

# 多晶金属弹粘塑性的取向元模型<sup>1)</sup>

刘志宏 梁乃刚 刘洪秋

(中国科学院力学研究所非线性连续介质力学开放实验室, 北京 100080)

**摘要** 基于“三维组集式本构模型”<sup>[1-3]</sup>, 运用功共轭原理和场平均方法, 发展了一种“取向元”概念——多晶聚集体内具有相同取向的滑移系集的一个体积平均意义上的代表性元素; 由一维的率(粘性)敏感“取向元”, 通过在取向空间里的积分, 获得了三维的弹粘塑性本构方程式, 并模拟了蠕变和松弛现象。与以往的粘塑性模型相比, 本文模型不仅能同时考虑多晶金属材料的率相关性和路径相关性, 而且由于引入了物理机制, 因而具有较强的预测能力。数值算例也展示了该模型的合理性。

**关键词** 本构关系, 粘塑性, 多晶体金属

## 引言

自 Ludwik (1909) 的锡线动态拉伸实验<sup>[4]</sup>以来, 粘塑性力学有了长足的发展<sup>[5]</sup>。80 年代后期, 人类对核安全问题的担心, 又向粘塑性理论提出了更高的要求(由于反应堆中的金属部件长期在高温下工作, 因此迫切需要相应的具有足够精度的本构描述及寿命估计)。最近 Krempl 在美国军方及能源部的支持下, 领导和组织了有关的实验<sup>[6-9]</sup>, 着重调查了: 1) 一种 Cr/Mo 钢在高温下的率相关特性; 2) 一种 Al/Mg 合金对多边形复杂应变加载路径的响应规律。他们获得了不少重要的结果。不过遗憾的是现有的粘塑性理论都不具备同时解释上述两大类实验的能力。事实上, 如何描述材料的率相关效应以及应变诱导的各向异性, 恰恰是影响粘塑性理论发展的关键所在。

新近发展的 VBO 理论<sup>[10]</sup>将应力张量分解成过应力与背应力之和。其中过应力被认为是应变率的函数; 而背应力(纯粹的、率无关的塑性硬化阻力)则必须给出先验的路径相关的描述, 这在很大程度上限制了 VBO 的适用范围。至于晶体材料的各向异性塑性, 现有的理论可大致分成两类: 数学理论和物理理论<sup>[10]</sup>。数学理论(诸如塑性势的描述)简洁明了, 但对三维情形的处理基本是对现有的简单实验的拟合和推广; 物理塑性以晶粒为基本单位, 从晶体的滑移机制出发, 能给出本质规律的预测, 但具体计算过于繁琐以至于妨碍了它在工程实际中的应用。

近年来, 梁乃刚及其合作者提出了一种半数学-半物理的多晶体塑性理论(早期也称为“三维组集式本构模型”<sup>[1-3]</sup>)。他们把滑移系(或纤维束)的晶体学取向(或极化方向)作为主要的考察对象, 从而避开真实材料中的几何非均匀性, 得出的本构方程不仅数学描述简洁, 而且由于引入了物理机制, 因而具有较好的描述材料各向异性的能力, 预测结果与有关实验符合的程度也较好。

<sup>1)</sup>国家自然科学基金资助项目

1995-04-06 收到第一稿, 1995-07-04 收到修改稿

本文中我们进一步把“三维组集式本构模型”推广到粘塑性情形;同时放弃“均匀应力”假设<sup>[3]</sup>,引入“取向元”概念,使这种新型的本构理论更具一般性。在一维的“取向元”上考虑率敏感效应,也使得粘性的描述变得非常简单,不必再引入“过应力”、“背应力”、“平衡应力”等容易混淆的概念<sup>[10]</sup>,方便工程应用。

文末对 Krempl 等的实验<sup>[6-9]</sup>用“取向元”模型进行了数值模拟,预测结果是令人满意的。这表明取向元理论能基本反映弹粘塑性的本质规律,可望有较好的应用前景。

## 1 基本理论

“三维组集式本构模型”的建立在很大程度上告诉我们:从材料中基本元素的排列取向出发对于描述变形诱导各向异性可能是最方便的。事实上金属材料所呈现出来的各向异性,与内部诸元素的晶体学取向及其重新排列是密切相关的,亦或是这些因素的平均与综合。

考虑一单位体积的多晶聚集体。假设滑移是其中塑性变形的唯一机制。那么该聚集体内的任意一个滑移系均可用统一的空间坐标  $b = b_1, b_2, b_3$  和取向“坐标”  $q = \varphi, \theta, \psi$  (Euler 角) 唯一确定。由此建立一“相空间”  $\Omega = b \oplus q$  对于讨论问题是方便的。该相空间里所有开动的滑移系所消耗的功率之和,应当等于聚集体的塑性功率  $w^p$ ; 即

$$\tau \dot{\gamma} d b d q = \tau \dot{\gamma} d q d b = w^p = T : D^p \quad (1)$$

其中  $\tau$  和  $\dot{\gamma}$  分别是作用在滑移系上的现时分解剪应力和相应的滑移应变。两个积分式子,尽管在数学上只是积分顺序交换了一下,但在物理意义上却有着本质的不同。一般地,第二个积分式子可以理解成经典塑性理论中按晶粒进行统计平均的方法(如 Taylor 模型<sup>[12]</sup>); 而第一个积分式子告诉我们:也可以直接按照滑移系的取向进行统计,这一点正是“取向元”模型的数学基础。

既然同种材料有着一致的本构行为,那么对于研究本构关系来说,材料微观结构分布的具体形式(诸如微观元素排列形式的不均匀性)便是不重要的。对于某一取向的滑移系集来说,这里我们不追究它们在多晶聚集体内分布的具体形式(包括它们两两之间的相互作用),而只是关心它们对能量耗散的等效性,即认为有下式成立

$$\tau \dot{\gamma} d b = \bar{\tau} \dot{\omega} \quad (2)$$

其中  $\omega$  是该取向(不妨记作  $P$ ) 所有滑移系在聚集体内所占据的体积份数;  $\{\bar{\tau}, \dot{\gamma}\}$  是该取向上一个代表性的滑移系,或者说是该取向滑移系集的一个平均元素。一般地,把  $\bar{\tau}$  直接等同于 Schmid 分解剪应力是有意义的。那么  $\dot{\gamma}$  可以认为是该取向上所有滑移系的滑移应变率的加权体积平均。即

$$\bar{\tau} = T : P \quad (3a)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{\omega} \frac{\tau}{T : P} \dot{\gamma} d b \quad (3b)$$

这样就定义了  $P$  取向上一个有代表(平均)意义的滑移系;且  $\{\bar{\tau}, \dot{\gamma}\}$  满足能量共轭,不妨称作“ $P$ -取向元”。

既然取向元是定义在体积平均意义上的, 那么它便不再遵循局部(某一晶粒)的变形规律, 而是应该遵从(连续介质力学中)宏观物质线素的变形规律, 即

$$\left. \begin{aligned} \dot{m} &= L \cdot m - (m \cdot D \cdot m) m \\ \dot{n} &= -L^T \cdot n + (n \cdot D \cdot n) n \\ \dot{p} &= D \cdot R - R \cdot D + W \cdot P - P \cdot W + P \otimes (n \otimes n - m \otimes m) : D \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中 $L$ 是变形率梯度张量, $D$ 和 $W$ 分别是它的对称部分和反对称部分; $m$ 和 $n$ 是滑移系(这里特指“取向元”)的滑移方向和滑移面法向(均为单位矢量),且

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{m \otimes n + n \otimes m}{2} \\ R &= \frac{m \otimes n - n \otimes m}{2} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中张量运算符号的定义可参考文献[1~3]

考虑到模型应尽可能的简单,我们假设不同取向的“取向元”遵循相同的硬化规律,而且不考虑它们之间的相互作用。这样一旦确定了取向元的本构特性,通过众多取向元对宏观应变的不同感受和相应的(硬化)状态组合,便可以描述材料各向异性的性质了。

将(2)和(3a)式同时代入(1)得

$$D^p = P \dot{\gamma} \omega d q \quad (6)$$

如果材料是初始各向同性的,那么 $\omega$ 对于所有可能的取向是一个常数。这时(6)可简单地写成

$$D^p = P \dot{\gamma} d q = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi P \dot{\gamma} d\psi d\theta \cos \varphi d\varphi \quad (7)$$

本文只讨论这种材料。另外,由于下面所有的公式均是针对取向元的,所以代表取向元平均意义的“-”标志在下文中略去不写。公式(4)~(7)揭示了塑性应变路径的发展与晶体滑移、取向及其演化之间内在的联系。

## 2 取向元的本构刻画

既然已经假设取向元遵循一致的硬化规律,那么对单个取向元力学特性(“ $\tau$ - $\dot{\gamma}$ ”响应关系)的刻画无疑是取向元模型的关键所在。这方面还有许多细致的工作要做,然而作为研究的第一步,由于取向元是一个“代表性的,平均意义上的滑移系”,那么我们有理由认为,取向元也遵循类似于实际多晶金属材料中滑移系的硬化规律。

对于时间无关的取向元,采用下列形式的硬化规律<sup>[13]</sup>

$$\left. \begin{aligned} \dot{\tau}_{cr} &= \dot{\tau}_0 + h \dot{\gamma} + \chi P : D^p \\ \dot{\tau}_{cr} &= \beta \dot{\tau}_{cr} \end{aligned} \right\} \left( \dot{\gamma} > 0; \text{ 或者 } \dot{\gamma} = 0, \text{ 但 } P : D^p > 0 \right) \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\tau}_{cr} &= \dot{\tau} = h\dot{\gamma} + \lambda P : D^p \\ \dot{\tau}_{cr} &= \beta \dot{\tau}_{cr} \end{aligned} \right\} (\dot{\gamma} < 0; \text{ 或者 } \dot{\gamma} = 0, \text{ 但 } P : D^p < 0) \quad (9)$$

其中  $h$  是取向元自身硬化模量,  $\lambda$  是潜在硬化系数(关于潜在硬化的问题, 本文中暂不讨论, 即不讨论  $\lambda P : D^p$  的合法性). 公式中的一对力学参量  $\tau_{cr}$  和  $\tau_{cr}$ , 分别对应于滑移正方向的临界分解剪应力和负方向的临界分解剪应力. 如果给这一对力学参量加以适当的约束, 则可以用来描述 Bauschinger 效应. 本文中是简单地引入一个参数  $\beta$  来构造它们相互间影响的微分方程. 具体地,  $\beta = 1$  表示取向元上的“随动强化”;  $\beta = -1$  取向元上的“等向强化”.

自身硬化模量  $h$  的演化规律如下

$$h = \begin{cases} \frac{h_0 - h_{sat}}{\tau_{max} - \tau_{r0}} (\tau_{max} - \tau) + h_{sat} & (\tau = \tau_{cr}; \dot{\tau} > 0) \\ \frac{h_0 - h_{sat}}{\tau_{max} - \tau_{r0}} (\tau_{max} + \tau) + h_{sat} & (\tau = \tau_{cr}; \dot{\tau} < 0) \end{cases} \quad (10)$$

其中  $\tau_{r0}$  和  $\tau_{max}$  分别是初始临界分解剪应力和最大(极限)分解剪应力;  $h_0$  和  $h_{sat}$  分别是初始硬化模量和饱和硬化模量(本文中  $h_{sat} = 0$ ).

对于粘塑性材料, 还必须采用时间相关的取向元. 这时候作用在取向元上的 Schmid 分解剪应力必须同时克服纯塑性硬化阻力和粘性力, 即

$$\tau = \tau^{la} + \tau^{vis} \quad (11)$$

简单起见, 本文只讨论线性(牛顿)粘性的情形, 即

$$\tau^{vis} = \eta \dot{\gamma} \quad (12)$$

其中  $\eta$  是粘性系数. 下文可知, 由简单的、一维的取向元本构关系(11), 通过在取向空间中的积分, 可以推导出三维粘塑性本构方程. 同时与 VBO 理论不同的是: 本文模型是将 Schmid 剪应力(标量)分解成塑性和粘性两部分, 有明确的物理意义; 而不是把应力(张量)考虑成过应力和背应力之和, 过于复杂且意义不明.

方程(11)实际上是一个 Bingham 体模型. 与一般的弹粘塑性理论不同的是, 本文中的 Bingham 体已经按照各自的晶体学取向有机地排列, 而不再是机械地串联和并联. 与状态变量理论相比, 模型找到了一族有明确物理意义的状态变量, 即与取向张量  $P$  相联系的临界分解剪应力  $\tau_{\pm cr}$ .

### 3 粘塑性本构方程

建立“取向元”概念, 可以方便地由简单的、一维的分解剪应力与平均滑移之间的响应关系, 推导出复杂的、三维的材料本构方程. 具体的步骤如下.

首先将方程(11~12)和(8~9)合并, 并改写成增量形式

$$\dot{\tau} = h\dot{\gamma} + \eta \dot{\gamma} \quad (13)$$

考虑相邻的两个时刻

$$\Delta t = t^n - t^{n-1} \tag{14}$$

只要时间步长足够的小, 总有下式成立 (Newmark 常平均加速度法)

$$\dot{\gamma}^n - \dot{\gamma}^{n-1} = \frac{\Delta t}{2} (\ddot{\gamma}^n + \ddot{\gamma}^{n-1}) \tag{15}$$

代入(13)式有

$$\dot{\gamma}^n = \frac{\dot{\tau}_+ \left[ \frac{2\dot{\gamma}^{n-1} + \ddot{\gamma}^{n-1}}{\Delta t} \right]}{h + \frac{2\eta}{\Delta t}} \tag{16}$$

将上式左右两边同乘以权函数  $P$ , 并在取向空间里对所有取向积分, 有上式的弱解形成

$$\dot{\gamma}^n P dq = \frac{\dot{\tau}_+ \left[ \frac{2\dot{\gamma}^{n-1} + \ddot{\gamma}^{n-1}}{\Delta t} \right]}{h + \frac{2\eta}{\Delta t}} P dq \tag{17}$$

由于

$$\dot{\hat{T}} = \overset{\circ}{T} : \overset{\circ}{P} + \overset{\circ}{T} : \overset{\circ}{\hat{P}} = \overset{\circ}{P} : \overset{\circ}{\hat{T}} + \{R : T - T \cdot R - (T : P)(n \otimes n - m \otimes m - I)\} : D \tag{18}$$

其中  $\overset{\circ}{T}$  是 Jaumann 应力率

$$\overset{\circ}{T} = \overset{\circ}{T} - W \cdot T + T \cdot W + \text{tr}(D)T \tag{19}$$

将(18)代入(17), 并考虑到(7)有

$$D^p = A : \overset{\circ}{\hat{T}} + \mathfrak{E} : D + \eta D_0 \tag{20}$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \Lambda &= \frac{P \otimes P}{h + \frac{2\eta}{\Delta t}} dq \\ \mathfrak{E} &= \frac{\{R \cdot T - T \cdot R - (T : P)(n \otimes n - m \otimes m - E)\} \otimes P}{h + \frac{2\eta}{\Delta t}} \\ D_0 &= \frac{\frac{2\dot{\gamma}^{n-1} + \ddot{\gamma}^{n-1}}{\Delta t} P dq}{h + \frac{2\eta}{\Delta t}} \end{aligned} \right\} \tag{21}$$

仍然假设应变率可以分解成弹性和塑性两部分

$$D = D^e + D^p = K^{-1} : \overset{\circ}{\hat{T}} + D^p \tag{22}$$

其中  $K$  是材料的弹性刚度张量, 代入(20)便可得到弹粘塑性材料增量形式的本构方程

$$A : \overset{\circ}{\hat{T}} = B : D - \eta D_0 \tag{23}$$

其中

$$\left. \begin{aligned} A &= K^{-1} + \Lambda \\ B &= I - I - \Xi \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

公式(24)中  $I = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{il} + \delta_{il} \delta_{ik})$ . 这样的一组方程, 具有数学描述的简洁性, 也有鲜明的物理意义. 若略去粘性项(可以令  $\eta = 0$ ), 则上述方程可以蜕化为各向异性的塑性方程, 若进一步令  $h_i$  趋于无穷大, 即“关闭”取向元, 则上述方程可进一步蜕化为弹性情形. 另一方面, 如果只考虑粘性效应, 则由上述方程可推导出不可压缩粘性流体的本构方程.

#### 4 数值算例

图 1~3 定性地展示了“取向元”对多晶金属材料率相关特性的模拟能力(由于这方面的实验资料十分丰富, 而定性的结果又相当的一致, 故本文不再作定量的比较).

图 1 中的虚线代表准静态应力-应变响应曲线, 屈服点用字母 A 标出. 相应的动态曲线用实线画出, 上面的小圆圈代表相等的时间间隔. 这时屈服极限已经上升至 B 点. 从 C 点开始, 应变速率换成更高的量级, 随即应力响应抬高. 在 D 点处应力松弛, 开始时应力下降的速率较快, 后来趋于一个稳定值, 这个值就是文献中常说的平衡应力(很明显, 平衡应力和准静态应力是两个不同的概念).

图 2 模拟的是材料经过一段加载后的蠕变过程. 可以看出, 蠕变开始时的速率较快, 但过后也会趋于一个稳定值.

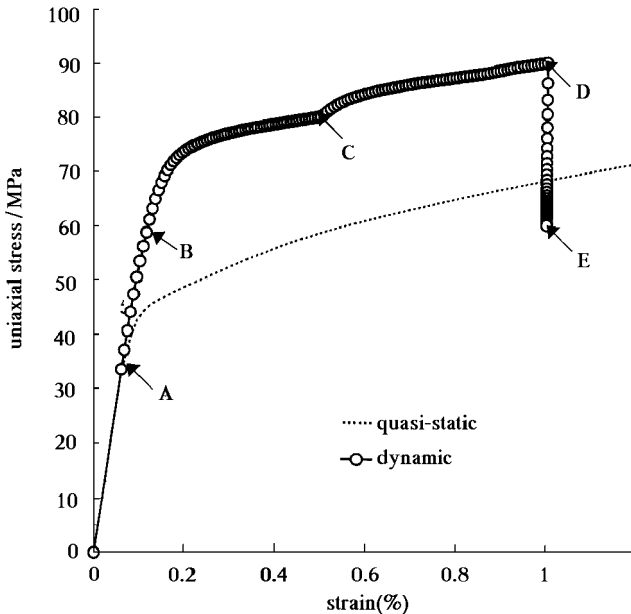


图 1 取向元模拟的率敏感曲线  
Fig. 1 A rate-sensitive test simulated by the Oriented-Element Theory (OET)

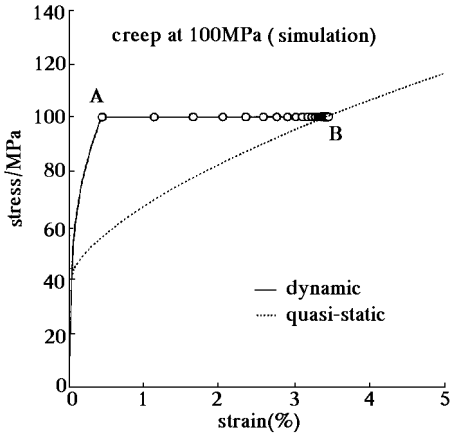


图 2 取向元模拟的蠕变曲线  
Fig 2 A creep test simulated by OET

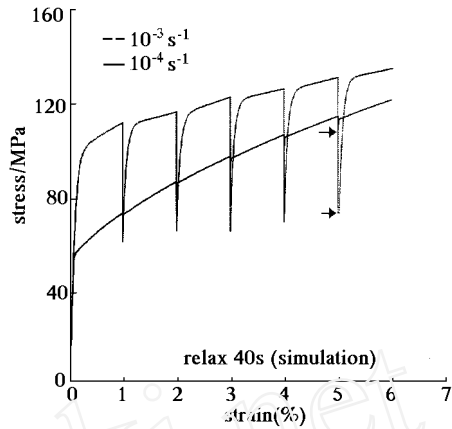


图 3 取向元模拟的重复拉伸-松弛曲线  
Fig 3 A combined tension-relaxation test simulated by OET

Krempf 等做过高温 (538 °C) 下金属材料 (Cr/Mo 钢) 在不同应变率条件下的重复拉伸-松弛实验<sup>[6]</sup>。他们总结出了两个特点: (1) 应变率较低的曲线中应力松弛的量也较低; (2) 应变率较低的曲线中平衡应力高于应变率较高曲线的平衡应力。这两个基本特征, “取向元”模型均能模拟出来, 如图 3 所示

下面我们再用“取向元”模型对 Krempf 等的多边形应变加载实验<sup>[8,9]</sup>作数值模拟。为了强调模型的客观性和可靠性, 我们用同一组模型参数 (见表 1), 分别对简单拉伸, 周期硬化和复杂加载情形逐一进行计算, 如图 4~ 6 所示。应该说, 理论预测的结果与实验数据的符合程度是令人满意的

表 1 取向元模型所用的材料常数

Table 1 Material constants employed in the Oriented-Element Theory (OET)

$E$	$\nu$	$h_0$	$h_{sat}$	$\tau_{r0}$	$\tau_{max}$	$\beta$	$\eta$
65GPa	0.30	2GPa	0	20MPa	80MPa	-1	60MPaSec

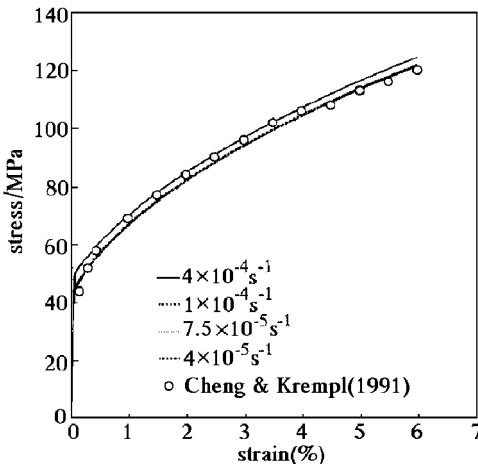


图 4 取向元模拟的一种 Al/Mg 合金的拉伸曲线  
Fig 4 The tension response of an Al/Mg alloy (simulated by OET)

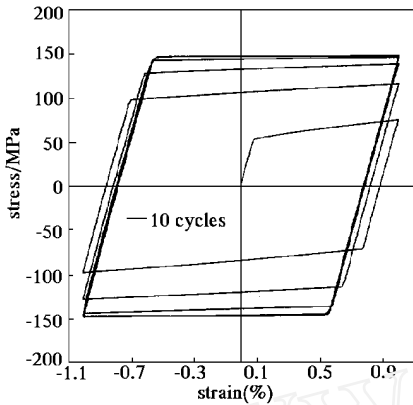


图5 取向元模拟的一种Al/Mg合金的  
周期硬化曲线  
Fig. 5 The cyclic test of an Al/Mg alloy  
(simulated by OET)

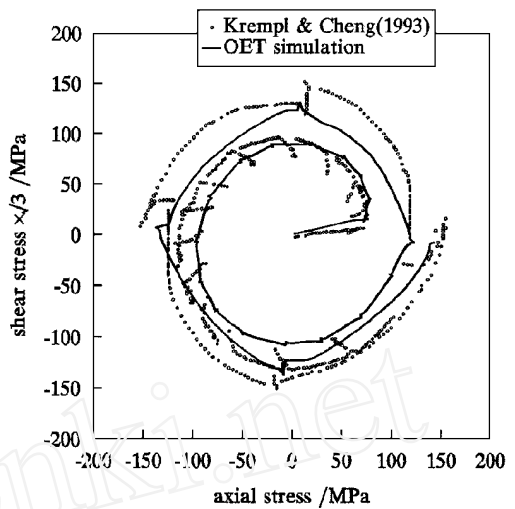


图6 取向元模拟的一种Al/Mg合金对  
复杂应变路径的应力响应  
Fig. 6 The stress responses to a 16-  
side polygonal strain path of an Al/Mg alloy  
(simulated by OET)

## 5 讨论

本文在“三维组集式本构模型”研究的基础上,放弃“均匀应力”假设,发展了一种称之为“取向元”的概念。明确指出可以在取向空间里讨论多晶金属材料应变诱导的各向异性问题。同时由率相关的取向元推导出了多晶金属材料弹粘塑性的本构方程,基本描述了粘塑性理论中的两大问题。数值算例也证实了该模型的合理性。

取向元模型推出的本构方程式不仅数学描述简洁,而且引入了晶体物理机制,因而具有较强的预测能力和一定的适用性。比如对公式(6)中体积分数 $\omega$ 引入一分布规律,则可以考察晶体塑性变形中的结构问题。同时还可以用来反思以往的一些粘塑性模型中存在的问题。如“背应力”能否以张量形式存在,“背应力”与“平衡应力”的联系与区别等等。

值得指出的是:取向元的思想,还可用于处理各向异性损伤问题,这方面的工作见参考文献[14]。下面一个具有挑战性的任务是将“取向元”思想推广到损伤和蠕变相互作用的领域。

## 参 考 文 献

- 1 Liang NG, Bergan PG. A multi-dimensional composite model for plastic continua under multiaxial loading conditions. *Acta Mechanica Sinica*, 1990, 6(4): 357~366
- 2 梁乃刚,程品三. 有限弹性变形的三维组集式本构模型. *力学学报*, 1992, 24(2): 162~170
- 3 Liang NG, Cheng PS. A constitutive model of elastoplastic materials based on fibre-reinforcing and sliding mechanisms. *Science in China*, 1993, A36(6): 692~706
- 4 Ludwik P. *Elemente der Technischen Mechanik*. Berlin, 1909
- 5 杨绪灿等编著. *粘塑性力学概论*. 北京:中国铁道出版社,1985
- 6 Ruggles MB, Cheng S, Krempf E. The rate-dependent mechanical behavior of modified 9wt% Cr-1wt% Mo Steel at 538 °C. *Materials Science and Engineering*, 1994, A186: 15~21



- 7 Majors PS, Krempl E. The isotropic viscoplasticity theory based on overstress applied to the modeling of modified 9wt %Cr- 1wt %Mo steel at 538 °C. *Materials Science and Engineering*, 1994, A 186: 23~ 34
- 8 Cheng S, Krempl E. Experimental determination of strain- induced anisotropy during nonproportional straining of an Al/Mg alloy at room temperature. *International Journal of Plasticity*, 1991, 7: 827~ 846
- 9 Krempl E, Cheng S. The experimental determination of the stress responses of an Al/Mg alloy to a polygonal strain path after three levels of prestraining. *Acta Mechanica*, 1993, 101: 93~ 109
- 10 Krempl E. Models of viscoplasticity: some comments on equilibrium (back) stress and drag stress. *Acta Mechanica*, 1987, 69: 25~ 42
- 11 Lin TH. A physical theory of plasticity and creep. *Transactions of ASME, Journal of Engineering Materials and Technology*, 1984, 106: 290~ 294
- 12 Taylor GI. Plastic strain in metals. *J Inst Metals*, 1938, 62: 307~ 324
- 13 梁乃刚, 徐彤, 王自强. 晶体硬化系数表示式及材料常数标定. *中国科学*, 1995, (A) 25(3): 280~ 287
- 14 Liu HQ, Liang NG. A physical- mechanism- based anisotropic damage- rate- dependent constitutive equation. In: Xu BY and Yang W eds. *Advances in Engineering Plasticity and Its Applications (Proceedings of the Second Asia- Pacific Symposium on Advances in Engineering Plasticity and Its Applications)*. Beijing: International Academic Publishers, 1994, 155~ 160

## AN ORIENTED- ELEMENT THEORY FOR AN ISOTROPIC VISCOPLASTICITY OF POLYCRYSTALLINE METALS

Liu Zhihong Liang Naigang Liu Hongqiu

(Laboratory for Nonlinear Mechanics of Continuous Media

Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

**Abstract** An Oriented- Element Theory (OET) originating with one of the present authors, Liang<sup>[1-3]</sup>, is developed for studying viscoplastic behaviors of polycrystalline metals subjected to complex loading paths. Application of the work- conjugate principle and the field- average method leads to a concept of “oriented- element”, i.e. a representative or an averaged slip system for those practical slip systems that have the same orientations, from which a concise viscoplastic constitutive equation is derived. A number of numerical examples are given to demonstrate OET's modeling capability for dynamic loading, and some of the basic characteristics observed in experiments are reproduced, including creep and relaxation. Good agreements are achieved between the predictions and recent experiment reports<sup>[6-9]</sup>. The versatility of the theory and its possibility of application to the deformation- induced isotropic damage and viscosity- damage interaction are also briefly discussed at the end of the paper.

**Key words** constitutive relations, viscoplasticity, polycrystalline metals