非线性模态的分类和新的求解方法[1)]

吴志强　　陈予恕　　毕勤胜
(天津大学力学与工程测试系, 天津 300072)

摘要　引入不可分偶数维不变流形的概念来定义非线性模态. 在此基础上, 揭示出了一种新的模态——耦合非线性模态, 并对实际系统中各种可能的模态进行了分类. 这种分类可能是新的构筑非线性模态理论的框架. 用此方法构造非线性模态, 得到的模态振子具有范式的形式, 形式最简、却能反映原系统在平衡点附近的主要动力学行为, 且易于得到非线性频率及非线性稳定性等方面的信息. 不仅适用于分析一般的多自由度系统, 还可用于分析奇数维系统; 不仅可构造内共振系统的非耦合模态, 还可用于构造内共振耦合模态. 从掌握的资料看, 以前的方法还不能解决上述所有问题.

关键词　非线性模态, 不变流形, 范式

引　言

关于非线性模态研究的发展, 文献[1]作了较完整的综述, 在一系列相关的研究中, Rosenberg[2]及 Shaw 和 Pierre[3,4]的工作有着开创性的意义. Rosenberg 于60年代初, 首先提出了非线性模态的概念, 为该领域随后30年的研究奠定了基础. 最近, Shaw 和 Pierre 引入动力系统理论中二维不变流形的概念来定义非线性模态, 拓宽了研究领域. 他们的方法除象 Rosenberg 的方法那样可分析多自由度保守系统外, 还可分析非保守系统及陀螺系统.

近30年来, 在非线性模态理论的研究方面, 人们已经做了大量的工作, 取得了不少进展. 尽管如此, 仍存在不少亟待解决的问题.

首先, 非线性模态理论还缺少统一的框架. 即使是对非线性模态这一最基本的概念, 也还缺少统一的认识. 为此, 本文引入动力系统中不变流形的概念来定义非线性模态, 进而对实际系统中可能存在的非线性模态进行了分类, 形成了构筑非线性模态理论的框架. 文中给出的例子说明了本文定义及分类的合理性.

对于内共振系统的非线性模态, 以前还没有一种方法能进行有效的求解. 用本文的方法, 不仅可以构造这类系统的非耦合模态, 还可以构造内共振模态.

另外, 用以前的方法构造非线性模态, 得到的模态振子不能明显地反映原系统的非线性特征. 而用本文方法构造的非线性模态, 得到的模态振子形式最简、具有范式的形式, 易于得到系统的非线性频率及非线性稳定性等方面的信息, 而且能够反映原系统的主要动力学行为[5].

1) 国家自然科学基金和教委博士点基金资助项目.
1995-03-27收到第一稿, 1995-11-04收到修改稿

1　非线性模态的定义及分类

考虑一般的高维弱非线性自治系统

$$\mathring{x} = Ax + F(x) \tag{1}$$

其中 $x \in R^n$, $F: R^n \to R^n$. 假定 A 有 N 对纯虚根, 在 A 的 Jordan 标准形矩阵中其对应的子矩阵为对角阵, 而其余特征根实部均不为0, 在变换

$$x = T_u u + H(u) \tag{2}$$

作用下(其中 T_u 是由纯虚特征根对应的特征向量组成的 $n \times 2N$ 复矩阵, $H(u)$ 是 u 的非线性函数向量), 系统(1)可简化为范式形式

$$\mathring{u} = J_u + C(u) \tag{3}$$

其中

$$u = (u_1, u_2, u_3, \cdots, u_N, u_{N+1}, \cdots, u_{2N}), \qquad u_j = \overline{u_{j+N}}\ (j = 1, 2, \cdots, N)$$

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{2N}), \qquad \lambda_j = \overline{\lambda}_{j+N}\ (j = 1, 2, \cdots, N)$$

对于某个变量 u_s 来说, 其非线性项 $C_s(u)$ 是由非线性项 u^m 组成的, 指数向量 m 满足

$$\langle m, \lambda \rangle - \lambda_s = 0$$

这些 Poincaré共振项可分为三类: 非耦合共振项(自共振项)、耦合共振项、内共振项

若将向量 m 的前半部分、后半部分分别记为 $\hat{m}$ $\hat{\hat{m}}$, 则有的 Poincaré共振项满足 $|\hat{m} - \hat{\hat{m}}| = 1$, 特点是, 这些项成为共振项并不要求特征值 λ 之间有任何特殊关系, 而其它共振项满足 $|\hat{m} - \hat{\hat{m}}| \neq 1$, 这些项之所以成为共振项, 是因为若干个特征值间存在特殊关系 前者, 若仅含有 u_s, $\overline{u_s}$, 则称为非耦合共振项(或自共振项), 如 $(u_s\overline{u_s})^3 u_s$, 若除 u_s, $\overline{u_s}$ 外还含有其它变量或它们的共轭, 则称为耦合共振项, 如 $(u_1\overline{u_1})u_s$, $s \neq 1$; 而后者, 则称为内共振项, 如: 当 $\lambda_1 = 2\lambda_s$ 时, 非线性项 $u_1\overline{u_s}$

系统(3)有可能是由若干个相互独立的单元组成的, 这些单元内部变量的运动方程间是相互耦合的, 而与其它任何单元的变量的运动方程是不耦合的 根据所含非线性项种类的不同, 这种单元可分为非耦合单元、耦合单元、内共振单元

1) 非耦合单元 M_I

$$\left.\begin{aligned} \mathring{u}_s &= i\omega u_s + u_s \sum_{j=1}^{\infty} C_j (u_s \overline{u_s}) \\ u_s &\in M_I = \{u_s\} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

方程中只有非耦合共振项(自共振项).

2) 耦合单元 M_{II}

$$\left.\begin{aligned} \mathring{u}_s &= i\omega_s u_s + G_s(M_{II}, \overline{M}_{II}) \\ u_s &\in M_{II} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

M_{II}中的元素, 或其共轭至少(5) 的耦合项中出现一次

3) 内共振单元M_{III}

$$\left.\begin{aligned} \mathring{u}_s &= i\omega_s + G_s(M_{III}, \overline{M}_{III}) \\ u_s &\in M_{III} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

G_s 中的耦合项使上述方程间是耦合的, 另外所有 G_s 中至少有一个内共振项

下面定义的非线性正交模态是非线性方程(1) 的不可分偶数维不变子空间 所谓“不可分”, 指的是该子空间不能表示成若干个较低维不变子空间的直和 另外, 该子空间一般不是平面流形, 且在平衡点处与相应的线性特征空间相切

定义 非线性自治系统(1) 的非线性模态为发生在系统相空间不可分偶数维(2i) 不变流形上的运动 该流形具有如下的性质: 通过系统稳定的平衡点, 并在该点处与相应的线性特征空间相切

系统(3) 中所含的各类单元的数目不只一个, 也可能只有其中的某类单元 但不论是同类单元间, 还是不同类单元间都是解耦的, 因而某个单元上的运动不可能引起其它单元上的运动, 该单元上所有可能的运动就构成了一个不变流形, 即存在不同的不变流形与组成系统的各个单元分别对应 在本文的定义下, 这些不变流形即为非线性模态, 相应的单元即为模态振子.

根据模态上的动力学方程(模态振子) 的类型, 非线性模态可分为三类, 分别与上述三类单元对应:

1) 非耦合模态M_{I}($i = 1$),

2) 耦合模态M_{II}($i \geq 2$),

3) 内共振模态M_{III}($i \geq 2$).

实际上内共振模态也是一种耦合模态, 为简单起见, 称非内共振耦合模态为耦合模态, 称内共振耦合模态为内共振模态

2 非线性模态的求解方法

由模态定义知, 当 $u_j \notin u_M$ 时, $u_j = 0$, 此处 u_M 含义为:

1) 非耦合模态, $u_M = \{M_{\mathrm{I}}, \overline{M}_{\mathrm{I}}\}$,

2) 耦合模态, $u_M = \{M_{\mathrm{II}}, \overline{M}_{\mathrm{II}}\}$,

3) 内共振模态, $u_M = \{M_{\mathrm{III}}, \overline{M}_{\mathrm{III}}\}$.

因为变换(2) 可写为

$$x = T_M u_M + H(u_m) \tag{7}$$

此即所求非线性模态 T_M 为 $n\times 2i$ 矩阵, 非线性项$H(u_M)$满足

$$DH \cdot J_M u_M - AH = f(T_M u_M + H(u_M)) - DH \cdot C_M - T_M C_M \tag{8}$$

其中J_M 为由所求非线性模态涉及到的特征值组成的Jordan 标准形$2i\times 2i$ 矩阵, 而C_M 所求模态对应的共振多项式向量 相应的模态振子为

$$\mathring{u}_M = J_M u_M + C_M(u_M) \tag{9}$$

一般地, 只能求得非线性模态级数形式的近似表达 在具体求解过程中, 若式(8) 左端是非奇异

的, 则 C_M 中相应项的系数为0; 若是奇异的(秩为 r), 则 C_M 中相应项的系数一般不为0, 以 C_M 中相应的 r 个元素, 再适当选取 H 中 $N-r$ 个元素, 作为未知量, 使得式(8)是可解的 当系统(1)是多自由度系统时, 式(8)还可以简化, 限于篇幅, 这里不再给出

3　本文方法的应用

下面通过几个例子说明本文方法的特点及贡献:

例1　双质量弹簧系统的非线性模态(文献[3], 例2, 101页)

$$\left.\begin{array}{ll} \dot{x}_1 = y_1, & \dot{y}_1 = -(1+k)x_1 + kx_2 - gx_1^3 \\ \dot{x}_2 = y_2, & \dot{y}_2 = kx_1 - (1+k)x_2 \end{array}\right\} \tag{10}$$

若令 $x=(x_1, x_2, y_1, y_2)^T$, 则由(1)知

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} -(1+k) & k \\ k & -(1+k) \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

设系统的非耦合模态为

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x}_j = 2Re[A_{0j0}z + A_{0j1}z^2 + A_{0j3}z^3 + A_{0j4}z^2\bar{z}] + A_{0j2}z\bar{z} \\ \dot{y}_j = 2Re[B_{0j0}z + B_{0j1}z^2 + B_{0j3}z^3 + B_{0j4}z^2\bar{z}] + B_{0j2}z\bar{z} \end{array}\right\} \quad (j=1, 2) \tag{11}$$

相应的模态振子为

$$\dot{z} = \lambda z + C_1 z^2\bar{z} + C_2 z^3\bar{z}^2 + \cdots \tag{12}$$

根据上节内容, 不难导得模态系数及振子中线性及非线性项系数满足的方程:

(z):

$$\left.\begin{array}{l} A_{0j0}\lambda^2 = \sum_{s=1}^{2}(\alpha_{js}A_{0s0} + \lambda\beta_{js}A_{0s0}) \\ \lambda A_{0j0} = B_{0j0} \end{array}\right\} \quad (j=1, 2) \tag{13}$$

(z^3):

$$\left.\begin{array}{l} \begin{pmatrix} A_{013} \\ A_{023} \end{pmatrix} = [q\lambda^2 I - \alpha]^{-1}\begin{pmatrix} f_{013} \\ f_{023} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} B_{013} \\ B_{023} \end{pmatrix} = 3\lambda\begin{pmatrix} A_{013} \\ A_{023} \end{pmatrix} \end{array}\right\} \tag{14}$$

$(z^2\bar{z})$: 选取 $A_{014}=0$, 则

$$\left.\begin{aligned}\begin{pmatrix}C_1\\A_{024}\end{pmatrix}&=\begin{bmatrix}(3\lambda+\bar{\lambda})A_{010} & -k\\(3\lambda+\bar{\lambda})A_{020} & (1+k)+(2\lambda+\bar{\lambda})^2\end{bmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}f_{014}\\f_{024}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}B_{014}\\B_{024}\end{pmatrix}&=(2\lambda+\bar{\lambda})\begin{pmatrix}A_{014}\\A_{024}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}A_{010}\\A_{020}\end{pmatrix}C_1\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

根据式(13)～(15), 逐式求解, 可得两个非线性模态如下:

模态1 $(\lambda=i)$

$$x_1=2x+\frac{8-k}{32-8k}gx(x^2-3y^2)$$

$$y_1=-2y-\frac{3}{2}gy(x^2+y^2)+\frac{24-3k}{32-8k}gy(y^2-3x^2)$$

$$x_2=2x+\frac{3g}{k}k(x^2-y^2)-\frac{gk}{32-8k}x(x^2-3y^2)$$

$$y_2=-2y-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{k}\right)3gy(x^2+y^2)-\frac{3gk}{32-8k}y(y^2-3x^2)$$

振幅比为

$$\left.\frac{x_2}{x_1}\right|_{y=0}=1+\frac{12gx^2}{k(8+gx^2)}-\frac{64gx^2+20g^2x^4}{(8+gx^2)[64+8gx^2-k(16+gx^2)]}$$

相应的模态振子为

$$\mathring{z}=iz+i\frac{3g}{4}z^2\bar{z}$$

其非线性频率为 $1+\frac{3}{4}gr^2(r=|z|)$.

模态2 $(\lambda=i\sqrt{1+2k})$

$$x_1=2x+\frac{(8-17k)gx(x^2-3y^2)}{32+136k+144k^2}$$

$$y_1=-2\sqrt{1+2k}y-\frac{3gy(x^2+y^2)}{2\sqrt{1+2k}}+\frac{\sqrt{1+2k}gy(24+51k)}{32+136k+144k^2}(y^2-3x^2)$$

$$x_2=-2x+\frac{3g}{k}x(x^2+y^2)-\frac{gkx}{32+136k+144k^2}(x^2-3y^2)$$

$$y_2=2\sqrt{1+2k}y+\left(\frac{1}{2\sqrt{1+2k}}-\frac{\sqrt{1+2k}}{k}\right)3gy(x^2+y^2)-\frac{3gk\sqrt{1+2k}}{32+136k+144k^2}y(y^2-3x^2)$$

振幅比 $(y=0$时$)$ 为

$$\frac{x_2}{x_1}=-1+\frac{12gx^2}{k(8+gx^2)}+\frac{\dfrac{64gx^2+212g^2x^4}{8+gx^2}+\dfrac{k(128gx^2+448g^2x^4)}{8+gx^2}}{64+288k^2+8gx^2+k(272+17gx^2)}$$

模态振子为

$$\mathring{z} = i\sqrt{1+2k}\,z + i\frac{3g}{4\sqrt{1+2k}}z^2\bar{z}$$

其非线性频率为

$$\omega = \sqrt{1+2k}\left(1+\frac{3g r^2}{4\sqrt{1+2k}}\right)$$

下面将所得结果与 Shaw 的结论作比较:

1) 两种方法得到的模态振子的非线性频率是相同的

2) 模态2的振幅比与 Shaw 的结论定性相同, 而模态1的振幅比难与 Shaw 的结论比较

3) 本文得到的模态振子具有范式形式, 能够反映原系统主要的局部和全局动力学行为, 从模态振子表达式不加计算即可获知模态的非线性频率、非线性稳定性等信息, 即本文得到的模态振子简洁地反映了系统的主要非线性特征

4) 对多自由度系统的非耦合模态来说, 本文方法与文献[3]的方法同样有效 但本文方法还可用于求解内共振系统的非耦合模态(见例2). 另外, 本文的方法还可分析奇数维系统(例4).

例2　内共振系统的非线性模态

当 k 接近4时, 系统(10) 两特征值之比$1/\sqrt{1+2k}$接近$1/3$, 为内共振系统:

$$\left.\begin{aligned} &\mathring{x}_1 = y_1, \qquad \mathring{y}_1 = -(1+k)x_1 + kx_2 - gx_1^3 \\ &\mathring{x}_2 = y_2, \qquad \mathring{y}_2 = kx_1 - (1+k)x_2 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

设系统非线性模态为

$$\left.\begin{aligned} x &= \sum_{l_1+l_2+l_3+l_4\geq 1} A_{l_1l_2l_3l_4}Z_1^{l_1}Z_2^{l_2}Z_3^{l_3}Z_4^{l_4} \\ y &= \sum_{l_1+l_2+l_3+l_4\geq 1} B_{l_1l_2l_3l_4}Z_1^{l_1}Z_2^{l_2}Z_3^{l_3}Z_4^{l_4} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

其中 $x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}, y = (y_1, y_2)^{\mathrm{T}}$

$$A_{l_1l_2l_3l_4} = \overline{A}_{l_1l_2l_3l_4} = (A^{(1)}_{l_1l_2l_3l_4}A^{(2)}_{l_1l_2l_3l_4})^{\mathrm{T}}$$

$$B_{l_1l_2l_3l_4} = \overline{B}_{l_1l_2l_3l_4} = (B^{(1)}_{l_1l_2l_3l_4}B^{(2)}_{l_1l_2l_3l_4})^{\mathrm{T}}$$

相应模态振子为

$$\mathring{z} = Jz + \sum_{l_1+l_2+l_3+l_4\geq 2} C_{l_1l_2l_3l_4}Z_1^{l_1}Z_2^{l_2}Z_3^{l_3}Z_4^{l_4} \tag{18}$$

其中 $z = (z_1\bar{z}_1z_2\bar{z}_2)^{\mathrm{T}}$

$$J = \mathrm{diag}(i\ -i\ \sqrt{1+2k}\,i\ -\sqrt{1+2k}\,i)$$

$$C_{l_1l_2l_3l_4} = (C^{(1)}_{l_1l_2l_3l_4}, C^{(2)}_{l_1l_2l_3l_4}, C^{(3)}_{l_1l_2l_3l_4}, C^{(4)}_{l_1l_2l_3l_4})^{\mathrm{T}}$$

根据例1计算, 可知

$$\begin{pmatrix} A_{1000} \\ B_{1000} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \\ i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_{0020} \\ B_{0020} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ i\omega_2 \\ -i\omega_2 \end{pmatrix}$$

其中 $\omega_2 = \sqrt{1+2k}$. 下面求模态表达式的非线性部分, 为此将原系统的非线性项展开(略去四阶以上的非线性项), 得

$$x_1^2 = z_1^3 + z_2^3 + 3z_1^2\bar{z}_1 + 3z_2^2\bar{z}_2 + 3z_1^2 z_2 + 3\bar{z}_1^2 z_2 + 6z_1\bar{z}_1 z_2 + 6z_1 z_2\bar{z}_2 + 3z_1\bar{z}_2^2 + 3z_2 z_2^2 + C.C.$$

式中 $C.C.$ 表示前面所有项的复共轭

(z_1^3): $\det(3iI - A) = 0$ (I 为单位阵)

因而 z_1^3 是共振项, 今取 $A_{3000}^{(1)} = 0$, 以特征值 $i\sqrt{1+2k}$ 对应的特征向量代替 $(3iI - A)$ 的第一列, 得到关于 $C_{3000}^{(3)}, A_{3000}^{(2)}, B_{3000}^{(1)}, B_{3000}^{(2)}$ 的方程

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3i & 0 & -1 \\ i\omega_2 & -k & 3i & 0 \\ i\omega_2 & 1+k & 0 & 3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{3000}^{(3)} \\ A_{3000}^{(2)} \\ B_{3000}^{(1)} \\ B_{3000}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix}$$

解之得

$$C_{3000}^{(3)} = \frac{g(8-k)}{8(3+\omega_2)} i$$

$$A_{3000} = \begin{pmatrix} 0 \\ g/8 \end{pmatrix}, \quad B_{3000} = \frac{gi}{8(3+\omega_2)} \begin{pmatrix} 8-k \\ 1+k+3\omega_2 \end{pmatrix}$$

同样可求得模态表达式及模态振子中的其它非线性项的系数 代回式(17), 整理得内共振模态的实表达式(此处从略). 代入式(18), 得模态振子为

$$\left.\begin{aligned} \mathring{z}_1 &= iz_1 + i\frac{3g}{4}z_1^2\bar{z}_1 - i\frac{3g(4+k-4\omega_2)}{8(1+k+\omega_2)}\bar{z}_1^2 z_2 + i\frac{3g}{2}z_1\bar{z}_2 z_2 \\ \mathring{z}_2 &= i\omega_2 z_2 + i\frac{g(8-k)}{8(3+\omega_2)}z_1^3 + i\frac{3g}{4\omega_2}z_2^2\bar{z}_2 + i\frac{3g}{2\omega_2}z_1\bar{z}_1 z_2 \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

从上面的计算可以看出, 本文方法可以有效求解内共振系统的内共振模态 另外, 我们还发现内共振系统中存在非耦合模态

在式(17)及(19)中, 令 $z_1 = 0$, 即可得上例中的模态2及其振子. 但令 $z_2 = 0$, 却得不到第一阶模态, 表明内共振系统中不存在该非线性非耦合模态

本文求非耦合模态的方法, 可以求出内共振系统中的非耦合模态 当用来求解模态振子中

非耦合共振项以外的项的系数的方程奇异时(如例1中模态1的 z^3项的系数方程(14)), 表示系统中有内共振产生, 正在求解的模态无效(例1中的模态1), 不存在于内共振系统中.

例3 耦合非线性模态

考虑如下系统

$$\left.\begin{aligned}\mathring{x}_1 &= y_1, & \mathring{y}_1 &= -(1+k)x_1 + kx_2\\ \mathring{x}_2 &= y_2, & \mathring{y}_2 &= kx_1 - (1+k)x_2 - g(x_1^2+y_1^2)y_2\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

利用文献[3]中给出的方法求解其非线性模态, 不难得到它的两个模态振子(求解过程从略).

模态1

$$\left.\begin{aligned}\mathring{u} &= v\\ \mathring{v} &= -u + \frac{k}{k-1}(u^2+v^2)\end{aligned}\right\}$$

模态2

$$\left.\begin{aligned}\mathring{u} &= v\\ \mathring{v} &= -(1+2k)u + a_7u^2v + a_gv^3\end{aligned}\right\}$$

其中

$$\begin{pmatrix}a_7\\ a_g\end{pmatrix} = \frac{1}{(1+3k)(9+19k)}\begin{pmatrix}6(1+2k)^2+3(1+2k)+k\\ 7k+5\end{pmatrix}$$

显然, 当 $k=-1/3$或 $k=-9/19$时, 模态2的振子中非线性项系数将出现分母为0的情况, 模态振子及相应的模态均失去意义 但此时两模态振子的频率比$1/\sqrt{1+2k}$很明显是无理数, 即原系统不是内共振的

因此, 从本例的分析不难得到如下结论:

1) 文献[3]的方法, 即使对于非内共振系统, 也可能失效 失效的原因在于模态间的非内共振耦合. 这 也是本文的重要发现之一, 同时, 这也从一个侧面说明我们提出的一类新的模态, 即耦合非线性模态的合理性

2) 本文的方法解决了这一问题 方程(8)的奇异性取决于原系统的线性部分, 而不受原系统非线性项的影响 本例与例1相比, 只是非线性项作了改变, 因此本文方法可用于例3, 不存在非内共振失效的问题

例4 奇数维系统的非线性模态[6]

$$\begin{pmatrix}\mathring{y}_1\\ \mathring{y}_2\\ \mathring{y}_3\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}2v-1 & -1 & 0\\ 1 & 2v-1 & 0\\ 0 & 0 & -v\end{bmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}y_1y_3\\ y_2y_3\\ -(y_1^2+y_2^2+y_3^2)\end{pmatrix} \tag{21}$$

易知 $\nu=0.5$时, 系统有一对纯虚根 $\lambda=\pm i$, i 相应的特征向量为 $H_{10}=(0.5-0.5i0)^T$. 设其非线性模态的表达式为

$$y=\sum_{j+k\geq 1}H_{jk}z^j\overline{z}^k \qquad (H_{jk}=\overline{H}_{kj}) \tag{22}$$

模态振子为

$$\mathring{z}=\lambda z+C_1z^2\overline{z}+\cdots \tag{23}$$

将式(22)代入式(21)中的非线性项

$$f(y)=\begin{pmatrix} y_1y_3 \\ y_2y_3 \\ -(y_1^2+y_2^2+y_3^2)\end{pmatrix}=\sum_{j+k\geq 2}f_{jk}z^j\overline{z}^k$$

可以求出 f_{jk}(只求到 $j+k=3$即可). 代入方程(8), 先求出 $j+k=2$时所有的 H_{jk}. 再令 $H_{21,1}=0$, 得 $z^2\overline{z}$系数的方程

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ H_{21,2} \\ H_{21,3}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 0 \\ -0.5i & i & 0 \\ 0 & 0 & i+0.5\end{bmatrix}^{-1} f_{21}=\frac{1}{i}\begin{bmatrix} i & -1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots\end{bmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 0\end{pmatrix}$$

解得

$$C_1=-2$$

故模态振子为

$$\mathring{z}=iz-2z^2\overline{z}$$

非线性模态的表达式较繁, 此处从略

参 考 文 献

1 吴志强 多自由度非线性系统的非线性模态及Normal Form 直接方法 天津大学博士学位论文, 1996, 2

2 Rosenberg RM. Normal modes in nonlinear dual mode systems J Appl Mech, 1960, 27: 263～268

3 Shaw SW, Pierre C. Normal modes for nonlinear vibratory systems J Sound V, 1993, 164(1): 85～124

4 Shaw SW, Pierre C. Normal modes of vibration for nonlinear continuous systems J Sound V, 1994, 169(3): 319～347

5 陈予恕 非线性动力系统的分叉和混沌理论 北京: 高教出版社, 1993

6 Hassard BD, etc Theory and Applications of Hopf Bifurcation. Cambridge Unjiversity Press, 1981

CLASSIFICATION OF NONLINEAR NORMAL MODES AND THEIR NEW CONSTRUCTIVE METHOD

Wu Zhiqiang　Chen Yushu　Bi Qinsheng
(*Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin* 300072, *China*)

Abstract　The definition of the nonlinear normal modes is given by introducing the undivided even-dimensional invariant manifold, and a new kind of normal modes (i.e. coupled nonlinear mode) are proposed which may classify all the normal modes expected in physical systems. This idea of classification may form a new base of constructing the nonlinear normal mode theory. Modal oscillators obtained by the method presented here are of Normal Form type, which are simplest in expression and can represent the main dynamical behavior of the original systems. From which the information, such as nonlinear frequency and nonlinear stability etc., can be easily gained. The method is suitable to analyse the general multi-degree freedom systems and odd-dimensional nonlinear dynamical systems; it can be used to construct not only uncoupled normal modes but also coupled normal modes of the systems with internal resonance. The solutions of the above problems have not been found in the literatures up till now.

Key words　nonlinear normal mode, invariant manifold, normal form