

分段线性系统动力学的非光滑分析¹⁾

胡海岩

(南京航空航天大学振动工程研究所, 南京 210016)

摘要 分析了分段线性系统的非光滑向量场对 Poincare 映射可微性的影响以及由此产生的复杂动力学行为。研究表明: 当周期运动接近鞍结及其退化分叉或以很低速度穿过两线性区的切换面时, 这类系统的动力学行为显著有别于具有光滑向量场的系统。

关键词 分段线性系统, 非光滑分析, 分叉, 解支延续

引言

具有分段线性恢复力的动力学系统(简称分段线性系统)可描述含间隙、弹性约束和摩擦的机械及弹塑性结构, 从而受到力学界的广泛重视。这种系统的向量场分为两类: 一类因刚性约束或干摩擦而不连续; 另一类虽然连续, 但由于间隙或弹性约束引起刚度突变而不光滑。第一类分段线性系统的模型简单, 研究相对较多^[1]; 本文侧重研究第二类分段线性系统。

80 年代以来, 一些学者用动力系统的方法研究了连续分段线性系统, 发现其具有类似光滑动力系统的一些行为。但这些研究基于光滑动力系统理论, 忽略了非光滑向量场的影响或用平滑模型来逼近非光滑模型^[2,3]。因此, 向量场的非光滑性会引起什么动力学新现象尚不清楚。本文将研究非光滑向量场对系统 Poincare 映射可微性的影响, 然后讨论在两种临界情况附近数值仿真所发现的动力学新现象。

1 非光滑向量场对 Poincare 映射的影响

在计入系统控制参数 λ 的扩张相空间中考察一分段线性振子的初值问题

$$\dot{u}(t) = f(u(t), t), \quad u(0) = u_0 \quad (1)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= [x \ y \ \lambda]^T \in R^3 \\ u_0 &= [x_0 \ y_0 \ \lambda_0]^T \in R^3 \\ f(x, y, \lambda, t) &= [y \ f(x, y, \lambda, t) \ 0]^T: R^3 \times R^+ \rightarrow R^3 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$f(x, y, \lambda, t)$ 是周期为 T_0 的外激励与耗散恢复力之和。它关于系统状态 (x, y) 连续但分段线性, 关于控制参数 λ 和时间 t 充分光滑, 并且以 T_0 为周期。

取固定的激励相位作为 Poincare 截面, 截面上的 Poincare 映射定义为

$$u_{n+1} = P(u_n), \quad u_n = u(nT_0), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

¹⁾ 国家自然科学基金、国家教委跨世纪优秀人才基金、国家教委优秀年轻教师基金资助项目。

1995-01-17 收到第一稿, 1995-10-04 收到修改稿。

显见, Poincare 映射的可微性就是系统在 T_0 时刻的状态 $u(T_0)$ 对初始状态 u_0 的可微性当需要明确可微性的自变量时, 文中还采用映射(3)的下述形式

$$P(u) = P(v, \lambda), \quad v = [x, y]^T \quad (4)$$

1.1 系统状态对初始状态的可微性

记 $U(t)$ 为状态 $u(t)$ 对初始状态 u_0 的 Jacobi 矩阵 根据 $f(u, t)$ 对 u 的连续性和分段线性, $U(t)$ 存在且分段满足下述线性扰动微分方程组的初值问题

$$\dot{U}(t) = D_u f(u, t) U(t), \quad U(0) = I \quad (5)$$

为研究 $U(t)$ 关于 u_0 的连续性, 将式(1)和式(5)合并为一个初值问题

$$\dot{\bar{u}}(t) = f(\bar{u}(t), t), \quad \bar{u}(0) = \bar{u}_0 \quad (6)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}(t) &= \left[x \ y \ \lambda \ \frac{\partial x}{\partial x_0} \ \frac{\partial y}{\partial x_0} \ \frac{\partial x}{\partial y_0} \ \frac{\partial y}{\partial y_0} \ \frac{\partial x}{\partial \lambda_0} \ \frac{\partial y}{\partial \lambda_0} \right]^T \\ \bar{u}_0 &= [x_0 \ y_0 \ \lambda_0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]^T \\ \bar{f}(\bar{u}, t) &= \left[y \ f \ 0 \ \frac{\partial y}{\partial x_0} \ \frac{\partial f}{\partial x} \ \frac{\partial x}{\partial x_0} + \frac{\partial f}{\partial y} \ \frac{\partial y}{\partial x_0} \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial y}{\partial y_0} \ \frac{\partial f}{\partial x} \ \frac{\partial x}{\partial y_0} + \frac{\partial f}{\partial y} \ \frac{\partial y}{\partial y_0} \ \frac{\partial x}{\partial \lambda_0} \ \frac{\partial f}{\partial x} \ \frac{\partial x}{\partial \lambda_0} + \frac{\partial f}{\partial y} \ \frac{\partial y}{\partial \lambda_0} \right]^T \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

这组微分方程的向量场是分段线性的, 且在方程(1)向量场的切换面上间断 因方程(1)和方程(5)分别是连续分段线性微分方程和线性微分方程, 故初值问题(6)有唯一解 $\bar{u}(t)$. 据文献[4], 不连续分段线性微分方程的唯一解 $\bar{u}(t)$ 关于 \bar{u}_0 连续, 从而 $U(t)$ 关于 u_0 连续

初值问题(6)对应的线性扰动微分方程组的初值问题为

$$\dot{\bar{U}}(t) = D_{\bar{u}} \bar{f}(\bar{u}, t) \bar{U}(t), \quad \bar{U}(0) = I \quad (8)$$

若轨线 $\bar{u}(t)$ 在时刻 $t = \bar{t}_s$ 穿过切换面 $s(\bar{u}) = 0$, 则 $\bar{U}(t)$ 在该时刻由 $\bar{U}(\bar{t}_s^-)$ 跳到 $\bar{U}(\bar{t}_s^+)$ [4]

$$\bar{U}(\bar{t}_s^+) = \left\{ I + \frac{[f^-(\bar{u}^+, \bar{t}_s^+) - f^-(\bar{u}^-, \bar{t}_s^-)] D_{\bar{u}} s(\bar{u})}{D_{\bar{u}} s(\bar{u}) \cdot f^-(\bar{u}^-, \bar{t}_s^-)} \right\} \bar{U}(\bar{t}_s^-) \quad (9)$$

以系统在位移 x_s 处有一弹性约束为例, 相应的切换面方程为 $s: x - x_s = 0$ 上式简化为

$$\bar{U}(\bar{t}_s^+) = \left\{ I + \frac{[f^-(\bar{u}^+, \bar{t}_s^+) - f^-(\bar{u}^-, \bar{t}_s^-)] n}{y_s} \right\} \bar{U}(\bar{t}_s^-) \quad (10)$$

其中

$$n = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (11)$$

这表明: 若轨线 $u(t)$ 以很低的速度 y_s 穿越切换面, 或系统恢复力在切换面两侧斜率剧变, 则 $U(t)$ 中某些元素会在 \bar{t}_s 时刻大幅度阶跃 当轨线 $u(t)$ 以零速度与切换面相擦边时, $U(\bar{t}_s)$ 中部分元素失去意义而使 $u(\bar{t}_s)$ 关于 u_0 二阶不可微

1.2 Poincare 映射的可微性

根据 Poincare 映射的定义及上述分析, 映射(4)关于系统状态 v 和控制参数 λ 一阶连

续可微 这说明, 连续分段线性振子的周期运动稳定性条件与光滑振子的 Floquet 理论完全相同 为了进一步了解向量场非光滑性对系统动力学分叉的影响, 还需分析 Poincare 映射的高阶可微性

我们先讨论 Poincare 映射关于参数 λ 的二阶可微性 设当 $\lambda = \lambda_k$ 时系统的周期轨道在时刻 t_k 以零速度与某切换面擦边, 当 λ 在 λ_k 附近变化时, 该轨道在 t_k 时刻附近要么穿过该切换面, 要么不再与切换面相接触 根据 (9) 式可得到本文讨论的第一种临界情况

命题 1 如果控制参数为 λ_k 时自 v_0 出发的周期轨道与某切换面相切, 则 Poincare 映射 $P(v_0, \lambda)$ 关于控制参数 λ 的二阶偏导数在 λ_k 处不存在

为了方便地分析 Poincare 映射关于系统状态的二阶可微性, 我们取控制参数为定值 λ 来集中精力研究 Poincare 映射在一个 k 周期不动点 v 附近的性态 参考图 1, 设该不动点恰好落在线性区 G_L 和 G_R 的切换面 P_s 上; 若不然, 可另选激励相位作 Poincare 截面来满足这一假设

根据命题 1, 可在 v 的邻域中将 k 次 Poincare 映射线性化为

$$P^k(v, \lambda) \doteq v + J(v, \lambda)(v - v) + \delta(v) \tag{12}$$

其中

$$J(v, \lambda) = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = D_v P^k(v, \lambda), \quad \det J(v, \lambda) > 0 \tag{13}$$

非奇异映射 (12) 可将过 v 的一直线段 L_s 近似映射到切换面 P_s 上 若 $J_{12} = 0$, 则 L_s 为

$$L_s: v = v + \alpha \xi, \quad \xi = [J_{12} - J_{11}]^T, \quad \alpha \in R^1 \tag{14}$$

映射 (12) 将 L_s 映为

$$P^k(v, \lambda) \doteq v + \alpha J(v, \lambda) \xi = v + \alpha [0 \quad -\det J(v, \lambda)]^T \tag{15}$$

由于 L_s 与 P_s 不平行, $P^k(v, \lambda)$ 将同一直线区内位于 L_s 两侧的两个点分别映射到 P_s 两侧的线性区中 因此, 从这两个点出发的轨线穿越切换面 P_s 的次数将不同 根据 1.1 中的分析, 在线段 L_s 上映射 $P^k(v, \lambda)$ 关于系统状态 v 的二阶偏导数不存在

此外不难证明, 映射 $P^k(v, \lambda)$ 沿不动点不变流形的二阶方向导数是存在的 以不动点是鞍点的情况为例, 映射 $P^k(v, \lambda)$ 将图 1 阴影扇区中的点映到 P_s 另一侧的线性区, 故稳定流形 W^s 和不稳定流形 W^u 均在白色扇区中, 而映射 $P^k(v, \lambda)$ 在白色扇区中二阶可微

上述分析给出了本文所关心的第二种临界情况

命题 2 Poincare 映射 $P^k(v, \lambda)$ 关于系统状态的二阶偏导数在任何对应于非线性周期运动的不动点处均不存在; 但沿不动点不变流形的二阶方向导数存在

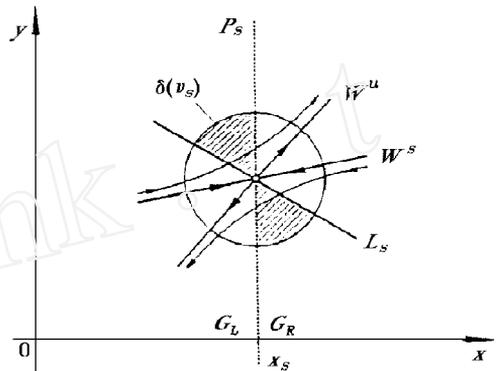


图 1 Poincare 截面上的一个鞍型不动点邻域
Fig. 1 Neighbourhood of a fixed point on the Poincare section

2 数值仿真中的动力学新现象

2.1 分段线性振子及其局部平滑模型

考察一个广泛使用的对称分段线性振子, 其无量纲化后的运动微分方程为

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -g(x) - 2\zeta y + \rho \sin \lambda t, \quad \dot{\lambda} = 0 \tag{16}$$

其中分段线性奇函数 $g(x)$ 描述了由对称弹性约束提供的弹性恢复力

$$g(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1 \\ \mu x + (1-\mu) \operatorname{sgn} x, & |x| > 1 \end{cases} \tag{17}$$

仿真试验中取激励频率 λ 为控制参数, 而刚度比 μ , 阻尼比 ζ 和无量纲激励幅值 ρ 保持不变

作为对比, 我们还考察一具有光滑向量场的振子. 它与上述振子的区别是在刚度突变处 ± 0.01 范围内用多项式取代原来的折线, 使拐角得三次以上的平滑, 故被称作局部平滑模型

2.2 非精确不动点问题

研究周期激励系统的首要任务通常是确定周期运动, 即 Poincare 映射的不动点. 对强非线性状态的分段线性系统, 这需借助数值方法. 现研究映射在近似 k 周期不动点 v_k 附近的特性. 据命题 2, 若 v_k 落入阴影扇区则 Poincare 映射沿其不变流形的二阶方向导数不存在. 更进一步, 若其 Jacobi 矩阵的一个特征值接近 1, 则可由 Lyapunov-Schmidt 方法将映射约化到一维流形上讨论. 在该流形上用局部坐标 w 表示 Poincare 映射, 其最简单的非退化形式为

$$q(w) = a_{10}w + a_{01}v + a_{20}^{\pm}w^2, \quad v = \lambda - \lambda_0 \tag{18}$$

其中

$$a_{10} = 1, \quad a_{01}a_{20}^{\pm} < 0, \quad a_{20}^{\pm} = \begin{cases} a_{20}^-, & w < 0 \\ a_{20}^+, & w \geq 0 \end{cases} \tag{19}$$

由图 2 易见: 若 $a_{20}^-a_{20}^+ > 0$, 则 Poincare 映射的分叉图与鞍结分叉图相似; 但若 $a_{20}^-a_{20}^+ < 0$, 则分叉图类似于一迟滞点, 而迟滞点在参数 a_{10} 偏离 1 的任意小扰动下是非持久的

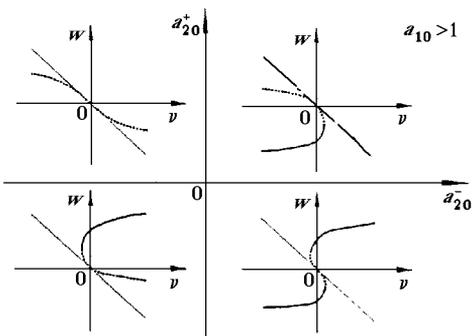


图 2 约化后 Poincare 映射的分叉图
 ——stable, ----unstable
 Fig. 2 Bifurcation diagram of reduced Poincaré mapping

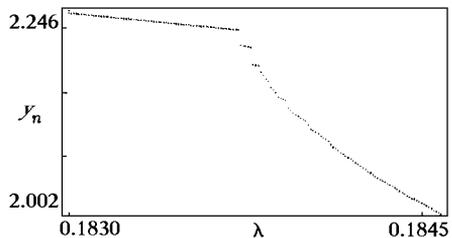


图 3 不精确的周期 1 解支图
 ($\mu = 0.1, \zeta = 0.03, \rho = 1.25$)
 Fig. 3 Branch of a P-1 orbit

我们用定步长为 $10^{-3}T_0$ 的 Runge- Kutta 法计算一稳定周期 1 不动点, 图 3 是它关于激励频率的变化关系。解支在由 $J(v, \lambda)$ 的特征值监视到的一个分叉点附近分成若干段, 表现出上述非持久跳跃现象。但这种跳跃来自不动点的精度不够高。当我们用分段线性系统在各线性区中的状态变迁公式来取代 Runge- Kutta 法积分后, 解支变为连续曲线。再用同样步长的四阶 Runge- Kutta 法求解局部平滑模型, 也获得了连续的解支, 从而证实了非光滑恢复力是这一现象的起因。详细的分析表明, 在上述频带中该解支仅有一 Pitchfork 分叉^[5]。

这一现象说明: 当连续分段线性系统的周期运动接近分叉时, 数值解必须有很高的精度才能提供正确信息。由于对工程问题用状态变迁公式编写程序相当复杂, 仍考虑用 Runge- Kutta 法求高精度的周期解: 在轨线穿越切换面的积分步中将步长缩小到 $10^{-5}T_0$, 而其它积分步仍用大步长。这样仅增加极少的机时消耗, 但使分叉点附近的周期解精度大大提高, 解支保持连续。

2.3 周期解支延续中的突发分叉

延续算法是揭示非线性系统动力学关于控制参数变化的有力工具。算法的关键之一是用检测函数的外插值来估计控制参数的分叉值, 选择适宜的延续步长。检测函数是控制参数 λ 的实值函数, 其根对应控制参数的分叉值。对于不动点 v_0 的鞍结及其退化分叉, 常用的检测函数为

$$\tau(\lambda) = \det(J(v_0, \lambda) - I) \quad (20)$$

根据命题 2.2, 当 $\lambda = \lambda_c$ 时若系统由不动点 v_0 出发的周期轨道与某切换面相切, 则 $J(v_0, \lambda)$ 在 $\lambda = \lambda_c$ 处关于 λ 不光滑; 故 $\tau(\lambda)$ 在 $\lambda = \lambda_c$ 处非光滑, 其外插值无法提供正确的分叉点信息。

数值仿真中, 我们随激励频率由 $\lambda = 0.2305$ 下降用延续算法跟踪系统的一个稳定周期 1 解支。在 λ 到达 0.2298 之前, 图 4 中实线所代表的检测函数一直表明该解支有很好的稳定性, 似乎远离任何鞍结分叉。然而, 该周期轨道在 $\lambda = 0.2298$ 时与两个弹性约束相擦边。随着 λ 进一步减小, 检测函数突然改变了变化趋势。当 $\lambda = 0.2297$ 时, 检测函数为零, 从而有鞍结分叉发生。值得注意的是, 控制参数不足 0.05% 的变化就完全否定了根据检测函数所作的预估。这种由周期轨道与弹性约束擦边引起的分叉具有严重的突发性, 是光滑动力系统理论所不能预测的。

在实践中, 许多连续分段线性系统的恢复力模型是可以局部平滑模型来代替的。图 4 中的虚线是局部平滑模型相应的检测函数, 显然它比较平滑。这一现象鼓励我们尽可能地使用局部平滑模型, 从而避免在解支的延续中处理擦边现象带来的困难。

上述周期轨道的擦边现象与文献[1]中冲击振子的轴道擦边现象类似, 是连续分段线性系统最引人注目的特征之一。人们自然会关心: 这种现象是否时常发生? 我们的数值仿真表明: 只要连续分段线性系统受到足

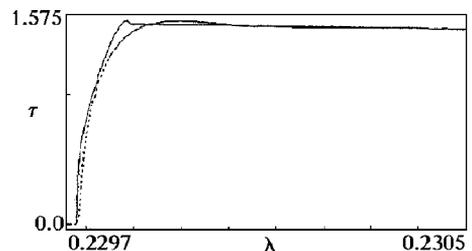


图 4 跟踪周期 1 解支的检测函数
($\mu = 5.0, \zeta = 0.03, \rho = 10.0$)
Fig 4 Test functions in tracing a P-1 orbit

会关心: 这种现象是否时常发生? 我们的数值仿真表明: 只要连续分段线性系统受到足

够强的简谐激励,在工程上感兴趣的激励频带中就有非常丰富的各种擦边周期运动^[6].

3 结 论

连续分段线性系统向量场的非光滑性破坏了 Poincare 映射在不动点处关于系统状态的二阶可微性;若系统的周期轨道与某切换面相切,这种非光滑性还破坏 Poincare 映射关于控制参数的二阶可微性.当系统的周期运动接近鞍结分叉和相应退化分叉,或当周期轨道以极低速度穿过切换面时,上述二阶可微性的丧失会给系统数值仿真带来一系列新问题,出现用光滑动力系统理论难以解释的现象.研究表明采用局部平滑模型是克服数值仿真困难的简便方法.

参 考 文 献

- 1 Nordmark AB. Non- periodic motion caused by grazing incidence in an impact oscillator, *Journal of Sound and Vibration*, 1991, 145(2): 279~ 297
- 2 Shaw SW, Holmes PJ. A periodically forced piecewise linear oscillator, *Journal of Sound and Vibration*, 1983, 90(1): 129~ 155
- 3 Kleczka M et al. Local and global stability of a piecewise linear oscillator, *Transactions of the Royal Society of London*, 1992, 338(A): 533~ 546
- 4 Filippov AF. *Differential Equations with Discontinuous Right- Hand Sides*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1988. 87~ 122
- 5 Hu Haiyan. Symmetry and Bifurcations of the Periodic Response of an Externally Forced Symmetrical Oscillator, *Journal of Vibration on Engineering*, 1994, SEI 26~ 35
- 6 Hu Haiyan. Periodic grazing orbits and incident bifurcations of a periodically forced piecewise- linear oscillators. In: Zheng Zhaochang. *Proceedings of International Conference on Vibration Engineering* Beijing: International Academic Publishers, 1994. 317~ 322

NONSMOOTH ANALYSIS OF DYNAMICS OF A PIECEWISE LINEAR SYSTEM

Hu Haiyan

(Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract Begins with analyzing the effect of nonsmooth vector field of a piecewise- linear system on the differentiability of the Poincare mapping, then, presents the dynamics complexity of the system through numerical simulations. The study shows that the system differs greatly in dynamics from a system with smooth vector field, when its periodic motion approaches a bifurcation of saddle- node (or relevant degenerated) type or penetrates a switching plane between two linear regions at very low velocity.

Key words piecewise- linear system, nonsmooth analysis, bifurcation, solution continuation