

率无关非比例循环弹塑性本构关系¹⁾

H.W. Zhang Y. Huang

(Department of Mechanical Engineering-Engineering Mechanics,
Michigan Technological University, Houghton, MI 49931, USA)

周春田 黄克智

(清华大学工程力学系, 北京 100084)

摘要 正确地考虑了塑性应变空间中和非比例加载下的离散记忆特性, 提出一种新的率无关非比例循环塑性本构关系, 并给出了铜的理论预测值与实验结果的比较.

关键词 率无关, 非比例循环加载, 记忆特性, 本构关系

引 言

现代工业的发展和计算机应用的普及使发展更精确的本构理论变得十分迫切. 自从 Lamba 和 Sidebottom^[1] 首次研究了退火铜在复杂非比例循环加载下的实验现象, 众多的学者 (Kanazawa 等^[2], Tanaka 等^[3~5], Benallal 等^[6]) 对不同材料在各种非比例循环加载路径下的响应进行了较为广泛的研究, 揭示了多轴非比例循环加载的特殊性. 人们发现经典的塑性理论难以精确地描述复杂加载历史下材料的变形行为. 继之发展的循环塑性理论大多在塑性力学本构关系的基本框架下, 规定不同的加载面演化法则. 这些模型大致可以分为二类: 一类引入非线性的硬化法则, 例如 Chaboche^[7], Mroz^[8], Benallal 和 Marquis^[9] 等, 另一类提出多轴双面理论, 例如 Dafalias 和 Popov^[10], Ellyin 和 Xia^[11], McDowell^[12] 等. 双面理论能够给出复杂加载下更好的预测结果. 在这些理论模型建立过程中, 材料的离散记忆特性越来越得到人们的重视. 但是如何正确、合理地将离散记忆机制引入本构模型, 许多理论做得并不完善; 同时, 随着对非比例循环加载特殊性的认识, 人们考虑引入了各种度量非比例程度的参量, 但是一些非比例参量的选择或者忽略了加载方向突变的附加强化, 或者依赖于一定的几何路径图形, 不具有普遍性. 本文的目的是试图构造一个多轴非比例加载双面本构模型, 较好地考虑离散记忆和非比例加载特性.

1 具有离散记忆特性的非比例双面本构理论

1.1 应力应变关系

考虑小变形情况, 应变增量被分解为弹性与塑性两部分

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \quad (1)$$

¹⁾ 国家自然科学基金资助项目.

1994-07-29 收到第一稿, 1995-01-27 收到修改稿.

其中, 弹性应变增量满足广义虎克定律

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\delta_{ik}\delta_{jl} - \nu\delta_{ij}\delta_{kl}] d\sigma_{kl} \quad (2)$$

E 为弹性模量, ν 为泊松比.

塑性应变增量满足正交法则

$$d\varepsilon_{ij}^P = cg \frac{\partial f_y}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f_y}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} \quad (3)$$

其中 f_y 为加载面函数, g 为加载系数, c 满足

$$\left. \begin{aligned} c = 1, & \quad \text{当 } \frac{\partial f_y}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} \geq 0 \text{ 且 } f_y(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}, q) = 0 \\ c = 0, & \quad \text{当 } \frac{\partial f_y}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} < 0 \text{ 或 } f_y(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}, q) < 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(4) 式中 α_{ij} 为加载面的背应力张量, q 为加载面大小
由 (1)(2)(3) 式可以得到

$$d\sigma_{ij} = \left\{ \frac{E}{1 + \nu} \left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \delta_{ij}\delta_{kl} \right) - \frac{E}{1 + \nu} \frac{cg \frac{\partial f_y}{\partial \sigma_{ij}}}{\frac{1 + \nu}{E} + cg \left(\frac{\partial f_y}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f_y}{\partial \sigma_{mn}} \right)} \left(\frac{\partial f_y}{\partial \sigma_{kl}} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \frac{\partial f_y}{\partial \sigma_{mn}} \delta_{mn}\delta_{kl} \right) \right\} d\varepsilon_{kl} \quad (5)$$

取 Mises 屈服函数形式的加载面

$$f_y = \frac{3}{2} (s_{ij} - \alpha_{ij})(s_{ij} - \alpha_{ij}) - q^2 = 0 \quad (6)$$

(6) 式中 s_{ij} 为偏斜应力张量, 定义为

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

将 (6) 式代入 (5) 式可以得到

$$d\sigma_{ij} = L_{ijkl} d\varepsilon_{kl} \quad (7a)$$

$$L_{ijkl} = \mathcal{L}_{ijkl} - ch \cdot 3(s_{ij} - \alpha_{ij}) \cdot 3(s_{kl} - \alpha_{kl}) \quad (7b)$$

$$\mathcal{L}_{ijkl} = \frac{E}{1 + \nu} \left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \delta_{ij}\delta_{kl} \right) \quad (7c)$$

$$h = \frac{E}{1 + \nu} \frac{g}{\frac{1 + \nu}{E} + g \cdot 6q^2} \quad (7d)$$

由 (3) 式, 利用 (6) 式, 可定义塑性模量 E^P

$$\frac{\partial f_y}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} = 2qE^P d\varepsilon^P, \quad \frac{1}{E^P} = 4gq^2 \quad (8a)$$

式中 $\bar{\varepsilon}^P$ 为累积塑性应变

$$\bar{\varepsilon}^P = \int \left(\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^P d\varepsilon_{ij}^P \right)^{1/2} \quad (8b)$$

在单轴加载条件下, $\sigma_{11} = \sigma$, 其他 $\sigma_{ij} = 0$, 由 (8a) 有

$$\frac{1}{E^P} = \frac{d\varepsilon_{11}^P}{d\sigma_{11}} = \frac{1}{E_t} - \frac{1}{E}$$

其中 E_t 为单轴加载时的切线模量.

至此, 我们知道, 在控制应变加载时, $d\varepsilon_{kl}$ 给定, 材料的当前状态参数为 s_{ij} , α_{ij} , 材料的弹性常数为 E , ν , 如果能够确定 q , E^P 的演化律, 就能由控制应变增量 $d\varepsilon_{kl}$ 求得响应应力增量.

1.2 E^P 的确定

用双面理论确定 E^P . 在应力空间中定义双面, 即一个加载面 (即屈服面) 和一个界限面, 通过双面间的距离确定塑性模量 E^P , 同时引入离散记忆参数 δ_m (其定义见第 1.3 小节)

$$\text{加载面: 公式 (6)} \quad f_y = \frac{3}{2}(s_{ij} - \alpha_{ij})(s_{ij} - \alpha_{ij}) - q^2 = 0$$

$$\text{界限面:} \quad \varphi_m = \frac{3}{2}\tilde{s}_{ij}\tilde{s}_{ij} - \sigma_{\text{eff,max}}^2 = 0 \quad (9)$$

其中 q 表示加载面大小, \tilde{s}_{ij} 表示界限面上各点的偏斜应力, max 表示材料加载历史中的最大值

$$\sigma_{\text{eff,max}}^2 = \max \left(\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij} \right) \quad (10)$$

(9)(10) 式规定了界限面实际上是最大应力记忆面, 即在应力空间记忆了材料经历的最大应力. 这种界限面的取法具有明确的物理意义, 便于材料参数的确定.

下面规定加载面的演化法则. 通过加载面的演化, 即定义了双面之距, 由此得到塑性模量 E^P , 这是双面理论的基本思想.

我们只需讨论当前应力点在加载面上且继续加载的情况.

若当前应力点在界限面内 (即加载面与最大应力记忆面不接触)

$$d\alpha_{ij} = d\mu [(s_{ij})_m - (s_{ij})_y] \quad (11)$$

其中 $(s_{ij})_y$ 为在加载面上的当前应力点, $(s_{ij})_m$ 为与当前应力点有相同外法线方向的最大应力记忆面上的对应点, 它们满足

$$\frac{(s_{ij})_m}{\sigma_{\text{eff,max}}} = \frac{(s_{ij})_y - \alpha_{ij}}{q} \quad (12)$$

$(s_{ij})_y$ 与 $(s_{ij})_m$ 之间的距离定义为双面之距 δ (见 (18) 式).

由加载面的一致性条件 $df_y = 0$, 得到

$$d\mu = \frac{3(s_{ij} - \alpha_{ij})ds_{ij} - 2qdq}{3(s_{kl} - \alpha_{kl})[(s_{kl})_m - (s_{kl})_y]} \quad (13)$$

若当前应力点在界限面上 (即加载面与界限面相切于当前应力点)

$$\frac{s_{ij}}{\sigma_{\text{eff,max}}} = \frac{s_{ij} - \alpha_{ij}}{q} \quad (14)$$

则继续加载, 有¹⁾

$$\frac{3}{2}(s_{ij} + ds_{ij})(s_{ij} + ds_{ij}) - (\sigma_{\text{eff,max}} + d\sigma_{\text{eff,max}})^2 = 0 \quad (15)$$

其中 s_{ij} 为当前应力, ds_{ij} 为偏斜应力增量, $s_{ij} + ds_{ij}$ 为加载后新的应力状态量. 由加载面与界限面在新的应力点上相切, 有

$$\frac{s_{ij} + ds_{ij}}{\sqrt{(s_{kl} + ds_{kl})(s_{kl} + ds_{kl})}} = \frac{s_{ij} + ds_{ij} - (\alpha_{ij} + d\alpha_{ij})}{\sqrt{[s_{kl} + ds_{kl} - (\alpha_{kl} + d\alpha_{kl})][s_{kl} + ds_{kl} - (\alpha_{kl} + d\alpha_{kl})]}} \quad (16)$$

其中 $\alpha_{ij} + d\alpha_{ij}$ 为加载后新的背应力值.

加载后, 新的应力状态量仍然分别满足加载面、界限面方程, (16) 式可改写为

$$\frac{s_{ij} + ds_{ij}}{\sigma_{\text{eff,max}} + d\sigma_{\text{eff,max}}} = \frac{s_{ij} + ds_{ij} - (\alpha_{ij} + d\alpha_{ij})}{q + dq} \quad (17)$$

式中 $\sigma_{\text{eff,max}} + d\sigma_{\text{eff,max}}$ 满足 (15) 式, dq 为加载面大小的增量. 若已知 dq , 可由 (17) 求 $d\alpha_{ij}$.

至此, 只要知道加载面大小 q 的演化规律 (见后 (26) 式) 与塑性模量 E^P 的取值 (见后 (25b) 式), 则双面的运动演化规律和塑性变形规律就完全确定. 定义双面之距 δ 来确定塑性模量 E^P

$$\delta = \{[(s_{ij})_m - (s_{ij})_y][(s_{ij})_m - (s_{ij})_y]\}^{1/2} \quad (18)$$

同时引入离散记忆参数 δ_{in} (其定义见 1.3 小节) 来确定 E^P

$$E^P = E_0^P \left\{ 1 + \left(\frac{\delta}{\delta_{in} - \delta} \right) h(\delta_{in}) \right\} \quad (19)$$

其中 $h(\delta_{in})$ 为材料函数, E_0^P 为界限面上的塑性模量. 我们规定, 当 $\delta = \delta_{in} = 0$ 时, $E^P = E_0^P$, 所以 E_0^P 即为单拉曲线的塑性模量, 它满足

$$E_0^P = E_0^P(\sigma_{\text{eff,max}}) \quad (20)$$

1.3 离散记忆参数 δ_{in} 的确定

如图 1 所示, 材料在经历了完全弹性卸载, 反向加载、再卸载、加载的一个循环后, 好象记住了原先的卸载点 A , 在将达到原卸载点 A 时, $\sigma \sim \varepsilon$ 曲线斜率变化很快. 达到卸载点后的变形规律与未经历卸载时一样. 这一性质被称为材料对大变形卸载点的离散记忆. 许多双面理论都引入了离散记忆参数 δ_{in} , 但是在对 δ_{in} 值的变化规定上都没能充分地反映材料的离散记忆特性. 下面我们通过引入胡在谦等在塑性应变空间的记忆曲面族^[13], 规定比较合理的离散记忆参数演化法则, 更好地反映材料的离散记忆特性.

如图 2, 在塑性应变空间, 材料在某一初始加载过程中 (例如 OP_1 过程) 达到最大塑性应变曲面, 设该曲面对应 $\delta_{in}(0) = 0$ (自变量为 0 表示初始加载过程), 该曲面方程为

$$f_0 = \sqrt{\varepsilon_{ij}^P \varepsilon_{ij}^P} - \alpha_0 = 0 \quad (21)$$

¹⁾(15) 至 (17) 式均可以改写成一次微分线性形式.

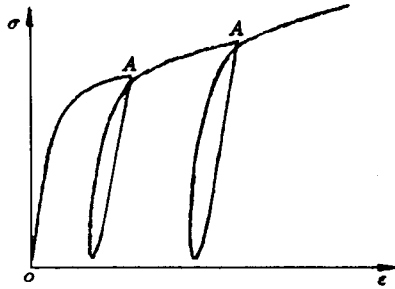


图 1 材料对大变形卸载点的离散记忆
Fig.1 Discrete memory of materials for the unloading point

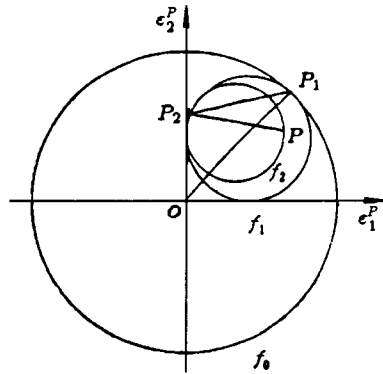


图 2 塑性应变空间中的记忆曲面
Fig.2 Memory surfaces in the space of plastic strain

若继续加载，则曲面 f_0 扩大。如果在塑性应变空间中的 P_1 点加载方向改变，发生新的塑性变形，使 $\sqrt{\epsilon_{ij}^P \epsilon_{ij}^P}$ 减小，则此时材料保持对 f_0 曲面的记忆，同时产生新曲面 f_1 ，与 f_0 相切于 P_1 点

$$f_1 = [(\epsilon^P - A_1) : (\epsilon^P - A_1)]^{1/2} - \alpha_1 = 0 \tag{22}$$

其中

$$\alpha_1 = \frac{-(\epsilon^P - \epsilon^P(F_1)) : (\epsilon^P - \epsilon^P(P_1))}{2\nu(P_1) : (\epsilon^P - \epsilon^P(P_1))}, \quad A_1 = \epsilon^P(P_1) - \alpha_1\nu(P_1)$$

$\nu(P_1)$ 是 f_0 面上 P_1 点的单位外法线张量。

在塑性应变空间中加载方向发生改变的 P_1 点，在应力空间对应一个双面之距 δ ，把这个双面之距 δ 定义为曲面 f_1 的记忆参数 $\delta_{in}(1)$ 。

如此，我们得到塑性应变空间的一系列曲面 f_0, f_1, \dots, f_k ，它们两两相切，且 $\alpha_0 > \alpha_1 > \dots > \alpha_k$ 。 f_k 的方程为

$$f_k = [(\epsilon^P - A_k) : (\epsilon^P - A_k)]^{1/2} - \alpha_k = 0 \tag{23a}$$

$$\alpha_k = \frac{-(\epsilon^P - \epsilon^P(P_k)) : (\epsilon^P - \epsilon^P(P_k))}{2\nu(P_k) : (\epsilon^P - \epsilon^P(P_k))} \tag{23b}$$

$$A_k = \epsilon^P(P_k) - \alpha_k\nu(P_k) \tag{23c}$$

$\nu(P_k)$ 是曲面 f_{k-1} 在 P_k 点的单位外法线张量。

对应于每一个曲面 f_i ，都有一个记忆参数 $\delta_{in}(i)$ ，其定义为当状态点位于 P_i 时，应力空间双面之距。

若当前状态点 P 在 f_k 面上，加载使 α_k 不断增大并等于 α_{k-1} 时， f_k 与 f_{k-1} 面重合；再继续加载，则 f_k 曲面消失，当前状态点改在 f_{k-1} 面上， f_{k-1} 曲面继续演化。当加载使 f_k 曲面继续扩大， $f_k, f_{k-1}, \dots, f_{k-m+1}$ 曲面相继消失时，当前状态点 P 改在 f_{k-m} 面上， f_{k-m} 曲面继续演化。

这样，我们得到了在塑性应变空间中一族记忆曲面 $f_0 \dots f_k$ ，定义曲面集合 $\varphi = \{f_i | i=0,1,2,\dots,k, f_i \text{ 不曾消失}\}$ ， φ 即为材料的记忆曲面族。对应于曲面集合 φ ，有一个记忆参数集合 $\psi, \psi = \{\delta_{in}(i) | i=0,1,\dots,k, f_i \text{ 不曾消失}\}$ 。

取离散记忆参数 $\delta_{in} = \delta_{in}(k)$, 即集合 ψ 中的最后一个参数. 这样的演化规律保证了材料记住最近的卸载点, 当加载超过该点后, 材料遗忘了原卸载点.

1.4 非比例参数的引入

借鉴 Benallal 和 Marquis^[14] 的方法, 引入非比例度参数

$$F = \sin^2 \theta \quad (24a)$$

θ 定义为 \dot{s} 与 $\dot{\epsilon}^P$ 的夹角

$$\cos \theta = \frac{\dot{s} : \dot{\epsilon}^P}{(\dot{s} : \dot{s})^{1/2} (\dot{\epsilon}^P : \dot{\epsilon}^P)^{1/2}} \quad (24b)$$

用非比例度修正加载面半径稳定值和塑性模量

$$q_{st} = (1 + \eta F) q_{st}^{in}(\alpha_k) \quad (25a)$$

$$E_P = (1 + \eta F) E_P^{in}(\sigma_{\text{eff,max}}, \delta, \delta_{in}) \quad (25b)$$

其中下标 “st” 表示稳定值, 上标 “in” 表示比例加载, η 为材料参数, α_k 为塑性应变空间中最后一个记忆曲面 f_k 的半径, 材料函数 $q_{st}^{in}(\alpha_k)$ 由逐级增幅单轴循环稳定曲线决定, E_P^{in} 取自 (19) 式. q 的即时值由下列微分方程决定

$$\frac{\partial q}{\partial \bar{\epsilon}^P} = \beta(q_{st} - q) \quad (26)$$

其中 $\bar{\epsilon}^P$ 为累积塑性应变, 见 (8b) 式, β 为材料参数. q_{st} 为当 $\bar{\epsilon}^P \rightarrow \infty$ 时, q 的极限值.

这种非比例度的选择能够反映加载方向突然改变引起的附加强化, 它适用于任何加载路径, 能够反映较为一般的复杂加载情况.

2 理论预测与试验结果的比较

在周春田指导下, 张宏文与高宝奎在 Instron 1343 电液伺服疲劳试验机上完成了黄铜的各种复杂循环加载路径试验. 由简单加载路径的试验结果确定材料参数, 然后由本文模型预测复杂循环路径的力学行为并与试验结果相比较.

本文模型有以下的参数需要确定: $E, \nu, E_0^P, q_{st}^{in}(\alpha_k), h(\delta_{in}), \beta, \eta$.

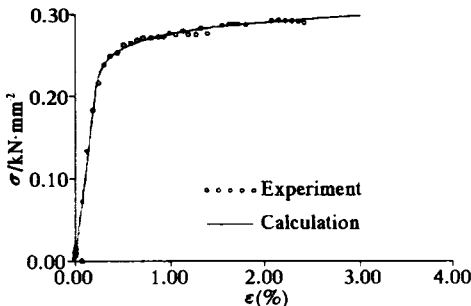


图 3 单拉曲线
Fig.3 Uniaxial tensile curve

由图 3 所示的黄铜单拉曲线, 测得杨氏弹性模量 $E = 99 \text{ kN/mm}^2$. 另外, 由黄铜的扭转试验, 测得剪切弹性模量 $G = 36.3 \text{ kN/mm}^2$, 因此波松比 $\nu = E/2G - 1 = 0.364$. 单拉曲线可拟合成

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n$$

其中

$$\sigma_0 = 0.21 \text{ kN/mm}^2, \quad \epsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E} = 0.212\%$$

$$\alpha = 0.0455, \quad n = 15.9$$

因此得到塑性模量表达式

$$\frac{1}{E_0^p} = \frac{\alpha n}{E} \left(\frac{\sigma_{\text{eff,max}}}{\sigma_0} \right)^{n-1}$$

由逐级增幅单轴循环稳定曲线可以定出加载面半径稳定值函数 (单位 kN/mm²)

$$q_{st}^{in}(\alpha_k) = \sigma_0 - 0.143\alpha_k^{0.127}$$

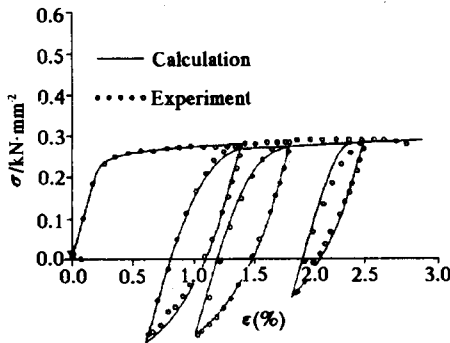


图 4 离散记忆曲线
Fig.4 Curve of discrete memory

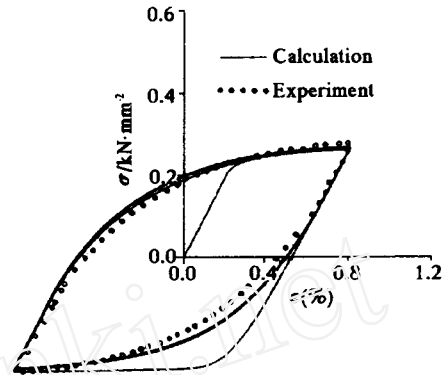


图 5 单拉循环曲线
Fig.5 Uniaxial tensile-compressive cyclic curve

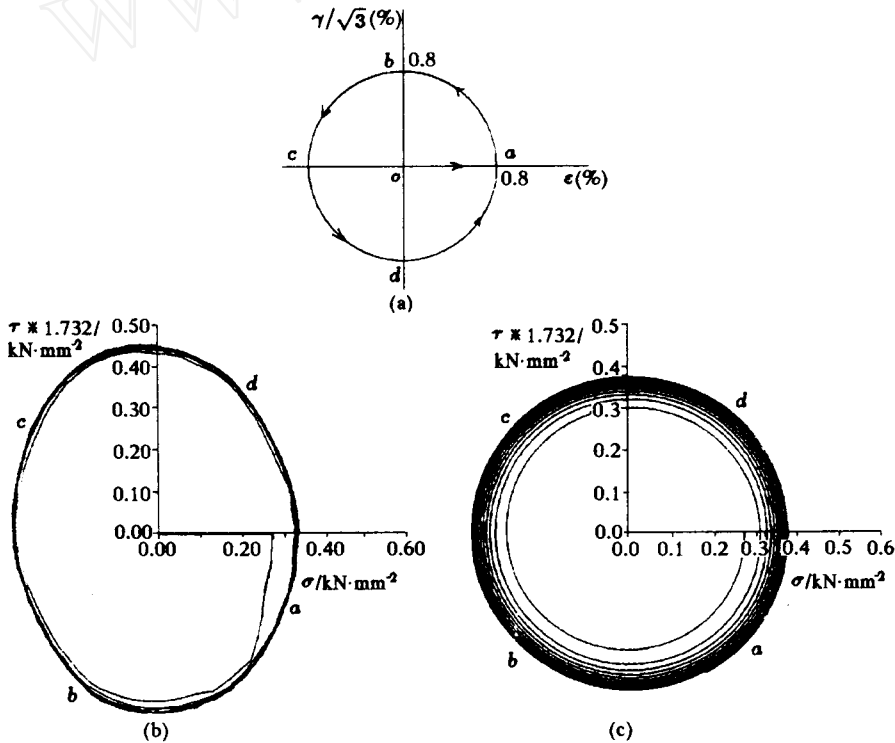


图 6 图形应变路径的应力响应
(a) 控制应变路径 oabca..., (b) 实验曲线, (c) 理论预测

Fig.6 Stress response to circular strain path
(a) Strain-controlled path oabca..., (b) Experimental curve, (c) Theoretical prediction

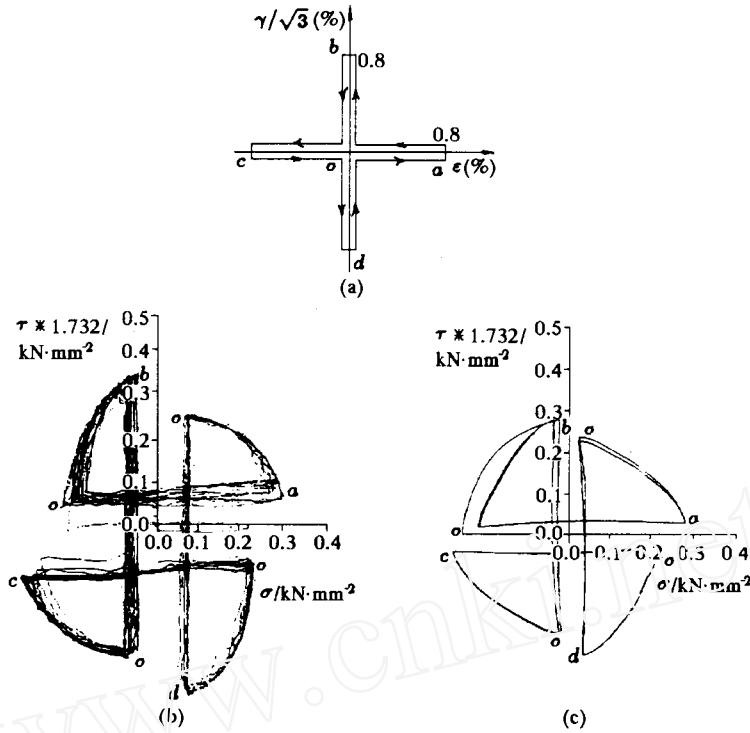


图 7 十字形应变路径下的应力响应
 (a) 控制应变路径 oaobocod..., (b) 实验曲线, (c) 理论预测
 Fig.7 Stress response to cross-form strain path

(a) Strain-controlled path oaobocod..., (b) Experimental curve, (c) Theoretical prediction

及 $\beta \approx 4$. 由图 4 所示的离散记忆曲线拟合得到

$$h(\delta_{in}) = 0.4\delta_{in}^{-4.8}$$

图 5 示应变幅为 0.8% 的单拉循环曲线按上述材料参数计算结果与试验的比较.

在图 6~ 图 8 所示的非比例度加载路径循环曲线的计算中为简单起见均未考虑非比例度的影响; 这相当于在 (25a,b) 式中取材料参数 $\eta = 0$. 图 6 示应变幅

$$\left[\left(\frac{\Delta\epsilon}{2} \right)^2 + \left(\frac{\Delta\gamma}{2\sqrt{3}} \right)^2 \right]^{1/2}$$

为 0.8% 的圆形应变路径下计算所得应力路径与试验比较, 图 7 与图 8 示应变幅为 0.8% 的两种十字形应变路径下的计算应力路径与试验比较.

图 6~ 图 8 中的计算应力路径虽然与试验结果大体符合, 但由于未考虑非比例度的影响, 故数值上均偏小. 由图 6(a) 可以看出, 材料表现明显的各向异性. 因此, 如果考虑材料的各向异性, 用各向异性的屈服准则代替 Mises 准则, 并采用相应的各向异性塑性流动规律, 同时考虑非比例度的影响, 可以使得计算结果与试验符合得更好.

3 结 论

本文借鉴前人模型的优点, 通过引入塑性应变空间的记忆曲面族和合适的非比例度, 建立了具有离散记忆特性的非比例双面本构模型. 从理论上讲, 本文的离散记忆法则能够

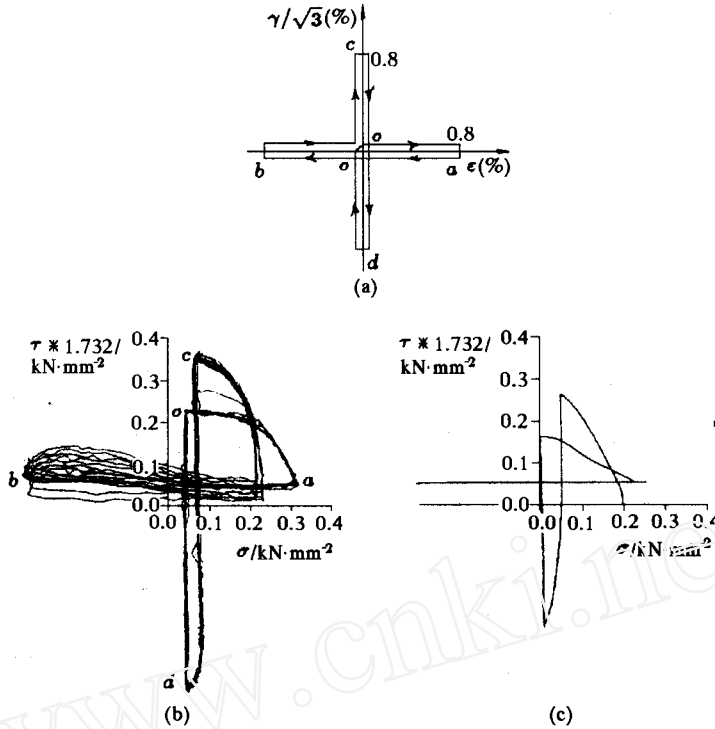


图 8 另一种十字形应变路径下的应力响应
 (a) 控制应变路径 oaobocod..., (b) 实验曲线, (c) 理论预测
 Fig.8 Stress response to another cross-form strain path

(a) Strain-controlled path oaobocod..., (b) Experimental curve, (c) Theoretical prediction

充分地反映材料的离散记忆特性，而且非比例度的选择不依赖于某一固定的加载路径几何形状，具有一般性。从模型的预测能力看，能够较好地反映实验现象。

致谢 高宝奎参加了与本文有关的试验工作，在此致谢。

参 考 文 献

- 1 Lamba HS, Sidebottom OM. Cyclic plasticity for nonproportional paths: Part 1 — Cyclic hardening, erasure of memory and subsequent strain hardening experiments; Part 2 — Comparison with predictions of three incremental plasticity models. *Journal of Engineering Materials and Technology*, ASME, 1978, 100: 96~111
- 2 Kanazawa K, Miller KJ, Brown MW. Cyclic deformation of 1% Cr-Mo-V Steel under out-of-phase loads. *Fatigue of Engineering Materials and Structures*, 2: 217~228
- 3 Ohashi Y, Tanaka E, Ooka M. Plastic deformation behavior of Type 316 Stainless Steel subject to out-of-phase strain cycles. *Journal of Engineering Materials and Technology*, ASME, 1985, 107: 286~292
- 4 Tanaka E, Murakami S, Ooka M. Effects of strain path shapes on nonproportional cyclic plasticity. *J Mech Phys Solids*, 1985, 33: 559~575
- 5 Tanaka E, Murakami S, Ooka M. Effects of plastic strain amplitudes on non-proportional cyclic plasticity. *Acta Mechanica*, 1985, 57: 167~182
- 6 Benallal A, LeGallo P, Marquis D. An experimental investigation of cyclic hardening of 316 Stainless Steel and of 2024 Aluminium Alloy under multiaxial loading. *Nucl Eng Des*, 1989, 114: 345~353
- 7 Chaboche JL, Rousselier G. On the plastic and viscoplastic constitutive equations — Part 1: Rules developed with internal variable concept. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 1983: 105
- 8 Mroz Z, Shrivastava HP, Dubey RN. A non-linear hardening model and its application to cyclic loading. *Acta Mechanica*, 1976, 25: 51~61

- 9 Benallal A, Marquis D. Constitutive equations of nonproportional cyclic elasto-viscoplasticity. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 1987, 109: 326~336
- 10 Dafalias YF, Popov EP. Plastic internal variable formalism of cyclic plasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 1976, 645~651
- 11 Ellyin F, Xia Z. A rate-independent constitutive model for transient non-proportional loading. *J Mech Phys Solids*, 1989, 37: 71~91
- 12 McDowell DL. A two surfaces model for transient non-proportional cyclic plasticity: Part 1 — Development of appropriate equations. *Journal of Applied Mechanics*, 1985, 52: 298~308
- 13 胡在谦, 黄克智, 周春田. 金属材料在循环载荷下的本构关系. *力学学报*, 1989, 21(6)

A RATE-INDEPENDENT CONSTITUTIVE LAW FOR NONPROPORTIONAL CYCLIC PLASTICITY

H.W. Zhang Y. Huang

(*Department Mechanical Engineering-Engineering Mechanics,
Michigan Technological University, Houghton, MI 49931, USA*)

C.T. Zhou Keh-chih Hwang

(*Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084, China*)

Abstract A new constitutive law for rate-independent nonproportional cyclic plasticity is proposed, with proper consideration of discrete memory in plastic strain space and of nonproportional loading. Comparisons are made between the theoretical predictions and the experimental results for copper.

Key words rate-independence, nonproportional cyclic loading, memory property, constitutive law