changchun 130023, China)

**Abstract** We proposed a lattice Boltzmann equation (LBE) method to simulate the shallow water wave equations. If the viscosity of the gas is negligible, the gas macrodynamical equations are compared with the shallow water equation, and the equilibrium distribution function can be given. Numerical results are compared with the exact solution given by W. C. Thacker.

**Key words** lattice Boltzmann equation, shallow water wave