

心脏做功的动力学过程 ——考虑动功率的最小功原理¹⁾

吴 驰 丁光宏

(复旦大学应用力学系, 上海 200433)

高 健 王晓冬 刘玉莉 张国军

(中国人民解放军 305 医院心内科, 北京 100017)

摘要 心脏最小功原理是描述心脏做功动力学过程的一种有效模型, 在文献 [1] 中, 作者在忽略心脏动功率前提下, 给出了心脏做功动力学过程的解析解。但由于动功率在心脏整个做功过程中, 特别是在某些病理状态下, 占有相当比例, 因此, 在分析心脏动态做功过程时, 应该考虑心脏的总体对外做功。当计入动功率后, 方程由原来的线性变成非线性, 问题复杂许多, 已无法应用原来的解析方法。本文在牛顿法的基础上, 得到一种考虑动功率项求解非线性方程组的方法。实例计算表明该方法收敛速度快, 所得结果与动物实验相符合。从而使得最小功原理的计算得到完善, 为进一步研究心脏做功的动力学过程奠定理论基础。

关键词 最小功原理, 心脏动功率, 牛顿法

引 言

心脏的重要功能是将化学能转化为机械能, 心脏做功是心脏功能的一个重要方面, 心脏做功包括心脏本身消耗的能量和向外输出的机械能两部分, 其中心脏消耗能量大部分以热的形式散发掉, 称为“内功”, 它约占心脏做功的 10%~15%; 而向外输出功, 又称“外功”, 其中绝大部分是势功(压能), 做功占心脏输出功很小比例^[2]。

心脏做功是一个相当复杂的过程, 最小功原理^[1]以心脏输出功为研究对象, 提出了一个描述心脏做功的动力学模型, 即面对一个给定后负荷的血管床, 心脏选择最佳流量和压力路径来使其输出功最小。在该原理的理论计算过程中, 最终归结为求解非线性方程组, 以前为求解该方程组, 忽略了在整个心脏输出功率占很小比例的动能部分^[2], 即删去动能项, 从而减小了计算量, 并得到问题的解析解。尽管解析解给出的压力和流量波形与动物实验较吻合, 但在收缩期内, 流量波和实验有些误差。

本文在应用心脏最小功原理过程中考虑成倍忽略的动能项, 在牛顿法的基础上, 减化动能项中所含积分表达式, 设计出一种求解该方程组数值解的方法, 通过大量计算表明, 只要该方程组所含参数在生理范围内变化时, 利用该方法, 方程组都能收敛到一组稳定解, 对于一些较差的生理参数, 稳定性较差的方程组亦可通过改变松弛因子的大小来使方

¹⁾ 国家自然科学基金重点资助项目。

1994-07-11 收到第一稿, 1995-03-09 收到修改稿。

程收敛, 这样, 在理论计算上, 使最小功原理得以完善, 为进一步仔细分析心脏做功的动态过程奠定理论基础.

观察通过这种方法得到的数值解结果, 并和相同生理参数下解析解的结果相比较, 发现二者差异甚微, 这表明在多数情况下, 考虑动功率项对最小功原理的修正很小, 在心脏做功过程中动能项可以忽略不计. 但在一些特殊情况下, 用该方法计算发现, 当动能在心脏输出功所占比例较大时, 在考虑心脏做功过程中不可忽略动能的影响.

1 理论推导

心脏后负荷 —— 血管输入阻抗定义为

$$Z_n = P_n/Q_n \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (1)$$

$$\phi_n = \phi_{p_n} - \phi_{q_n} \quad (2)$$

这里 Z_n 和 ϕ_n 分别是输入阻抗第 n 次谐波的模和幅角, P_n 和 ϕ_{p_n} , Q_n 和 ϕ_{q_n} 分别是压力波和流量波 Fourier 变换的第 n 次谐波的模和幅角, 即

$$p(t) = P_0 + \sum_{n=1}^N P_n \cos(\omega_n t + \phi_{p_n}) \quad (3)$$

$$q(t) = Q_0 + \sum_{n=1}^N Q_n \cos(\omega_n t + \phi_{q_n}) \quad (4)$$

这里, $p(t)$ 和 $q(t)$ 分别表示时域上压力和流量的波形, ω_1 表示心率基频, t 表示时间.

通过对动脉系统特性的研究, 人们发现一旦血管和血液特性不变, 那么 Z_n 和 ϕ_n 基本唯一确定. 根据 K. Sanagawa 和 K. Sagawa 等人对心脏定常模型的研究^[3], 人们发现一旦心脏工作状态和后负荷特性确定后, Z_n, ϕ_n, Q_0 和 T 也就确定 (T 是心动周期), 利用最小功原理, 可进一步确定 $p(t), q(t)$.

最小功原理我们用下式来描述

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial Q_n} &= 0 \\ \frac{\partial W}{\partial \phi_{q_n}} &= 0 \\ \int_0^{T_s} q(t) dt &= S_V = Q_0 T \end{aligned} \right\} \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (5)$$

这里

$$W = W_p + W_k$$

其中 $W_p = P_0 Q_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N Q_n^2 Z_n \cos \phi_n$ 表示势功率; $W_k = \frac{\rho}{2A^2 T} \int_0^T q^3(t) dt$ 表示动功率, $T - T_s$ 内心脏不做功, W 为心脏输出功率, T_s 表示心脏收缩期, ρ 为血液密度, S_V 为每搏输出量, A 为主动脉根部血管平均面积, $\int_0^{T_s} q(t) dt = S_V$ 是保证血液流量守恒的

约束条件，令

$$G = W + \lambda \left(\int_0^{T_s} q(t) dt - Q_0 T \right) \tag{6}$$

则方程组化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial Q_n} &= 0 \\ \frac{\partial G}{\partial \phi_{q_n}} &= 0 \\ \frac{\partial G}{\partial \lambda} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (n = 1, 2, \dots, N) \tag{7}$$

这里， G 为目标函数， λ 为常数乘子。

展开得

$$\left. \begin{aligned} Q_n Z_n \cos \phi_n + \frac{3\rho}{2A^2 T} \int_0^T q^2 \cos(\omega_n t + \phi_{q_n}) dt + \\ \lambda \cdot \frac{1}{\omega_n} [\sin \phi_{q_n} - \sin(\omega_n T_s + \phi_{q_n})] &= 0 \\ \frac{3\rho}{2A^2 T} \int_0^{T_s} Q_n q^2 [-\sin(\omega_n t + \phi_{q_n})] dt + \\ \lambda \cdot \frac{Q_n}{\omega_n} [\cos \phi_{q_n} - \cos(\omega_n T_s + \phi_{q_n})] &= 0 \\ Q_0(T - T_s) + \sum_{n=1}^N \frac{Q_n}{\omega_n} [\sin \phi_{q_n} - \sin(\omega_n T_s + \phi_{q_n})] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (n = 1, 2, \dots, N) \tag{8}$$

对于非线性方程组 (8)，用牛顿法进行求解，对于方程组中的积分项，若采用数值积分，将大大影响计算速度，把其中 $q(t)$ 以 Fourier 展开代入，求出方程组中积分项的解析表达

$$\left. \begin{aligned} \int_0^T q^2 \cos(\omega_n t + \phi_{q_n}) dt &= T Q_0 Q_n + \frac{T}{2} \sum_{i=1}^{N-n} Q_i + n Q_i \cos(\phi_{q_{i+n}} - \phi_{q_i} - \phi_{q_n}) + \\ &\quad \frac{T}{4} \sum_{i=1}^{n-1} Q_i Q_{n-i} \cos(\phi_{q_i} + \phi_{q_{n-i}} - \phi_{q_n}) \\ \int_0^T q^2 \sin(\omega_n t + \phi_{q_n}) dt &= \frac{T}{2} \sum_{i=1}^{N-n} Q_{i+n} Q_i \sin(\phi_{q_{i+n}} - \phi_{q_i} - \phi_{q_n}) + \\ &\quad \frac{T}{4} \sum_{i=1}^{n-1} Q_i Q_{n-i} \sin(\phi_{q_i} + \phi_{q_{n-i}} - \phi_{q_n}) \end{aligned} \right\} \quad (n = 1, 2, \dots, N) \tag{9}$$

令 $f_n = \frac{\partial G}{\partial Q_n}$, $f_{n+N} = \frac{\partial G}{\partial \phi_{q_n}}$, $f_{2N+1} = \frac{\partial G}{\partial \lambda}$, $Z = (Q_1, \dots, Q_n, \phi_{q_1}, \dots, \phi_{q_n}, \lambda)^T$

则

$$df_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, 2N + 1) \tag{10}$$

其中 $df_{i,j}$ 为 Jacobi 矩阵, 具体表达如下

$$df_{i,j}(i \neq j) = \frac{6\rho}{2A^2T} \begin{cases} 0 & (i+j \geq N) \\ \frac{T}{4}Q_{i+j} \cos(\phi_{q_{i+j}} - \phi_{q_i} - \phi_{q_j}) & (i+j < N) \end{cases} +$$

$$\begin{cases} \frac{T}{4}Q_{i-j} \cos(\phi_{q_{i-j}} - \phi_{q_i} + \phi_{q_j}) & (i > j) \\ \frac{T}{4}Q_{i-j} \cos(\phi_{q_{i-j}} - \phi_{q_j} + \phi_{q_i}) & (i < j) \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots, N)$$

$$df_{i,j} = Z_n \cos \phi_n + \frac{6\rho}{2A^2T} \begin{cases} \frac{T}{4}Q_{2i} \cos(\phi_{q_{2i}} - 2\phi_{q_i}) & (2i \leq N) \\ 0 & (2i > N) \end{cases} + \frac{1}{2}Q_0T$$

$$(i = 1, 2, \dots, N)$$

$$df_{i,j+N} = \frac{-6\rho Q_j}{2A^2T} \begin{cases} -\frac{T}{4}Q_{i+j} \sin(\phi_{q_{i+j}} - \phi_{q_i} - \phi_{q_j}) & (i+j \leq N) \\ 0 & (i+j > N) \end{cases} +$$

$$\begin{cases} Q_{i-j} \sin(\phi_{q_{i-j}} - \phi_{q_i} + \phi_{q_j}) & (i > j) \\ -Q_{j-i} \sin(\phi_{q_{j-i}} - \phi_{q_j} + \phi_{q_i}) & (i < j) \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots, N)$$

$$df_{i,i+N} = \frac{-6\rho Q_i}{2A^2T} \begin{cases} -\frac{T}{4}Q_{2i} \sin(\phi_{q_{2i}} - 2\phi_{q_i}) & (2i \leq N) \\ 0 & (2i > N) \end{cases} +$$

$$\lambda \cdot \frac{1}{\omega_i} [\cos \phi_{q_i} - \cos(\omega_i T_s + \phi_{q_i})] \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

$$df_{i+N,j}(i \neq j) = \frac{-6\rho}{2A^2T} \begin{cases} -Q_{i+j} \sin(\phi_{q_{i+j}} - \phi_{q_i} - \phi_{q_j}) & (i+j \leq N) \\ 0 & (i+j > N) \end{cases} +$$

$$\begin{cases} -Q_{i-j} \sin(\phi_{q_{i-j}} - \phi_{q_i} + \phi_{q_j}) & (i > j) \\ Q_{j-i} \sin(\phi_{q_{j-i}} - \phi_{q_j} + \phi_{q_i}) & (i < j) \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots, N)$$

$$df_{i+N,i} = \frac{-6\rho}{2A^2T} \begin{cases} -Q_{2i} \sin(\phi_{q_{2i}} - 2\phi_{q_i}) & (2i \leq N) \\ 0 & (2i > N) \end{cases} +$$

$$\lambda \cdot \frac{1}{\omega_i} [\cos \phi_{q_i} - \cos(\omega_i T_s + \phi_{q_i})] \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

$$df_{i+N,j+N} = \frac{6\rho Q_j}{2A^2T} \begin{cases} -\frac{T}{4}Q_{i+j} \cos(\phi_{q_{i+j}} - \phi_{q_i} - \phi_{q_j}) & (i+j \leq N) \\ 0 & (i+j > N) \end{cases} +$$

$$\begin{cases} \frac{T}{4}Q_{i-j} \cos(\phi_{q_{i-j}} - \phi_{q_i} + \phi_{q_j}) & (i > j) \\ \frac{T}{4}Q_{j-i} \cos(\phi_{q_{j-i}} - \phi_{q_j} + \phi_{q_i}) & (i < j) \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots, N)$$

$$\begin{aligned}
 df_{i+N,i+N} &= \frac{6\rho Q_i}{2A^2T} \begin{cases} -\frac{T}{4}Q_{2i} \cos(\phi_{q_{2i}} - 2\phi_{q_i}) & (2i \leq N) \\ 0 & (2i > N) \end{cases} + \\
 &\quad \frac{1}{2}Q_0T + \lambda \frac{1}{\omega_i} [\cos \phi_{q_i} - \cos(\omega_i T_s + \phi_{q_i})] \quad (i = 1, 2, \dots, N) \\
 df_{i,2N+1} &= \frac{1}{\omega_i} [\sin \phi_{q_i} - \sin(\omega_i T_s + \phi_{q_i})] \quad (i = 1, 2, \dots, N) \\
 df_{i+N,2N+1} &= \frac{Q_i}{\omega_i} [\cos \phi_{q_i} - \cos(\omega_i T_s + \phi_{q_i})] \quad (i = 1, 2, \dots, N) \\
 df_{2N+1,i} &= \frac{1}{\omega_i} [\sin \phi_{q_i} - \sin(\omega_i T_s + \phi_{q_i})] \quad (i = 1, 2, \dots, N) \\
 df_{2N+1,i+N} &= \frac{Q_i}{\omega_i} [\cos \phi_{q_i} - \cos(\omega_i T_s + \phi_{q_i})] \quad (i = 1, 2, \dots, N) \\
 df_{2N+1,2N+1} &= 0
 \end{aligned}$$

用未考虑动能项的解析解^[1]作为初始值代入, 采用如下牛顿公式修正每次的解

$$X = X - D^{-1}F \quad (11)$$

其中 $D_{i,j} = df_{i,j}$, $F = (f_1, \dots, f_{2N+1})^T$.

然后不断回代入方程组, 直到 $\sum_{i=1}^{2N+1} f_i^2 < \epsilon$ (ϵ 为一小量), 则得到方程组的解, 对于收敛速度较差的方程组, 用 (11) 式可能导致无收敛解, 可在方程 (11) 中的修正项加一松弛因子 $0 < \text{rate} < 1$, 得

$$X = X - \text{rate} * D^{-1}F \quad (12)$$

实例计算表明, 应用 (12) 式后, 可减缓收敛速度, 得到稳定解.

2 数值计算

为了验证方法的正确性, 我们用了一组正常的狗的动物实验数据进行了验证计算. 由于主动脉根部属血管入口段. 流速剖面平齐, 因此以下用易于观测到的血液流速代替流量.

图 1 给出了一次实验中实测出的狗的主动脉根部的输入阻抗的模和幅角. 实验中狗的心率为 130 次 / 分, 每搏平均输出量为 $S_V = 14.47 \text{ ml}$.

首先, 我们将实验中测得的流速和压力曲线与不考虑动功率和考虑动功率两种方法计算出来的流速和压力曲线作一比较 (见图 2). 图中给出了实验测得的流速波形及不考虑动功率和考虑动功率两种方法计算出的流速波形, 其中计算时取收缩期与心动周期之比 $T_s/T=0.34$, 主动脉根部的平均管径 $d = 1.5 \text{ cm}$, 血液密度 $\rho=1.0 \text{ kg/m}^3$. 从图中看出, 不考虑和考虑动功率两种方法计算出来的流量曲线几乎一致, 这说明, 实验值和理论计算结果之间的差异受动功率的影响很小, 而应从其它方面找出影响这种差异的因素. 从另一方面, 我们可以认为由于动功率在整个心脏做功过程中贡献不大, 利用最小功原理计算时, 可以忽略它的影响, 这可以由表 1 看出, 动功率仅为势功率的 1% 左右, 在表 1 中还可看出不考虑和考虑动功率两种方法计算所得的动力学参数几乎一样, 没有显著差异.

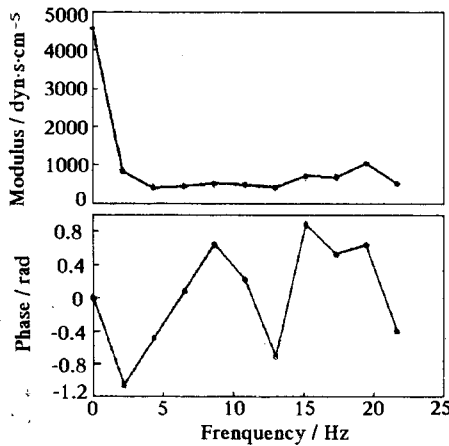


图 1 狗主动脉根部输入阻抗
Fig.1 Input impedance in the root of the aorta in the dog

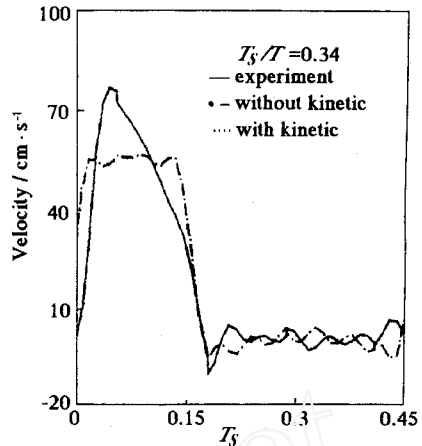


图 2 狗主动脉根部流速波形的实验与计算比较
Fig.2 Comparison between the calculated velocity wave form and the experimental results in the root of the aorta in the dog

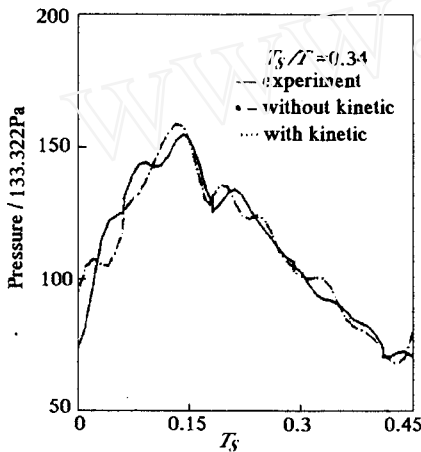


图 3 狗主动脉根部压力波形的实验与计算比较
Fig.3 Comparison between the calculated pressure wave form and the experimental results in the root of the aorta in the dog

图 3 给出了实验测得的压力波形及不考虑动功率和考虑动功率两种方法计算出的压力波形，同流量波形一样。不考虑动功率和考虑动功率两种方法计算出的压力波形几乎完全一致。

其次，依据本文所提的方法，考虑不同动脉血管管径对压力和流量波形的影响。图 4，图 5 给出了不同血管管径下，流量和压力的波形，其中计算时 $T_s/T = 0.34$, $d = 0.75$ cm, 1.5 cm, 2.25 cm, $\rho = 1.0$ kg/m³。从图中我们可以看到，在管径比较小时的流量和压力波形跟管径较大时候的流量和压力波形有差异，这是因为管径在比较小的时候，血液流速增大，从而动功率增大，在心脏做功过程中已不可忽略，这种情况常常对应于许多病理状

态，如主动脉狭窄等疾病。表 2 比较了不同管径下血液的一些动力学参数，在管径较小时，动功率可达到势功率的 10% 以上；而在管径较大的时候，动功率与势功率之比已是小量，势功率在三种不同管径下无多大变化，说明其不受管径影响。

3 结 论

为了对最小功原理加以完善，考虑了以前被忽略的心脏动功率，提出一种基于牛顿法的求解非线性方程组的方法。经验证明，对于正常生理范围的参数值，该方法能使方程组收敛到稳定值，与实验值吻合，并且其收敛速度比一般数值积分上的牛顿法快数十倍。

由于在正常生理状态下，心脏做功过程中，动功率所占比率很小，经计算后发现，考虑动功率后所得到的结果与不考虑动功率计算的结果几乎一致，说明在一般情况下考虑心

表 1 理论计算结果和实验值比较

Table 1 Comparison between theoretical & experimental results

Parameters	Unit	Experiment	Without kinetic	With kinetic
$P_s \times 133.322$	Pa	154.9	158.6	158.6
$P_d \times 133.322$	Pa	71.2	68.7	68.6
$P_m \times 133.322$	Pa	111.8	111.8	111.8
Q_{max}	ml/s	135.4	99.6	99.3
Q_{min}	ml/s	-17.6	-10.2	-10.4
V_{max}	cm/s	76.6	56.3	56.2
V_{min}	cm/s	-10.0	-5.8	-5.9
W_o	mW	91.0	80.7	80.8
W_s	mW	469.0	469.0	469.0
W_t	mW	560.0	549.7	549.7
K_s	mW	0.5	0.5	0.5
K_o	mW	0.6	0.3	0.3
K_t	mW	1.1	0.8	0.8

注： P_s 是收缩压， P_d 是舒张压， P_m 是平均压； Q_{max} 是最大流量， Q_{min} 是最小流量， V_{max} 是最大流速， V_{min} 是最小流速； W_o 、 W_s 和 W_t 分别表示势功率的脉动部分、定常部分及总和； K_o 、 K_s 和 K_t 则表示动功率的脉动部分、定常部分及总和。

表 2 不同管径的计算结果比较

Table 2 Comparison between the results of different diameter

Parameters	Unit	$d = 0.75\text{ cm}$	$d = 1.50\text{ cm}$	$d = 2.25\text{ cm}$
$P_s \times 133.322$	Pa	158.4	158.6	158.6
$P_d \times 133.322$	Pa	67.7	68.6	68.7
$P_m \times 133.322$	Pa	111.8	111.8	111.8
Q_{max}	ml/s	99.9	99.3	99.5
Q_{min}	ml/s	-12.4	-10.4	-10.3
V_{max}	cm/s	226.2	56.2	25.0
V_{min}	cm/s	-28.1	-5.9	-2.6
W_o	mW	81.0	80.8	80.8
W_s	mW	469.0	469.0	469.0
W_t	mW	550.0	549.7	549.7
K_s	mW	8.0	0.5	0.1
K_o	mW	817.6	0.3	-0.1
K_t	mW	825.6	0.8	0.0

注：表中参数意义同表 1。

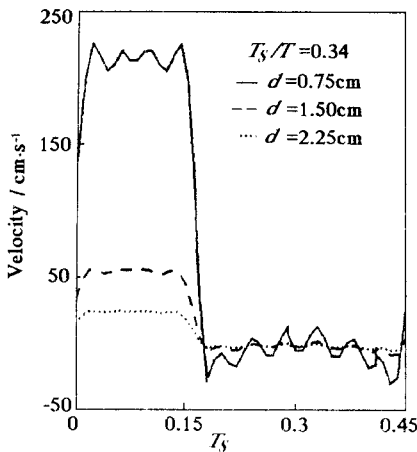


图 4 管径变化对流速波的影响
Fig.4 Effects of the aorta diameter on the velocity wave form

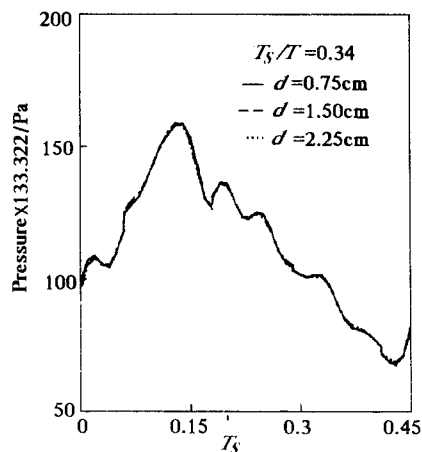


图 5 管径变化对压力波的影响
Fig.5 Effects of the aorta diameter on the pressure wave form

脏做功过程时, 可以忽略动功率影响.

但在某些病理状态下, 动功率在心脏做功过程中所占比例较大, 在分析心脏做功过程中, 不可忽略动功率的影响, 而需要考虑包括动功率在内的心脏的总体对外做的功.

参 考 文 献

- 1 Ding Guanghong (丁光宏), Liu Zhaorong (柳兆荣). Dynamic principle for interaction between heart and arterial system. *Acta Mechanica Sinica*, 1992, 8(3): 237~243
- 2 William R Milnor. Hemodynamics. Baltimore/London: Williams & Wilkins. 1982
- 3 Sanagaw K, Sagawa K, Manghan WL. Ventricular interaction with the vascular system in term of pressure—volume relationship. in: ventricular/vascular coupling. New York, London: Spring-Verlay Press, 1987

DYNAMIC PROCESS OF HEART WORKING ——A PRINCIPLE OF LEAST CARDIAC WORK WITH CARDIAC KINETIC ITEM

Wu Chi Ding Guanghong

(Department of Applied Mechanics, Fudan University, Shanghai 200433, China)

Gao Jian Wang Xiaodong Liu Yuli Zhang Guojun

(Department of Cardiology, 305 Hospital of PLA, Beijing 100017, China)

Abstract The principle of least cardiac work is a valid model which describes the dynamic process when the heart is working. In the previous study^[1], analytic solutions of the cardiac process were obtained, but during heart working, specially on some pathological conditions, the kinetic power takes certain percent of the total power. So, when we analyse the cardiac dynamic process, we should analyse the total cardiac work. When the kinetic power was calculated, the equations are changed from the initial linear equations to the non-linear ones. The questions are more complex, and it can not be solved by the former analytic method. In the present study, on the foundation of the Newton Method, we get a new method that the non-linear equations with the kinetic item can be solved. The example calculation shows that this method convergents fast and the results are accord with the experiment results. Thus, the method perfects the calculation of the principle of least cardiac work; and it makes a theoretical foundation to research the cardiac dynamic process.

Key words least cardiac work, cardiac kinetic power, Newton Method