

# 非等温条件下非比例循环粘塑性本构描述<sup>1)</sup>

杨显杰 高 庆 孙训方  
(西南交通大学工程力学系, 成都 610031)

**摘要** 为了描述在非等温非比例循环加载下的循环变形行为, 本文提出了一个考虑材料非比例循环附加硬化效应、非比例循环加载历史效应和温度历史效应的粘塑性本构模型. 在该模型中, 引入了具有三种不同演化速率的背应力演化方程; 定义了新的非比例度; 为了反映非比例循环历史和温度历史的影响, 引入了表观各向同性变形阻力  $Q_{asm}$ , 并对各向同性的表观变形阻力引入了具有先前加载历史记忆的演化方程. 将本文模型用于 1Cr18Ni9Ti 不锈钢高温循环变形行为描述, 其预言结果与实验结果吻合得很好.

**关键词** 粘塑性, 本构方程, 非比例加载, 温度历史

## 引 言

广泛应用于机械、化工、航空、航天、核电等领域的许多工程结构, 承受着各种形式的循环载荷, 并在各种复杂温度条件下工作. 尽管经典塑性理论在比例单调加载的应用中具有非常大的应用价值, 然而, 对于循环加载、非比例加载历史以及复杂温度历史情形的许多重要应用来讲它还不能令人满意.

金属材料在高温环境下非比例循环本构关系研究是目前本构关系研究的重点和难点之一. 现有不少模型<sup>[1,2]</sup>对恒温下材料的非比例循环附加硬化效应的描述无疑是比较成功的, 另一些模型<sup>[3,4]</sup>对单轴非等温条件下循环本构行为的描述进行了探索. 然而, 这些模型对非等温以及非比例循环加载历史效应不能给予较精确的描述, 本文针对 1Cr18Ni9Ti 不锈钢的高温非比例循环特性<sup>[5]</sup>, 提出了一个多轴粘塑性本构模型, 并将本文模型的预言结果与实验结果进行了比较.

## 1 粘塑性本构模型

粘塑性多轴本构模型的主控方程为

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^I + \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^T \tag{1}$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^e = \frac{1}{2G(T)} \left( \sigma_{ij} - \frac{\nu(T)}{1+\nu(T)} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right), \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^T = \beta(T) \dot{T} \delta_{ij} \tag{2}$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^I = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\langle \frac{F_y}{K(T)} \right\rangle^{n(T)} \frac{S_{ij} - \alpha_{ij}}{\|S_{kl} - \alpha_{kl}\|}, \quad S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \tag{3}$$

$$F_y = \sqrt{1.5(S_{ij} - \alpha_{ij})(S_{ij} - \alpha_{ij}) - Q} \tag{4}$$

<sup>1)</sup> 国家自然科学基金资助项目.

1994-09-10 收到第一稿, 1995-05-08 收到修改稿.

上面诸式中,  $(\dot{\quad})$  代表对时间求导,  $\varepsilon_{ij}$  为总应变,  $\varepsilon_{ij}^I$  为非弹性应变,  $\varepsilon_{ij}^e$  为弹性应变,  $\varepsilon_{ij}^T$  为温度应变,  $K(T)$  为粘性阻力系数,  $S_{ij}$  为偏应力,  $\alpha_{ij}$  为偏背应力,  $G(T)$  为剪切弹性模量,  $\nu(T)$  为弹性泊松比,  $Q$  为材料各向同性变形阻力,  $n(T)$  为材料参数,  $\beta(T)$  为线膨胀系数,  $\langle \quad \rangle$  为 MaCauley 括号.

### 1.1 随动硬化演化律

本文主要描述塑性变形占主导地位的情形, 忽略静力恢复效应, 通过对 Armstrong-Frederick 型的非线性随动硬化律<sup>[6]</sup>进行修正得到背应力演化方程. 材料在变形过程中, 材料硬化的规律受到多种微观机理的控制<sup>[7]</sup>, 短程背应力饱和速率快, 长程背应力饱和速率慢, 注意到 Armstrong-Frederick 演化律<sup>[6]</sup>的背应力沿单轴加载路径循环一周就基本趋于饱和<sup>[8]</sup>, 本文引入如下具有快、中、慢三种不同速率的偏背应力  $\alpha_{1ij}, \alpha_{2ij}, \alpha_{3ij}$  的演化方程

$$\alpha_{ij} = \alpha_{1ij} + \alpha_{2ij} + \alpha_{3ij} \quad (5a)$$

$$\dot{\alpha}_{1ij} = C_1(T) \left( \frac{2}{3} a_1(T) \dot{\varepsilon}_{ij}^I - \Psi(p) \alpha_{1ij} \dot{p} \right) \quad (5b)$$

$$\Psi(p) = \Psi_\infty(T) + [1 - \Psi_\infty(T)] \exp[-b(T)p], \quad \dot{p} = \left( \frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^I \dot{\varepsilon}_{ij}^I \right)^{1/2} \quad (5c)$$

$$\dot{\alpha}_{2ij} = C_2(T) \left( \frac{2}{3} a_2(T) \dot{\varepsilon}_{ij}^I - \alpha_{2ij} \dot{p} \right), \quad \dot{\alpha}_{3ij} = C_3(T) \left( \frac{2}{3} a_3(T) \dot{\varepsilon}_{ij}^I - \alpha_{3ij} \dot{p} \right) \quad (5d)$$

对于循环硬化的金属材料, 要求  $\Psi_\infty < 1$ . 上式中,  $C_1(T), C_2(T), C_3(T)$  是背应力演化系数, 且  $C_1 \gg C_2 \gg C_3$ ,  $b(T)$  为  $\alpha_{1ij}$  的演化方程中  $\Psi(p)$  趋于  $\Psi_\infty(T)$  的速率,  $a_1(T), a_2(T), a_3(T)$  为控制对应的循环饱和时偏背应力  $\alpha_{1ij}, \alpha_{2ij}, \alpha_{3ij}$  大小的量.

### 1.2 非比例度的定义

在对非比例循环变形行为进行本构描述时, 在现有的本构模型中大多引入了非比例度<sup>[1,2]</sup>. 尽管这些非比例度定义对于描述材料的某些加载路径取得了较好的效果, 但仍有某些不足<sup>[9]</sup>. 因此, 本文定义一个新非比例度  $\Phi$  如下

$$\Phi = \frac{\sqrt{\frac{2}{3} \|\varepsilon_{ij}^I - \alpha_{ij}^I\|^2 \|\dot{\varepsilon}_{kl}^I\|^2 - \frac{2}{3} [(\varepsilon_{ij}^I - \alpha_{ij}^I) : \dot{\varepsilon}_{ij}^I]^2}}{q \cdot \|\dot{\varepsilon}_{mn}^I\|} \quad (6)$$

上式中,  $\alpha_{ij}^I$  是非弹性应变幅值记忆面的中心坐标,  $q$  为记忆面半径, 循环饱和时等于当前应变路径的最大非弹性应变幅值. 记忆面模型可参见文献<sup>[5]</sup>.

由式(6)可知, 对于圆形非弹性应变路径:  $\Phi = 1$ , 正方形路径:  $\Phi = \sqrt{2}/2$ , 比例路径:  $\Phi = 0$ . 由此可见, 对于给定的非弹性应变路径, 由该定义得出给定的非比例度, 它与本构模型的形式无关, 由于  $\Phi$  只与非弹性应变路径本身有关, 这为在非比例循环加载下模型参数的识别提供了方便.

### 1.3 非等温条件下非比例循环变形历史效应的 $Q$ 演化方程

材料变形阻力与位错亚结构有密切关系, 而非比例路径和温度对位错亚结构的形成与演化起至关重要的作用<sup>[5]</sup>. 为了考虑材料先前变形历史和温度历史对后继循环变形行为的影响, 引入如下表观各向同性变形阻力

$$Q_{asm} = Qc(\Phi, T) \quad (7a)$$

在上式中,  $c(\Phi, T)$  是一与温度  $T$  和非比例度  $\Phi$  相关的函数, 通过它来反映材料在温度  $T$  时不同非比例度下的位错亚结构特征. 为了考虑在复杂加载路径历史和温度历史下材料循环变形行为对先前历史的衰减记忆, 将材料对先前历史的记忆考虑为对先前最大表观各向同性变形阻力  $Q_{as\max}$  的记忆, 有

$$Q_{sa} = Q_{s1} + \frac{\omega(\Phi, T)}{c(\Phi, T)} (Q_{as\max} - Q_{as1}) \quad (7b)$$

$$Q_{as1} = Q_{s1} c(\Phi, T) \quad (7c)$$

$$Q_{as\max} = \max_{t=0}^{t_a} [Q_{asm}] \quad (7d)$$

$$Q_{s1} = Q_{sn}(\Phi, q, T) \quad (7e)$$

$$\dot{Q} = \gamma(T)(Q_{sa} - Q)\dot{p} + \frac{Q}{Q_{sn}(\Phi, q, T)} \frac{\partial Q_{sn}(\Phi, q, T)}{\partial T} \dot{T} \quad (7f)$$

$Q_{as\max}$  为先前加载历史中从初始时刻  $t=0$  到当前时刻  $t_a$  的最大表观各向同性变形阻力, 而  $Q_{s1}$  为无先前其它路径与温度历史下, 当前循环路径、当前恒温  $T$  下的循环各向同性变形阻力饱和值, 它可表为函数  $Q_{sn}(\Phi, q, T)$ ,  $\omega(\Phi, T)$  为表观各向同性变形阻力衰减记忆参数. 上式中, 正如文 [5] 所示,  $c(\Phi, T)$  和  $\omega(\Phi, T)$  均表为  $\Phi$  的线性插值函数,  $Q_{sn}(\Phi, q, T)$  也可表为  $\Phi$  的线性插值函数. (7f) 式的右端第一项代表  $Q$  随  $\dot{p}$  的非线性变化, 而右端第二项则代表由于温度变化而导致的  $Q$  的变化. 由于  $Q$  随温度变化比较复杂, 很难用实验的方法研究清楚, 因此本文假定各向同性变形阻力  $Q$  随温度的改变与  $\partial Q_{sn}(\Phi, q, T)/\partial T$  密切相关, 在  $\Phi, q$  不变时, 当  $Q = Q_{sn}(\Phi, q, T)$ ,  $Q$  随温度的变化可看作与  $\partial Q_{sn}(\Phi, q, T)/\partial T$  等价; 当  $Q \neq Q_{sn}$ ,  $Q$  随温度的变化还与  $Q/Q_{sn}$  成正比, 因此, 可表为式 (7f) 右端第二项.

由上式可知: 在温度  $T$  不太高时, 先前加载和温度历史的最大表观各向同性变形阻力  $Q_{as\max}$  小于无先前历史的当前循环加载条件下的循环饱和表观各向同性变形阻力  $Q_{as1}$  时, 有  $Q_{sa} = Q_{s1}$ , 这表现为先前加载历史对后继循环饱和行为没有影响; 反之, 若  $Q_{as\max}$  大于  $Q_{as1}$ , 由  $\omega(\Phi, T) > 0$ , 有  $Q_{sa} > Q_{s1}$ , 即具有先前较大  $Q_{as\max}$  的历史的当前循环加载条件下的循环饱和各向同性变形阻力大于无先前历史的当前路径的循环饱和和各向同性变形阻力, 这就反映了材料循环硬化对先前最大表观各向同性变形阻力的非完全衰减记忆. 在温度足够高时,  $\omega(\Phi, T) \rightarrow 0$ , 此时, 本构模型描述了在高于某一温度下, 无论先前加载历史如何, 先前历史对后继循环饱和行为不产生影响这一行为.

## 2 模型参数的确定

现对本文模型中的主要材料参数的确定进行讨论:

式 (3) 中的材料常数  $n(T)$  和  $K(T)$ , 可以采用在恒定温度  $T$  及几个给定非弹性应变率下的单轴拉伸曲线来确定. 公式 (5) 中的各模型参数可以通过恒定温度  $T$  下单轴拉伸以及单轴循环实验来确定, 对于单轴拉伸应变大于 1.5% 的实验点来说, 公式 (5) 中的轴向偏背应力分量  $\alpha_{1x}, \alpha_{2x}$  趋于饱和, 此时, 材料拉伸变形行为又近似为线性硬化, 通过曲线拟合可求出  $a_3(T), C_3(T)$ . 在求出  $a_3(T), C_3(T)$  之后, 利用非弹性应变幅值适中的循环饱和滞后圈图, 取  $\epsilon^I > 0$  之实验数据  $(\epsilon_i^I, \sigma_i)$ , 在单轴循环饱和情形,  $Q$  为常量, 考虑到循环饱和应力沿拉伸和压缩方向的对称性, 此时, 流动应力表达式可显式表示, 通过曲线拟合可确

定  $a_2(T), C_2(T)$ . 利用滞后圈从弹性向非弹性加载的过渡区的循环饱和实验数据, 并考虑循环初始两周的若干数据点, 可确定出  $\Psi_\infty(T), b(T), a_1(T)$  和  $C_1(T)$ .

材料在给定非弹性应变幅值  $q$ , 给定恒温  $T$  下单轴循环饱和时, 滞后圈的非弹性加载区域上各点满足下式

$$\sigma = Q_{sn}(0, q, T) + K(T)\bar{p}^{\frac{1}{n(T)}} + \sum_{i=1}^3 a_i(T) \frac{\{1 - \exp[-C_i(T)\varepsilon^I]\}}{\cos\left[C_i(T)\frac{\Delta p}{2}\right]} \quad (8)$$

由此可求出  $Q_{sn}(0, q, T)$ .

由 (6) 式可知, 圆形非弹性应变路径的非比例度为 1,  $Q_{sn}(1, q, T)$  可以通过在某恒温下等效非弹性应变幅值为  $q$  的圆形路径来确定. 考虑到循环饱和时圆形非弹性应变路径的响应特性, 可以假定: 循环饱和时  $\alpha_{1ij}, \alpha_{2ij}, \alpha_{3ij}$  的模保持不变; 且它们与非弹性应变率  $\varepsilon_{ij}^I$  之间的夹角  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  为定值; 循环饱和等效应力幅值  $\Delta\sigma/2$  为常值; 非弹性应变率方向与应力空间中偏应力的方向夹角为  $\psi_0$ , 通过上述假定, 可以推导出下式<sup>[5]</sup>

$$\left(\frac{\Delta\sigma}{2}\right)^2 = \left[ \sum_{i=1}^3 \frac{\frac{C_i(T)\Delta p}{2} a_i(T)}{1 + \left(\frac{C_i(T)\Delta p}{2}\right)^2} \right]^2 + \left[ Q_{sn}(1, q, T) + K(T)\bar{p}^{\frac{1}{n(T)}} + \sum_{i=1}^3 \frac{\left(\frac{C_i(T)\Delta p}{2}\right)^2 a_i}{1 + \left(\frac{C_i(T)\Delta p}{2}\right)^2} \right]^2 \quad (9)$$

由上式可求出  $Q_{sn}(1, q, T)$ .

在恒定温度  $T$  下, 材料通过单轴和圆形非弹性应变路径的应变幅值的低→高→低变化, 可以分别确定出  $\omega(0, T)$  和  $\omega(1, T)$ <sup>[5]</sup>.

在给定非弹性应变幅值的单轴循环下, 首先在室温 ( $T_R$ ) 下循环饱和, 然后将温度升到  $T$  下进行循环直到饱和, 再将温度下降到室温循环直到饱和, 在假定  $c(0, T_R) = 1$  的情况下可以确定  $c(0, T)$ , 而在恒温  $T$  下当圆形路径下循环饱和之后再拉压循环直到饱和, 就可确定出  $c(1, T)$ <sup>[5]</sup>.

### 3 高温粘塑性本构模型的预言能力

#### 3.1 单轴循环的温度历史效应

对于材料循环变形的温度历史效应, 很重要的一个方面就是单轴循环的温度历史效应. 为了检验本文所提出的模型是否能较好地描述这种温度历史效应. 对如下情形进行本构模型的理论预测. 等效应变幅值为 0.60%, 应变率为  $3 \times 10^{-3}/s$ , 温度历史为如下两种情形: a. 室温 ( $T_R$ ) → 650°C → 室温 ( $T_R$ ), b. 650°C → 700°C → 650°C.

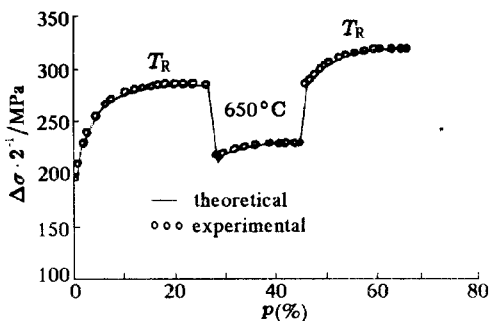


图 1 情形 a 之单轴温度历史效应  
Fig.1 Uniaxial temperature history effect under case a

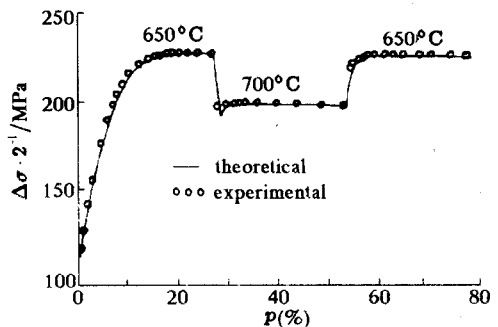


图 2 情形 b 之单轴温度历史效应  
Fig.2 Uniaxial temperature history effect under case b

上述两种情形下循环应力幅值  $\Delta\sigma/2$ - 累积非弹性应变  $p$  关系的本构理论预测与实验结果的比较如图 1, 图 2 所示, 理论预测与实验结果吻合较好. 由此可见, 本模型能较好地描述该材料的单轴循环的温度历史效应.

### 3.2 圆形应变路径下的温度历史效应

实验得知：在圆形应变路径下 1Cr18Ni9Ti 不锈钢的循环饱和行为与温度历史无关. 为了检验本文模型对此实验现象的预言能力, 进行了如下加载历史的理论预测, 其加载历史为：应变幅值 0.60%, 应变率  $4 \times 10^{-4}/s$ , 温度历史分别是：a.  $200^{\circ}C \rightarrow 700^{\circ}C \rightarrow 200^{\circ}C$ , b.  $400^{\circ}C \rightarrow 700^{\circ}C \rightarrow 400^{\circ}C$ . 上述两种温度历史下  $\bar{\sigma}$ - $p$  关系的本构模型预言结果与实验结果的比较如图 3, 图 4 所示,  $\bar{\sigma}$  为 Von Mises 型循环等效应力. 其理论预测与实验结果吻合很好, 较好地描述了在圆形路径下该材料的循环饱和特性与温度历史无关这一实验事实.

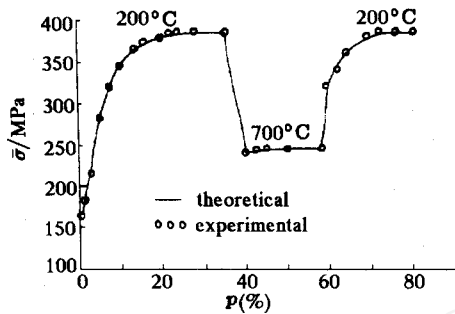


图 3 情形 a 之圆形路径温度历史效应  
Fig.3 Temperature history effect for circular strain path under case a

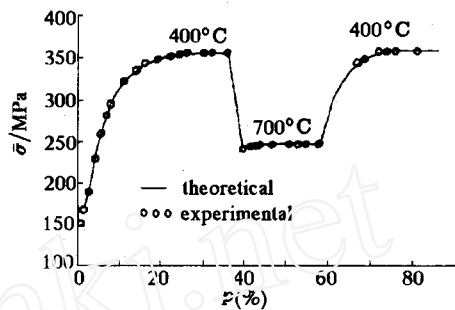


图 4 情形 b 之圆形路径温度历史效应  
Fig.4 Temperature history effect for circular strain path under case b

### 3.3 恒温下非比例循环加载历史效应

在室温、 $700^{\circ}C$  恒温下, 最大等效应变幅值为 0.60%, 等效应变率为  $4 \times 10^{-4}/s$ , 其非比例循环应变路径历史为：①轴向拉压  $\rightarrow$  ②椭圆 ( $\Delta\gamma_{xy}/\Delta\varepsilon_x = 0.866$ )  $\rightarrow$  ③圆形 ( $\Delta\gamma_{xy}/\Delta\varepsilon_x = 1.7321$ )  $\rightarrow$  ④椭圆  $\rightarrow$  ⑤轴向拉压. 对上述两种加载历史进行的  $\bar{\sigma}_{max}$ - $p$  关系的理论预测与实验结果的比较如图 5, 图 6,  $\bar{\sigma}_{max}$  为循环每一周内的 Von Mises 型最大循环等效应力. 从图中可看出, 理论预测与实验结果很吻合. 本文模型很好地描述了材料在室温下先前非比例循环加载历史对后继行为有显著影响以及  $700^{\circ}C$  下无非比例循环加载历史效应这一变形行为.

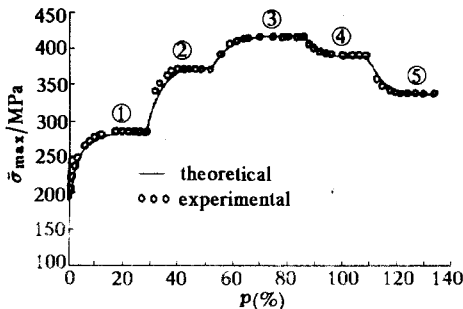


图 5 室温下的非比例循环历史效应  
Fig.5 The effect of nonproportional cycling history at room temperature

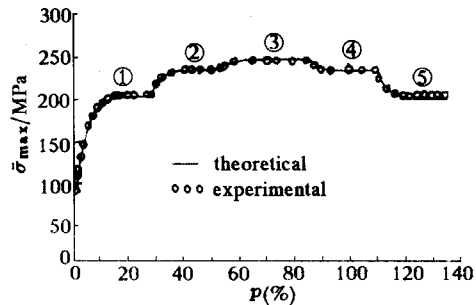


图 6  $700^{\circ}C$  下的非比例循环历史效应  
Fig.6 The effect of nonproportional cycling history at  $700^{\circ}C$

## 4 结 论

本文所建立的粘塑性本构模型充分地考虑了金属材料在非等温高温环境下非比例循

环加载及其加载历史的循环特性. 在模型中, 引入了 3 个演化速率不同的背应力演化方程; 定义了新的非比例度, 该非比例度的定义具有较强的物理依据, 可以较好地反映变形路径的非比例附加硬化的定量特征; 提出了考虑非等温条件下非比例循环加载历史衰减记忆的表现各向同性阻力  $Q_{asm}$  的演化方程, 通过表现最大各向同性变形阻力的变形历史记忆来实现对非比例循环加载历史的本构描述. 模型预测与实验结果的比较表明: 本文模型很好地描述了材料的非比例循环加载历史和温度历史下材料的变形行为.

### 参 考 文 献

- 1 Benallal A, Marquis D. Constitutive equations for nonproportional cyclic elasto-viscoplasticity. *ASME J Eng Mat Tech*, 1987, 109: 326~336
- 2 Nouailhas D, Chaboche JL, Savalle S, Cailletaud G. On the constitutive equations for cyclic plasticity under nonproportional loading. *Int J Plast*, 1985, 1: 317~330
- 3 Ohno N, Takahashi Y, Kuwabara K. Constitutive modeling of anisothermal cyclic plasticity of 304 stainless steel. *ASME J Eng Mat Tech*, 1989, 111: 106~114
- 4 高桥由纪夫. SUS304 钢に対する温度依存繰返し塑性構成式モデルの開発. 日本机械学会论文集 (A 编), 1990, 56 卷 527 号: 126~132
- 5 杨显杰. 金属材料循环塑性和循环粘塑性本构关系研究. 西南交通大学博士论文, 1992 年 11 月
- 6 Armstrong PJ, Frederick CO. A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effects. CEGB Report RD/B/N731, Central Electricity Generating Board, 1966
- 7 Mughrabi H. Description of the dislocation structure after unidirectional deformation at low temperatures. In: *Constitutive Equations in Plasticity*. A. Argon, Ed, MIT Press, Cambridge, Mass, 1975. 199~250
- 8 杨显杰, 高庆, 孙训方. 一个考虑循环应变幅值历史效应的粘塑性本构模型. *应用力学学报*, 1995, 12(1): 40~45
- 9 Ohno N. Recent topics in constitutive modeling of cyclic plasticity and viscoplasticity. *ASME Appl Mech Rev*, 1990, 43(11): 283~295

## CONSTITUTIVE MODELING OF ANISOTHERMAL NONPROPORTIONAL CYCLIC VISCOPLASTICITY

Yang Xianjie Gao Qing Sun Xunfang

(Department of Engineering Mechanics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

**Abstract** In order to describe the nonproportional cyclic deformation behavior at anisothermal condition, a viscoplastic constitutive model is introduced, which considers nonproportional cyclic additional hardening, the effects of nonproportional cyclic loading history and temperature history. In the model, the evolution equations of back stresses with three different evolving rates are proposed; a new nonproportionality is defined. To consider the influence of nonproportional cyclic loading history and temperature history, the apparent isotropic deformation resistance parameter  $Q_{asm}$  is given, and the evolution equations, with the memory on the previous loading history, of the apparent isotropic deformation resistance are proposed. The present model is applied to the description of complex cyclic deformation behavior of 1Cr18Ni9Ti stainless steel, and its predications are in good agreement with the experimental results.

**Key words** viscoplasticity, constitutive equations, nonproportional loading, temperature history