

含椭圆孔非对称层合板的 Green 函数¹⁾

吕 品 吴筱益

(中国科学技术大学力学和机械工程系, 合肥 230026)

摘要 运用作者建立的复合材料层合板问题的求解方法, 得到了含椭圆孔和裂纹的无限大非对称层合板在广义集中载荷作用下的 Green 函数。利用这些结果可研究含孔或裂纹的非对称层合板在集中载荷作用下的力学行为, 还可结合边界元方法对复杂层合板结构建立有效的数值分析方法。

关键词 非对称层合板, Green 函数, 修正的 Stroh 公式

引 言

随着复合材料结构在航空、建筑、机械等领域日益广泛的应用, 根据不同的材料设计要求, 对复合材料层合板结构的性能, 特别是力学性能进行更精确有效的分析是非常必要的。对一般的层合板结构, 由于铺层不对称或工艺上的原因, 使层合板的面内效应与弯曲效应发生耦合, 这给求解和分析带来了很大的困难。通常的分析是回避这种复杂性, 即仅考虑对称铺设的层合板结构, 以使面内量和弯曲量互不耦合, 从而使整个分析大为简化。为了克服一般非对称层合板拉弯耦合所引起的分析上的困难, 吕品和 Mahrenholtz^[1] 最近将各向异性弹性力学中广为使用的 Stroh 公式加以推广和发展, 导出了求解非对称复合材料层合板问题的一般方法, 为该类问题的分析提供了一条新的途径。

含孔或裂纹的复合材料层合板结构的应力分析, 在结构设计和工程实际中有重要意义。有关这方面的文章甚多, 但基本上都未涉及到拉弯耦合的一般情况。在本文中, 我们将利用建立的方法对这类问题展开进一步的研究, 导出含椭圆孔或裂纹的无限大层合板在拉弯耦合情况下的 Green 函数。这项工作可用于研究含孔或裂纹层合板结构在集中力或力偶作用下的应力分布, 而且可作为边界积分方程的核函数, 结合边界元方法, 对含孔或裂纹的有限层合板在各种边界条件和荷载作用下的问题进行数值分析。

1 层合板问题的修正 Stroh 公式

根据经典叠层板理论, 在笛卡尔坐标系中, 令 x_1x_2 坐标面与层合板的中面重合, x_3 轴垂直于板面, u_1 , u_2 和 w 分别表示中面的面内和离面(挠曲)位移。定义 U_1 和 U_2 , 使

$$U_1 = \gamma_{w,1}, \quad U_2 = \gamma_{w,2} \quad (1.1)$$

式中 $(\cdot)_{,1}$ 和 $(\cdot)_{,2}$ 分别表示对变量 x_1 和 x_2 的导数。因此, 经典层合板理论^[2,3] 的基本关系可用张量形式简洁地表示为^[1]:

¹⁾国家自然科学基金和中国科学技术大学回国人员择优支持启动资金资助项目

1995-08-09 收到第一稿, 1995-12-31 收到修改稿

内力和位移的关系

$$\left. \begin{aligned} N_{\alpha\beta} &= A_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{\gamma, \delta} + B_{\alpha\beta\gamma\delta} U_{\gamma, \delta} \\ M_{\alpha\beta} &= B_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{\gamma, \delta} + D_{\alpha\beta\gamma\delta} U_{\gamma, \delta} \\ Q_{\alpha} &= B_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{\gamma, \delta\beta} + D_{\alpha\beta\gamma\delta} U_{\gamma, \delta\beta} \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

平衡关系

$$N_{\alpha\beta, \beta} = 0, \quad M_{\alpha\beta, \alpha\beta} = 0 \quad (1.3)$$

式中 $N_{\alpha\beta}$ 表示板的等效平面内力, $M_{\alpha\beta}$ 表示等效弯矩, Q_{α} 表示横向剪力, 弹性常数 $A_{\alpha\beta\gamma\delta}$,

$$X_{\alpha\beta\gamma\delta} = X_{\beta\alpha\delta\gamma} = X_{\alpha\beta\delta\gamma} = X_{\gamma\delta\alpha\beta} \quad (1.4) =$$

式中 $X_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 可分别是 $A_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $B_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 和 $D_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 在上面的关系中, 下标 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 可分别取 1 和 2 将 (1.2) 代入 (1.3), 可得到用位移表示的平衡关系

$$\left. \begin{aligned} A_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{\gamma, \delta\beta} + B_{\alpha\beta\gamma\delta} U_{\gamma, \delta\beta} &= 0 \\ B_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{\gamma, \delta\alpha\beta} + D_{\alpha\beta\gamma\delta} U_{\gamma, \delta\alpha\beta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

由于位移函数 u_{α}, w 以及 U_{α} 仅依赖于变量 x_1 和 x_2 , 方程 (1.5) 的解可写成下面的形式^[1]

$$u_{\alpha} = a_{\alpha} f(z), \quad U_{\alpha} = e_{\alpha} f(z), \quad z = x_1 + p x_2 \quad (1.6)$$

并且根据 U_{α} 与挠曲位移 w 的关系 (1.1), 上式中的 e_{α} 不是独立的, 有关系^[1]

$$e_2 - e_1 p = 0 \quad (1.7)$$

在 (1.6) 和 (1.7) 中, f 是 z 的任意函数, 而 p, a_{α} 和 e_{α} 分别是待定的特征值和相应的特征向量 将 (1.6) 代入 (1.5) 并写成矩阵的形式为

$$\left. \begin{aligned} \{Q(A) + p[R(A) + R^T(A)] + p^2 T(A)\} a + \{Q(B) + p[R(B) + R^T(B)] + p^2 T(B)\} e &= 0 \\ \{Q(B) + p[R(B) + R^T(B)] + p^2 T(B)\} a + \{Q(D) + p[R(D) + R^T(D)] + p^2 T(D)\} e &= h \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

并且 h 的元素之间存在下面关系

$$h_1 + p h_2 = 0 \quad (1.9)$$

在 (1.8) 中, 2×2 阶矩阵 $Q(X), R(X)$ 和 $T(X)$ 为

$$Q_{\alpha\beta}(X) = X_{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad R_{\alpha\beta}(X) = X_{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad T_{\alpha\beta}(X) = X_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (1.10)$$

其中 $X_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 的意义已在前面说明 (1.8), (1.9) 和 (1.7) 可统一写成

$$\begin{bmatrix} Y(A) & Y(B) & 0 \\ Y(B) & Y(D) & -I \\ 0 & L_1 & L_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ e \\ h \end{Bmatrix} = 0 \quad (1.11)$$

式中 I 为二阶单位阵

$$Y(X) = Q(X) + p[R(X) + R^T(X)] + p^2T(X) \left. \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \right\} \quad (1.12)$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} -p & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & p \end{bmatrix}$$

方程(1.11)是关于经典层合板理论的特征值问题 引入新的矢量

$$\left. \begin{matrix} b = [R^T(A) + pT(A)]a + [R^T(B) + pT(B)]e \\ c = [R^T(B) + pT(B)]a + [R^T(D) + pT(D)]e \end{matrix} \right\} \quad (1.13)$$

及应力函数

$$\Phi_\alpha = b_{\alpha f}(z), \quad \Psi_\alpha = c_{\alpha f}(z), \quad \xi_\alpha = h_{\alpha f}(z) \quad (1.14)$$

式中 h 由(1.8)给出 因此, 将(1.6)代入(1.2), 所得的内力可用应力函数表示为^[1]

$$\left. \begin{matrix} N_{\alpha 1} = -\Phi_{\alpha 2}, & N_{\alpha 2} = \Phi_{\alpha 1} \\ M_{\alpha 1} = -\Psi_{\alpha 2} + \xi_{\alpha 1}, & M_{\alpha 2} = \Psi_{\alpha 1} \\ Q_\alpha = \xi_{\alpha 1} \end{matrix} \right\} \quad (1.15)$$

从特征方程(1.11)可得到四对共轭特征值及相应的特征向量 如果把虚部为正的的特征值记为 $p_k (k=1, 2, 3, 4)$, 其相应的特征向量记为 a_k, e_k, h_k 及 b_k, c_k , 则另外四个特征值及相应的特征矢量可写成

$$\left. \begin{matrix} p_{k+4} = \bar{p}_k, & a_{k+4} = \bar{a}_k, & e_{k+4} = \bar{e}_k, & h_{k+4} = \bar{h}_k \\ b_{k+4} = \bar{b}_k, & c_{k+4} = \bar{c}_k & (k=1, \dots, 4) \end{matrix} \right\} \quad (1.16)$$

其中上面的短横线表示复共轭 如果求得特征值 p_k 互不相等, 则 u, v, Φ, Ψ, ξ 的一般解可通过将形如(1.6)和(1.14)的解叠加得到

$$\left. \begin{matrix} u = \sum_{k=1}^4 \{a_k f_k(z_k) + \bar{a}_k f_{k+4}(\bar{z}_k)\} \\ v = \sum_{k=1}^4 \{e_k f_k(z_k) + \bar{e}_k f_{k+4}(\bar{z}_k)\} \\ \Phi = \sum_{k=1}^4 \{b_k f_k(z_k) + \bar{b}_k f_{k+4}(\bar{z}_k)\} \\ \Psi = \sum_{k=1}^4 \{c_k f_k(z_k) + \bar{c}_k f_{k+4}(\bar{z}_k)\} \\ \xi = \sum_{k=1}^4 \{h_k f_k(z_k) + \bar{h}_k f_{k+4}(\bar{z}_k)\} \end{matrix} \right\} \quad (1.17)$$

式中 f_1, f_2, \dots, f_8 是它们宗量的任意函数, 而

$$z_k = x_1 + p_k x_2 \quad (1.18)$$

方程 (1.17) 是经典层合板理论的一般解. 对于给定的边值问题, 只需确定合适的函数 $f_k(z_k)$, 使得上述解能满足边界条件. 而挠度 w 及内力可分别由 (1.1) 和 (1.15) 得到. 在许多实际应用中, (1.17) 中的 $f_k(z_k)$ 可写成下面的形式

$$f_k(z_k) = q_k f(z_k), \quad f_{k+4}(\bar{z}_k) = \bar{f}_k(\bar{z}_k) \quad (k = 1, \dots, 4) \quad (1.19)$$

式中 q_k 是待定的复常数. 为此, 我们定义 2×4 阶矩阵 A, E, B, C 和 H

$$\left. \begin{aligned} A &= [a_1, a_2, a_3, a_4], \quad E = [e_1, e_2, e_3, e_4] \\ B &= [b_1, b_2, b_3, b_4], \quad C = [c_1, c_2, c_3, c_4] \\ H &= [h_1, h_2, h_3, h_4] \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

及对角矩阵

$$f(z^*) = \text{diag} [f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] \quad (1.21)$$

因此, (1.17) 可进一步写成

$$\left. \begin{aligned} u &= A f(z^*) q + \bar{A} \overline{f(z^*) \bar{q}}, \quad v = E f(z^*) q + \bar{E} \overline{f(z^*) \bar{q}} \\ \phi &= B f(z^*) q + \bar{B} \overline{f(z^*) \bar{q}}, \quad \psi = C f(z^*) q + \bar{C} \overline{f(z^*) \bar{q}} \\ \xi &= H f(z^*) q + \bar{H} \overline{f(z^*) \bar{q}} \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

这样对一个给定的边值问题, 所有的工作就转化为确定未知函数 $f(z_k)$ 及复系数矢量 q . 该节的详细推导可见文献 [1].

2 含椭圆孔层合板的 Green 函数

2.1 边界条件

如图 1 所示, 考虑一含有椭圆孔洞的无限大各向异性层合板. 在椭圆孔边界上, t 为边界 Γ 的法向, s 为边界 Γ 的切向. 板在 x^* 处受面内集中载荷 f 和集中弯矩 m 作用.

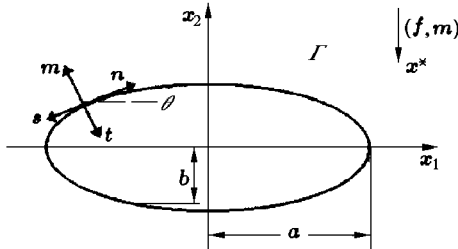


图 1 含椭圆孔无限大板的孔边界示意图

Fig. 1 An infinite laminated plate with an elliptic hole acted by generalized concentrated forces

若孔边界上应力自由, 则

$$N_u(s) = 0, N_v(s) = 0, M_u(s) = 0, Q_t(s) + \frac{\partial M_v(s)}{\partial s} = 0 \quad (2.1)$$

可以证明^[1], 边界条件(2.1)可写成

$$\Phi_n|_{\Gamma} = 0, (\Psi + I_1 \xi)_{,n}|_{\Gamma} = 0 \quad (2.2)$$

其中

$$I_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

而 ϕ , ψ 和 ξ 是前一节定义的应力函数 此外, 在集中力作用处的平衡条件可表示成^[6,8]

$$\left. \begin{aligned} \int_c d\phi &= f \\ \int_c d(\Psi + I_1 \xi) &= m \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

上式对包含 x^* 点的任意闭曲线 c 均成立, 其中

$$f = (f_1, f_2)^T, m = (m_2, m_1)^T \quad (2.5)$$

分别是 x^* 处作用的面内集中载荷与集中力偶 另外, 在无穷远处, 内力应满足

$$N_{\alpha\beta} \rightarrow 0, M_{\alpha\beta} \rightarrow 0, Q_{\alpha} \rightarrow 0 \quad (2.6)$$

根据该问题的边值条件(2.2), (2.4)和(2.6)确定出(1.22)中的未知函数 $f(z_k)$ 和复常数 q_k , 就得到了所需要的 Green 函数

2.2 函数 $f_k(z_k)$ 的选取

边值条件(2.4)式表明函数 ϕ 和 $(\Psi + I_1 \xi)$ 在围绕 x^* 点的域内是多值的, 而它们的导数(相应于内力和弯矩)又应该是单值的, 并且当 $|z| \rightarrow \infty$ 时趋于零 满足这些要求的最合适的函数是对数函数 因此, 根据(1.22)和边值条件(2.2), (2.4)和(2.6), 位移与应力函数的一般解可写成^[6]

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{k=0}^4 [A f_k(z^*) q_k + \overline{A f_k(z^*) q_k}] \\ U &= \sum_{k=0}^4 [E f_k(z^*) q_k + \overline{E f_k(z^*) q_k}] \\ \phi &= \sum_{k=0}^4 [B f_k(z^*) q_k + \overline{B f_k(z^*) q_k}] \\ \psi &= \sum_{k=0}^4 [C f_k(z^*) q_k + \overline{C f_k(z^*) q_k}] \\ \xi &= \sum_{k=0}^4 [H f_k(z^*) q_k + \overline{H f_k(z^*) q_k}] \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

式中, q_k 为待定的四阶向量

$$f_k(z^*) = \text{diag} [f_k(z_1), f_k(z_2), f_k(z_3), f_k(z_4)] \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4) \quad (2.8)$$

函数 $f_k(z_\alpha)$ 可取为^[6]

$$\left. \begin{aligned} f_0(z_\alpha) &= \log(\zeta_\alpha - \bar{\zeta}_\alpha), & f_k(z_\alpha) &= \log(\zeta_\alpha^{-1} - \bar{\zeta}_\alpha) \\ \zeta_\alpha &= \frac{z_\alpha + \sqrt{z_\alpha^2 - a^2 - p_\alpha^2 b^2}}{a - ip_\alpha b}, & \bar{\zeta}_\alpha &= \frac{z_\alpha^* + \sqrt{z_\alpha^{*2} - a^2 - p_\alpha^2 b^2}}{a - ip_\alpha b} \\ z_\alpha^* &= x_1^* + p_\alpha x_2^* & (\alpha, k &= 1, 2, 3, 4) \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

式中 a, b 分别是椭圆的半长和半短轴 多值函数 $f_0(z_\alpha)$ 的选取是为了满足条件(2.4), 而单值函数 $f_1(z_\alpha), \dots, f_4(z_\alpha)$ 的选取是为了满足应力自由孔边界条件(2.2).

2.3 未知矢量 q_k 的确定

为了从(2.2)和(2.4)中确定出复常数 q_k , 需要在椭圆孔边界上计算 ϕ_n 和 $(\psi + I_1 \xi)_{,n}$. 椭圆孔边界的坐标可写成

$$x_1 = a \cos \omega, \quad x_2 = b \sin \omega \quad (2.10)$$

式中 ω 是实参数 令 θ 是 x_1 轴与切向 n 之间的夹角(如图 1 所示), 则 θ 与 ω 之间的关系为

$$\rho \cos \theta = a \sin \omega, \quad \rho \sin \theta = -b \cos \omega, \quad \rho^2 = a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega \quad (2.11)$$

由微商的链式法则, 有

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \zeta_\alpha} \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \left[\frac{\partial \omega}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} \right] \quad (2.12)$$

并且在椭圆孔边界上

$$\left. \begin{aligned} \zeta_\alpha &= e^{i\omega}, & \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial \omega} &= ie^{i\omega}, & \frac{\partial \bar{\zeta}_\alpha}{\partial \omega} &= -\rho(\cos \theta + p_\alpha \sin \theta) \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} &= \cos \theta, & \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} &= \sin \theta, & \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_1} &= 1, \quad \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_2} = p_\alpha \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

由此可得到在孔边界上矩阵 $f_k(z^*)$ 对 n 的微商

$$\left. \begin{aligned} f_0(z^*)_{,n} &= \text{diag} [c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4] = \sum_{k=1}^4 c_k I_k \\ f_k(z^*)_{,n} &= \bar{c}_k I \quad (k = 1, 2, 3, 4) \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} c_k &= \frac{-ie^{i\omega}}{\rho(e^{i\omega} - \zeta_\alpha)} \\ I_1 &= \text{diag} [1 \ 0 \ 0 \ 0], \quad I_2 = \text{diag} [0 \ 1 \ 0 \ 0] \\ I_3 &= \text{diag} [0 \ 0 \ 1 \ 0], \quad I_4 = \text{diag} [0 \ 0 \ 0 \ 1] \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

将(2 14)式代入(2 2)有

$$\left. \begin{aligned} & 2 \sum_{k=1}^4 \operatorname{Re}\{c_k B I_k q_0 + \bar{c}_k B I_k q_k\} + 0 \\ & 2 \sum_{k=1}^4 \operatorname{Re}\{c_k C I_k q_0 + \bar{c}_k C I_k q_k + 2 \sum_{k=1}^4 \operatorname{Re} I_{-1}(c_k H I_k q_0 + \bar{c}_k H I_k q_k)\} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2 16)$$

此外, 将应力函数表达式代入(2 4), 并注意到在求解域仅有 z_α^* 是一阶奇点, 可得到

$$\left. \begin{aligned} & 4\pi \operatorname{Re}\{B q_0\} = f \\ & 4\pi \operatorname{Re}\{iC q_0 + iI_{-1} H q_0\} = m \end{aligned} \right\} \quad (2 17)$$

另外, 位移的单值条件 $\oint_c du = 0, \oint_c dV = 0$ (c 为包含 x^* 的任一闭曲线) 给出

$$\left. \begin{aligned} & i2\pi A q_0 - i2\pi \overline{A q_0} = 0 \\ & i2\pi E q_0 - i2\pi \overline{E q_0} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2 18)$$

为便于求解, 我们定义

$$\Lambda = \begin{pmatrix} B \\ C + I_{-1} H \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f \\ m \end{pmatrix} \quad (2 19)$$

式中, Λ 和 Γ 是 4×4 阶矩阵. 利用这些符号, (2 16)~(2 18)可写成更简洁的形式

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{k=1}^4 \operatorname{Re}\{c_k \Lambda_k q_0 + \bar{c}_k \Lambda_k q_k\} = 0 \\ & \Lambda q_0 - \overline{\Lambda q_0} = F/i2\pi \\ & \Gamma q_0 - \overline{\Gamma q_0} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2 20)$$

由(2 20)_{2,3}求出

$$q_0 = (\Lambda - \Lambda \overline{\Gamma^{-1}} \Gamma)^{-1} F/i2\pi \quad (2 21)$$

由(2 20)₁ 可得 q_k 的一个解

$$q_k = -\Lambda^{-1} \overline{\Lambda_k q_0} \quad (k = 1, 2, 3, 4) \quad (2 22)$$

至此, q_0 和 q_k 已由给定的边值条件确定. 将(2 8), (2 9), (2 21)和(2 22)代入(2 7)就得到了含椭圆孔无限大层合板的 Green 函数. 例如

$$\begin{aligned} u = & \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \{A f_0(z^*) (\Lambda - \overline{\Lambda \Gamma^{-1}} \Gamma)^{-1} F + \\ & \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^4 \operatorname{Im} \{B f_k(z^*) \Lambda^{-1} \overline{\Lambda_k} (\overline{\Lambda} - \Lambda \Gamma^{-1} \overline{\Gamma})^{-1} F \} \end{aligned} \quad (2 23)$$

(2.7) 式中其余的函数也可类似地写出

2.4 层合板的内力

为了得到含椭圆孔无限层合板在广义集中载荷 F 作用下的内力, 需要求出函数 f_k 对变量 x_1 与 x_2 的微商. 由(2.9)有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_0(z_\alpha)}{\partial x_1} &= \frac{\zeta_\alpha}{\zeta_\alpha - \bar{\zeta}_\alpha} \frac{1}{\sqrt{z_\alpha^2 - a^2 - p_\alpha^2 b^2}}, & \frac{\partial f_0(z_\alpha)}{\partial x_2} &= p_\alpha \frac{\partial f_0(z_\alpha)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_k(z_\alpha)}{\partial x_1} &= \frac{1}{\zeta_\alpha \bar{\zeta}_\alpha - 1} \frac{1}{\sqrt{z_\alpha^2 - a^2 - p_\alpha^2 b^2}}, & \frac{\partial f_k(z_\alpha)}{\partial x_2} &= p_\alpha \frac{\partial f_k(z_\alpha)}{\partial x_1} \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

在椭圆孔边界上

$$\frac{\partial f_0(z_\alpha)}{\partial x_1} = \frac{c_\alpha}{\cos \theta + p_\alpha \sin \theta}, \quad \frac{\partial f_k(z_\alpha)}{\partial x_1} = \frac{\bar{c}_k}{\cos \theta + p_\alpha \sin \theta} \quad (2.25)$$

将(2.24)或(2.25)以及(2.7)代入(1.15)即得到了层合板的内力

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} N_{12} \\ N_{22} \end{bmatrix} &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \{ B f_0(z^*) \cdot (\Lambda - \bar{\Lambda} \bar{\Gamma}^{-1} \bar{\Gamma})^{-1} \} F + \\ &\quad \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \sum_{k=1}^4 \{ B f_k(z^*) \cdot \Lambda^{-1} \bar{\Lambda}_k (\bar{\Lambda} - \Lambda \bar{\Gamma}^{-1} \bar{\Gamma})^{-1} \} F \\ \begin{bmatrix} N_{11} \\ N_{21} \end{bmatrix} &= -p_\alpha \begin{bmatrix} N_{12} \\ N_{22} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} M_{11} \\ M_{21} \end{bmatrix} &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \{ (H - p_\alpha C) f_0(z^*) \cdot (\Lambda - \bar{\Lambda} \bar{\Gamma}^{-1} \bar{\Gamma})^{-1} \} F + \\ &\quad \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \sum_{k=1}^4 \{ (H - p_\alpha C) f_k(z^*) \cdot \Lambda^{-1} \bar{\Lambda}_k (\bar{\Lambda} - \Lambda \bar{\Gamma}^{-1} \bar{\Gamma})^{-1} \} F \\ \begin{bmatrix} M_{21} \\ M_{22} \end{bmatrix} &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \{ C f_0(z^*) \cdot (\Lambda - \bar{\Lambda} \bar{\Gamma}^{-1} \bar{\Gamma})^{-1} \} F + \\ &\quad \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \sum_{k=1}^4 \{ C f_k(z^*) \cdot \Lambda^{-1} \bar{\Lambda}_k (\bar{\Lambda} - \Lambda \bar{\Gamma}^{-1} \bar{\Gamma})^{-1} \} F \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

因此, 沿孔边界的周向内力可将(2.26)代入下式得到

$$\left. \begin{aligned} N_{nn} &= N_{11} \cos^2 \theta + N_{22} \sin^2 \theta + 2N_{12} \cos \theta \sin \theta \\ N_{mm} &= (N_{22} - N_{11}) \cos \theta \sin \theta + N_{12} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ M_{nn} &= M_{11} \cos^2 \theta + M_{22} \sin^2 \theta + 2M_{12} \cos \theta \sin \theta \\ M_{mm} &= (M_{22} - M_{11}) \cos \theta \sin \theta + M_{12} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

式中 N_{θ} 和 N_{θ} 是沿椭圆孔边界的周向面内力, M_{θ} 和 M_{θ} 是周向弯矩 (见图 1). 由此可讨论孔边界的应力集中情况

2.5 Griffith 裂纹的应力强度因子

对前面讨论的椭圆孔情况, 令短半轴 $b=0$, 就得到了 Griffith 裂纹. 此时, 由 (2.9) 有

$$\zeta_{\alpha} = \frac{1}{a} (z_{\alpha} + \sqrt{z_{\alpha}^2 - a^2}), \quad \bar{\zeta}_{\alpha} = \frac{1}{a} (z_{\alpha}^* + \sqrt{z_{\alpha}^{*2} - a^2}) \quad (2.28)$$

在裂纹边界上, $x_2=0$, 则有

$$\zeta_{\alpha} = \frac{1}{a} (x_1 + \sqrt{x_1^2 - a^2}) = \zeta \quad (2.29)$$

相应地 (2.25) 式变为

$$\frac{\partial_0(z_{\alpha})}{\alpha_1} = \frac{\zeta}{\zeta - \bar{\zeta}} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 - a^2}}, \quad \frac{\partial_k(z_{\alpha})}{\alpha_1} = \frac{1}{\bar{\zeta}\zeta - 1} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 - a^2}} \quad (2.30)$$

将 (2.30) 代入 (2.25) 得到所需的沿 $x_2=0$ 的内力

$$\left. \begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_{12} \\ N_{22} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 - a^2}} \operatorname{Im} \left\{ B \frac{\zeta}{\zeta - \bar{\zeta}} (\Lambda - \bar{\Lambda} \bar{\Gamma}^{-1} \Gamma)^{-1} + \right. \\ &\quad \left. B \frac{1}{\bar{\zeta}\zeta - 1} \Lambda^{-1} \bar{\Lambda}_k (\bar{\Lambda} - \Lambda \Gamma^{-1} \bar{\Gamma})^{-1} \right\} F \\ \begin{Bmatrix} M_{12} \\ M_{22} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 - a^2}} \operatorname{Im} \left\{ C \frac{\zeta}{\zeta - \bar{\zeta}} (\Lambda - \bar{\Lambda} \bar{\Gamma}^{-1} \Gamma)^{-1} + \right. \\ &\quad \left. C \frac{1}{\bar{\zeta}\zeta - 1} \Lambda^{-1} \bar{\Lambda}_k (\bar{\Lambda} - \Lambda \Gamma^{-1} \bar{\Gamma})^{-1} \right\} F \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

因此, 裂纹尖端由面内拉伸和弯扭引起的应力强度因子分别为

$$\left. \begin{aligned} \begin{Bmatrix} K_{I1} \\ K_{I1} \end{Bmatrix}_e &= \lim_{x_1 \rightarrow a} \sqrt{2\pi(x_1 - a)} \begin{Bmatrix} N_{12} \\ N_{22} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \operatorname{Im} \left\{ B \frac{1}{1 - \bar{\zeta}} (\Lambda - \bar{\Lambda} \bar{\Gamma}^{-1} \Gamma)^{-1} + \right. \\ &\quad \left. B \frac{1}{\bar{\zeta}\zeta - 1} \Lambda^{-1} \bar{\Lambda}_k (\bar{\Lambda} - \Lambda \Gamma^{-1} \bar{\Gamma})^{-1} \right\} F \\ \begin{Bmatrix} K_{II1} \\ K_{II1} \end{Bmatrix}_b &= \lim_{x_1 \rightarrow a} \sqrt{\pi(x_1 - a)} \begin{Bmatrix} M_{12} \\ M_{22} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \operatorname{Im} \left\{ C \frac{1}{1 - \bar{\zeta}} (\Lambda - \bar{\Lambda} \bar{\Gamma}^{-1} \Gamma)^{-1} + \right. \\ &\quad \left. C \frac{1}{\bar{\zeta}\zeta - 1} \Lambda^{-1} \bar{\Lambda}_k (\bar{\Lambda} - \Lambda \Gamma^{-1} \bar{\Gamma})^{-1} \right\} F \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

3 结 论

本文运用求解复合材料层合板问题的修正 Stroh 公式^[1], 首次以解析的形式得到了

含椭圆孔及裂纹层合板在广义集中载荷作用下的 Green 函数 这些结果为分析含孔层合板结构在集中载荷作用下的应力分布及孔附近的应力集中提供了很好的手段 此外, 本文得到的 Green 函数已满足了自由椭圆孔及裂纹的边界条件 因此, 当作为边界积分方程的核函数应用于边界元分析时, 沿孔边界的积分就不再出现了. 这样可节约大量的离散自由度 有关本文的 Green 函数在边界元方法中的应用, 将在以后的文章中讨论 由于复合材料层合板的修正 Stroh 公式保持了二维各向异性弹性力学 Stroh 公式的许多特点, 因而应用上有力而规范, 可以得到一些复杂问题的封闭解, 进而揭示出仅用数值方法难于揭示的现象 本文的工作即是修正 Stroh 公式的一个很好的应用

参 考 文 献

- 1 Lu P, Mahrenholtz O. Extension of the Stroh formalism to the analysis of bending of anisotropic elastic plates *J Mech Phys Solids*, 1994, 42: 1725~ 1741
- 2 Jones RM. *Mechanics of Composite Materials* Washington DC: Scripta, 1975
- 3 张锦, 张乃恭. 新型复合材料力学机理及应用 北京航空大学出版社, 1993
- 4 丁启财 (T. C. T. Ting). 二维各向异性弹性力学的 Stroh 公式和某些不变量 力学进展, 1992, 22: 145~ 160
- 5 丁启财, 王敏中. 各向异性弹性力学一般边值问题的广义 Stroh 公式 力学学报, 1993, 25: 283~ 301
- 6 Hwu C, Yen WJ. Green's functions of two-dimensional anisotropic plates containing an elliptic hole *Int J Solids Structures*, 1991, 27: 1705~ 1719
- 7 Lu P. Stroh type formalism for unsymmetric laminated plate *Mech Res Commun*, 1994, 21: 249~ 254
- 8 吴筱益. 含椭圆孔各向异性板在拉压和弯曲耦合作用下的 Green 函数: [学士论文]. 合肥: 中国科学技术大学, 1995
- 9 吕品, 黄茂光, 王秀喜. Kirchhoff 型裂纹板的边界元法 工程力学, 1991, 8: 25~ 34
- 10 吕品, 王秀喜, 黄茂光. 寻求含孔洞薄板弯曲基本解的一般方法 固体力学学报, 1992, 13: 369~ 373

GREEN'S FUNCTIONS OF UNSYMMETRIC LAMINATED PLATE WITH ELLIPTIC HOLE

L ÜP in W u X i a o y i

(University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

Abstract According to the method for the bending analysis of composite laminates developed by the authors, Green's functions of an infinite unsymmetric laminate with elliptic hole or crack are obtained. These results can be used for stress analyses of laminated plates with holes or cracks acted by concentrated forces, and establishing corresponding numerical method for complex laminated structures by combining with Boundary Element Method.

Key words unsymmetric laminated plate, Green's functions, modified Stroh formalism