

# 梯度塑性的有限元分析及应变局部化模拟<sup>1)</sup>

李锡夔 S. Cescotto<sup>+</sup>

(大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室, 大连116023)

<sup>+</sup> (M. S.M. Department, University of Liege, Belgium)

**摘要** 对梯度塑性连续体提出了一个有限元方法. 内状态变量的 Laplacian 的确定基于它在求积点邻域的最小二乘方多项式近似. 具体地考虑了具有一点求积和 Hourglass 控制特点的基于胡海昌-Washizu 变分原理的混合应变元和单元平均意义下的 von-Mises 屈服准则. 解析地导出了梯度塑性下一致性单元切线刚度矩阵和速率本构方程的一致性积分算法. 在所建议的非局部化途径中求积点的一致性条件在非局部化意义下逐点精确满足. 数值例题表明所提出的非经典连续体的有限元方法求解应变局部化问题的有效性.

**关键词** 梯度塑性, 应变局部化, 有限元, 一致性算法

## 引 言

由应变软化引起的应变局部化现象常常与结构承载能力的急剧下降相联系, 因此局部化现象的发生和发展往往被看作为工程结构破坏的开端和结构失效. 在过去十年中已有大量的工作致力于这个现象的理论、实验及数值模拟研究. 基于经典连续介质力学理论的局部化行为数值模拟的大量工作已经表明所取得的结果是不能令人满意的. 经典(局部)的连续体模型的基本缺陷在于它们没有包含内部长度参数或高阶连续结构, 因而当局部化发生时在拟静力荷载下的控制方程将丧失椭圆型, 成为数学上病态提法的问题以及问题的数值模拟结果病态地依赖于有限元网格, 并且当有限元网格加密时, 应变软化部位的能量逸散将被错误地估计为零, 其结果将收敛到不正确的没有物理意义的有限元解<sup>[1]</sup>.

已有许多努力致力于克服上述困难, 但有效的且具根本性的补救措施是在连续体中引入正则化机制以保持控制方程的椭圆型. 当前引入正则化机制的途径主要有三条. 一条途径是仍采用经典连续体的本构方程, 但包含了某种粘性效应<sup>[2]</sup>, 但这个途径的有效性依赖于包含在本构模型中粘性效应的量. 另一条途径是采用引入了高阶连续结构的 Cosserat 连续体理论<sup>[3-6]</sup>, 在这个途径中对连续体引入了旋转自由度, 相应于由旋转自由度产生的微曲率, 引入了一个与微曲率能量共轭的对偶应力, 以及作为正则化机制在本构方程中具有“特征长度”意义的内部长度参数. de Borst<sup>[5]</sup>推导了 von-Mises 屈服准则下的弹塑性 Cosserat 连续体公式. Fleck 和 Hutchinson<sup>[6]</sup>在这个途径下进一步研究了不可压缩塑性体 ( $J_2$ -塑性流动) 在小应变假定下的应变梯度理论. 在他们以复合材料为背景所提出的唯象理论中, 对作为高阶连续项的微曲率赋予了相应的物理意义: 在 von-Mises 有效应变度量统计意义下贮存的位错所造成的硬化基础上, 由微曲率张量定义的不变量则被用以度量由于

<sup>1)</sup> 国家自然科学基金和教委博士点基金资助项目.

1995-09-07收到第一稿, 1995-12-31收到修改稿

几何上所必须的位错所造成的硬化. 以 Cosserat 连续体理论为基础的途径的主要缺点在于在纯拉压荷载下作为正则化机制而引入的对偶应力将不起作用, 因而退化为经典的连续体理论. 最后一条途径是采用非经典 (非局部化) 的连续体理论, 其基本思想是以不同方式引入了梯度项. Lasry 和 Belytschko<sup>[7]</sup>在应变-位移关系中引入了位移的高阶梯度项, 而 Afantis, Muhlhaus, de Borst 和 Sluys<sup>[8-12]</sup>则是在非弹性本构方程中引入了描述非弹性变形的内状态变量的某种梯度, 相应于这些内状态变量的梯度项, 在材料模型中引入了作为正则化机制的内部长度参数. Pijaudier-Cabot 和 Bazant<sup>[13]</sup>以积分形式定义了非局部化的内状态变量, 等等.

基于梯度塑性途径, 本文提出了一个考虑有限应变和应用混合应变元的梯度弹塑性连续体有限元方法. 解析地导出了梯度塑性下一致性单元切线刚度矩阵和速率本构方程的一致性积分算法. 虽然每个求积点的屈服条件不再是局部的, 然而对荷载增量步的每次迭代求积点的一致性条件在非局部化意义下逐点精确满足. 塑性乘子仍处理为在每个求积点处定义而在非局部化意义上确定的内状态变量. 塑性乘子 (有效塑性应变) 的 Laplacian 的确定基于它在求积点邻域的最小二乘方多项式近似. 由于塑性乘子并不取作为独立的全局未知量, 因此不存在对塑性乘子插值的形函数所要求  $C^1$  连续性.

虽然在本文的公式推导中具体地考虑了具有一点求积和 Hourglass 控制特点的基于胡海昌-Washizu 变分原理的二维四节点混合应变元和单元平均意义下的 von Mises 屈服准则, 本文所提出的推导梯度弹塑性有限元公式的方法可用于位移元和较为一般的屈服条件和非局部化软化规律.

## 1 梯度 von Mises 塑性模型的本构方程

弹塑性材料的速率本构方程可写为

$$\dot{\sigma} = D_e \dot{\epsilon} = D_e (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) = D_e \left( \dot{\epsilon} - \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) \quad (1)$$

式中  $\dot{\sigma}$  是应力速率;  $\dot{\epsilon}$ ,  $\dot{\epsilon}^p$  和  $\dot{\epsilon}$  分别是总应变速率和它的弹塑性部分;  $D_e$  是弹性模量矩阵;  $\lambda$  是塑性乘子率;  $f$  是屈服函数, 对于梯度 von Mises 塑性, 屈服条件可表示为

$$f = f(\sigma, \bar{\epsilon}^p, \nabla^2 \bar{\epsilon}^p) = \bar{\sigma}(\sigma) - \sigma_y(\bar{\epsilon}^p, \nabla^2 \bar{\epsilon}^p) = 0 \quad (2)$$

式中  $\bar{\epsilon}^p$  表示有效塑性应变, 有效应力定义为

$$\bar{\sigma} = \left( \frac{3}{2} S^T S \right)^{1/2} \quad (3)$$

式中  $S$  是偏应力向量; 而  $\sigma_y$  表示当前屈服应力. 可以注意到, 在本文的梯度塑性模型中, 应力、应变虽仍定义为局部的量, 但与经典的塑性理论不同, 式 (2) 中定义的  $\sigma_y$  不仅依赖于内状态变量  $\bar{\epsilon}^p$  的局部值, 且与它的非局部值, 即它的 Laplacian 值有关. 假定  $\sigma_y$  为  $\bar{\epsilon}^p$  的分片线性函数和  $\bar{\epsilon}^p$  的 Laplacian 的线性函数

$$\sigma_y = \sigma_{y0} + h_p (\bar{\epsilon}^p) \bar{\epsilon}^p - C \nabla^2 \bar{\epsilon}^p \quad (4)$$

式中  $\sigma_{y0}$  是初始屈服强度,  $h_p$  是依赖于  $\bar{\epsilon}^p$  的硬化或软化参数,  $C$  是非局部化材料参数且定义为

$$C = \frac{\partial \sigma_y}{\partial \nabla^2 \bar{\epsilon}^p} \quad (5)$$

式 (4) 也可改写为

$$\sigma_y = \sigma_{y0} + h_p \left[ \bar{\epsilon}^e - \frac{C}{h_p} \nabla^2 \bar{\epsilon}^e \right] \quad (6)$$

当材料软化, 即  $h_p < 0$  时, 令

$$l = \sqrt{-\frac{C}{h}} \quad (7)$$

则式 (6) 又可改写为

$$\sigma_y = \sigma_{y0} + h_p \bar{\epsilon}^e + l^2 \nabla^2 \bar{\epsilon}^e \quad (8)$$

式中  $l$  是非局部化材料内部 (特征) 长度参数. (4) ~ (8) 式所表示的非局部化应变硬化/软化规律顾及了剪切带一类应变局部化问题中塑性变形的不均匀演化过程. 与传统的塑性模型相比, 非局部化梯度塑性模型中的梯度项补充了局部点邻域的材料行为的信息. 当标志材料不稳定性的应变局部化过程发生时, 它与内部长度参数  $l$  一起构成了保证问题保持为原有椭圆型的正则化机制.

根据 (1) ~ (3) 式以及有效塑性应变定义  $\Delta \bar{\epsilon}^e = \left[ \frac{2}{3} \Delta \epsilon^{eT} \Delta \epsilon^e \right]^{1/2}$  可得

$$\dot{\lambda} = \dot{\bar{\epsilon}}^e \quad (9)$$

考虑由时间  $t$  到  $t + \Delta t$  的荷载增量步, 由方程 (1) 积分并映射到塑性流动方向, 可得标量本构方程

$$\bar{\sigma}_{t+\Delta t}^e = \bar{\sigma}_{t+\Delta t}^e - K_E \Delta \lambda \quad (10)$$

式中  $K_E = 3G$  ( $G$  是剪切模量) 是有效弹性刚度, 以及

$$\bar{\sigma}^e = \left[ \frac{3}{2} S^{eT} S^e \right]^{1/2} \quad (11)$$

$S^E$  是  $\sigma^e$  的偏量, 弹性试应力  $\bar{\sigma}_{t+\Delta t}^e$  定义为

$$\bar{\sigma}_{t+\Delta t}^e = D_e (\epsilon_{t+\Delta t} - \epsilon^e) \quad (12)$$

因而给定应变下屈服函数的变化率可表示为

$$\dot{f} = - (K_E + h_p) \dot{\lambda} + C \nabla^2 \dot{\lambda} \quad (13)$$

可以看到, 与经典计算塑性不同的是塑性乘子将不可能在求积点局部地确定.

## 2 混合应变元

本文所应用的二维四节点混合应变元<sup>[14]</sup>基于胡海昌 Washizu 变分原理以及具有单元一点求积和 Hourglass 控制的特点. 并且由于采取共旋公式<sup>[15]</sup>, 单元对大转角和大应变均有效. 在本文工作的共旋公式中, 采用了共旋 Cauchy 应力张量  $\sigma$ , 它可被认为是参考与物体共旋的“局部坐标”而表示的 Cauchy 应力张量  $\sigma_0$ , 即  $\sigma = T \sigma_0 T^T$ , 式中  $T$  是任意线元  $r$  参考全局坐标系表示的  $r_0$  到参考“局部坐标”系表示的  $r_l$  之间的变换矩阵, 即  $r_l = T r_0$ . 相应地, 与共旋 Cauchy 应力能量共轭的虚应变度量是 A m a n s i 应变定义下的 R i v l i n - E r i k s o n 应变

速率 (十分接近于一种对数应变度量). 单元位移场假定为经典的自然坐标  $\xi$ ,  $\eta$  的双线性函数, 而单元的应力与应变场假定为

$$\epsilon = \bar{\epsilon} + h_{,\alpha} \dot{\epsilon}, \quad \sigma = \bar{\sigma} + h_{,\alpha} \dot{\sigma} \quad (14)$$

式中  $\bar{\epsilon} = [\epsilon_x \ \epsilon_y \ \epsilon_z \ \epsilon_{xy}]^T$  和  $\bar{\sigma} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \sigma_{xy}]^T$  表示单元内的常应变、常应力场, 而 (14) 的两式中作为消除单元零能模式与自锁现象的右端第二项在单元内随坐标而变

$$h_{,\alpha} = \begin{bmatrix} h_{,x} & -h_{,y} \\ -h_{,x} & h_{,y} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad h = \frac{A_e}{4} \xi \eta \quad (15)$$

$$\dot{\epsilon} = [\dot{\epsilon}_1 \ \dot{\epsilon}_2]^T, \quad \dot{\sigma} = [\dot{\sigma}_1 \ \dot{\sigma}_2]^T \quad (16)$$

式中  $A_e$  是有限元面积. 式 (3) 中定义的有效应力由它在单元内的平均值代之, 即

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{A_e} \int_{A_e} \left( \frac{3}{2} S^T S \right)^{1/2} dA_e \quad (17)$$

相应地  $\bar{\sigma}^E$  及它的速率能写成

$$\bar{\sigma}^E = \frac{1}{A_e} \int_{A_e} \left( \frac{3}{2} S^{E^T} S^E \right) dA_e \quad (18)$$

$$\dot{\bar{\sigma}}^E = \frac{3G}{\sigma} \left[ S^{E^T} P \dot{\bar{\epsilon}} + \frac{2}{A_e} \sigma^{E^T} H \dot{\epsilon} \right] \quad (19)$$

式中塑性势矩阵及  $H$  矩阵可表示成

$$P = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$H = \begin{bmatrix} H_{xx} & -H_{xy} \\ -H_{xy} & H_{yy} \end{bmatrix}, \quad H_{ij} = \int_{A_e} h_{,i} h_{,j} dA_e \quad (21)$$

### 3 非局部化速率本构方程的一致性积分算法

考虑一个典型的时间步  $[t, t + \Delta t]$  以及处于塑性屈服下的一个任意材料点  $i$ , 当前  $k$  迭代的屈服条件能以迭代方式写成

$$f_{i,k} = f_{i,k-1} + \delta f_i = f_{i,k-1} - (K_E + h_p)_i \delta(\Delta \lambda) + C \nabla^2 \delta(\Delta \lambda) = 0 \quad (22)$$

式中

$$f_{i,k-1} = \bar{\sigma}_{i,k-1} - (\sigma_{\alpha,i} + h_{p,i} \bar{\epsilon}_{i,k-1} - C \nabla^2 \bar{\epsilon}_{i,k-1}) \quad (23)$$

为计算  $\nabla^2 \Delta \lambda$ , 考虑围绕积分点  $i$  的相邻积分点. 令  $N_i$  是积分点  $i$  的相邻积分点数, 我们能以  $\Delta \lambda_j (j \in N_i)$  表示  $\nabla^2 \Delta \lambda$

$$\nabla^2 \Delta \lambda = \sum_{j=1}^{N_i} g_{ij} \Delta \lambda_j \quad (24)$$

为确定系数  $g_{ij}$ , 假定以一个完备的二阶多项式表示积分点  $i$  邻域的塑性乘子场

$$\Delta \lambda = a^T v \quad (25)$$

式中

$$a = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6]^T \quad (26)$$

$$v = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2]^T \quad (27)$$

向量  $a$  的各分量由使

$$\text{Error} = \sum_{j=1}^{N_i} (\Delta \lambda_j - \Delta \lambda_j)^2 \quad (28)$$

最小化获得

$$a = G^{-1} \sum_{j=1}^{N_i} \Delta \lambda_j v_j \quad (29)$$

式中  $v_j$  是相邻积分点  $j$  的向量  $v$ , 以及

$$G = \sum_{j=1}^{N_i} v_j v_j^T \quad (30)$$

因而式 (21) 中的系数  $g_{ij}$  能由下式确定

$$g_{ij} = g^T v_j \quad (31)$$

式中

$$g^T = 2[G^{-1} \text{的第四行} + G^{-1} \text{的第六行}] \quad (32)$$

可以注意到系数  $g_{ij}$  仅仅依赖于相邻积分点的坐标. 积分点  $i$  的相邻积分点的选择简单地根据网格拓扑. 一般地, 它们是积分点  $i$  所在单元的相邻单元的积分点的集合. 然而, 如果在此集合中的积分点数量不足以计算  $G^{-1}$  (即  $G$  是奇异的或者病态), 例如对于网格边界或角点处单元内的积分点, 则若干非直接的相邻单元 (积分点  $i$  的相邻单元的相邻单元) 中的积分点将被收集入这个集合以确定  $g_{ij}$ .

值得指出的是所假定的积分点  $i$  邻域处塑性乘子函数多项式近似仅仅是作为近似地确定  $\nabla^2 \Delta \lambda$  的一个手段, 它并不意味着对塑性乘子本身引入最小二乘方意义上的近似.

将式 (21) 代入 (19) 得到对每个积分点  $i$  的  $\delta(\Delta \lambda)$  如下

$$\delta(\Delta\lambda) = \frac{f_{i,k-1} + C \sum_{j=1, j \neq i}^{N_i} g_{ij} \delta(\Delta\lambda_j)}{(K_E + h_p)_i - C g_{ii}} \quad (33)$$

#### 4 梯度 von-Mises 塑性的一致性单元切线矩阵

为保证全局牛顿迭代的二阶收敛率, 必须对梯度 von-Mises 弹塑性导出非局部化意义上的一致性切线矩阵. 作为非局部化的应力-应变速率本构关系, 积分点  $i$  处应力速率  $\dot{\sigma}_i$  不仅依赖于积分点  $i$  处并且还依赖于它的相邻积分点处的内状态变量, 因此可写为

$$\dot{\sigma}_i = \sum_{j=1}^{N_r} D_{ep,j} \dot{\epsilon}_j \quad (34)$$

式中  $N_r$  是积分点  $i$  所在的弹塑性区中的积分点总数. 然而根据数值观察, 仅仅属于积分点  $i$  的那些相邻积分点  $j$  处的  $D_{ep,j}$  才在式 (31) 中对  $\dot{\sigma}_i$  有真正的影响, 因此可足够精确地假定

$$\dot{\sigma}_i = \sum_{j=1}^{N_i} D_{ep,j} \dot{\epsilon}_j \quad (35)$$

令  $L(i)$  和  $N(i)$  分别表示积分点  $i$  的相邻积分点的集合和集合中积分点数. 定义交  $L_i(k) = L(i) \cap L(k)$  并令  $N_i(k)$  为此交中的积分点数. 将式 (10) 的变化率代入  $f^{\circ}_k = 0$  可得在  $t + \Delta t$  时刻每个积分点  $k \in L(i)$  的一致性条件

$$(K_E + h_p)_{k,t+\Delta t} \dot{\epsilon}_{k,t+\Delta t} - C \sum_{j=1, j \in L_i(k)}^{N_i(k)} g_{kj} \dot{\epsilon}_{j,t+\Delta t} = \dot{\sigma}_{k,t+\Delta t} \quad (36)$$

由方程组 (36) 的求解得到每个积分点  $k \in L(i)$  处的有效塑性应变率

$$\dot{\epsilon}_{k,t+\Delta t} = \sum_{j=1}^{N(i)} p_{kj} \dot{\sigma}_{j,t+\Delta t} \quad (37)$$

将式 (37) 代入对积分点的方程 (10) 的速率形式得到

$$\dot{\sigma}_{i,t+\Delta t} = \left( \frac{h_p}{K_E + h_p} \right)_i \dot{\sigma}_{i,t+\Delta t} + \sum_{j=1}^{N(i)} \eta_j \dot{\sigma}_{j,t+\Delta t} \quad (38)$$

式中

$$\eta_j = \delta_{ij} \left[ 1 - \frac{h_p}{K_E + h_p} \right]_i - K_{E,i} p_{ij} \quad (39)$$

将式 (19) 代入式 (38), 并经过一番常规演绎可得到应力率  $\dot{\sigma}_i$  在单元内所作虚功的积分

$$\int_{A_e} \delta \epsilon^T \dot{\sigma}_i dA_e = [\delta \bar{\epsilon} \quad \delta \epsilon^T] \left[ \begin{array}{cc} C_{11,i}^I & C_{12,i}^I \\ C_{21,i}^I & C_{22,i}^I \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \dot{\bar{\epsilon}} \\ \dot{\epsilon}^T \end{array} \right\} + \sum_{j=1}^{N_i} \left[ \begin{array}{cc} C_{11,ij}^I & C_{12,ij}^I \\ C_{21,ij}^I & C_{22,ij}^I \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \dot{\bar{\epsilon}} \\ \dot{\epsilon}^T \end{array} \right\} \quad (40)$$

式中局部的一致性切线模量子矩阵

$$\left. \begin{aligned} C_{11,i}^l &= A_{e_i} (\beta_2 P - \beta_3 P \bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_i^T P) + \frac{EA_{e_i}}{3(1-2\nu)} mm^T \\ C_{12,i}^l &= -2\beta_3 P \bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_i^T H_i \\ C_{21,i}^l &= -2\beta_3 H_i \bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_i^T P \\ C_{22,i}^l &= 2\beta_2 H_i - \frac{4\beta_3}{A_{e_i}} H_i \bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_i^T H_i \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

以及非局部的一致性切线模量子矩阵

$$\left. \begin{aligned} C_{11,ij}^{nl} &= \eta_{ij} \frac{3A_{e_j} G_j}{\sigma_i \sigma_j} P \bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_j^T P \\ C_{12,ij}^{nl} &= \eta_{ij} \frac{3A_{e_j} G_j}{A_{e_j} \sigma_i \sigma_j} P \bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_j^T H_j \\ C_{21,ij}^{nl} &= \eta_{ij} \frac{6G_j}{\sigma_i \sigma_j} H_i \bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_j^T P \\ C_{22,ij}^{nl} &= \eta_{ij} \frac{12G_j}{A_{e_j} \sigma_i \sigma_j} H_i \bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_j^T H_j \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

式 (41) 中  $m = [1 \ 1 \ 1 \ 0]^T$  以及系数

$$\beta_2 = 2G_i \frac{\bar{\sigma}_i}{\sigma_i}, \quad \beta_3 = \frac{3G_i}{\sigma_i} \left( \frac{\bar{\sigma}_i}{\sigma_i} - \frac{h_{p,i}}{(K_E + h_p)_i} \right) \quad (43)$$

为利用混合应变元分析有限应变和 (或) 有限转角几何非线性问题, 在本文工作中采用了共旋公式. 对每一个单元在单元形心嵌入一个局部坐标系并与单元一起旋转, 单元位移、应变和应力参考单元当前构形的局部坐标系计算<sup>[14]</sup>.

### 5 数值例题

数值例题中数据和结果的量纲为:  $L_0, B_0, y, l$  等: mm;  $E, \sigma_o, h_p, C$  等: N/mm<sup>2</sup>.

考虑如图 1(a) 所示初始长度  $L_0 = 5$  和初始宽度  $B_0$  的矩形板, 它离散为规则的  $N \times M$  四节点混合应变元网格. 它的下端固定而在顶部承受一个水平方向的单调增长的指定位移, 并作为一个平面应变问题分析. 为使例题成为纯剪问题, 排除所有节点的垂直方向位移以及强迫位于网格中同一水平网线上的各节点具有相同的水平位移.

为表明本文所建议的梯度塑性有限元方法成功地克服了分析结果病态地依赖于网格划分的问题, 考虑例题 1. 在此例中指定四种情况, 它们的宽度  $B_0$  和网格密度不同: (1)  $B_0 = 3, M = 5, N = 3$ ; (2)  $B_0 = 1.75, M = 15, N = 5$ ; (3)  $B_0 = 1, M = 25, N = 5$ ; (4)  $B_0 = 0.7, M = 35, N = 5$ . 全板的材料弹性性质:  $E = 210\ 000$  和  $\nu = 0$ . 除  $y = -0.5$  和  $y = 0.5$  之间的区段, 其余部分的材料初始屈服强度  $\sigma_o = 240$ , 而介于  $y = -0.5$  和  $y = 0.5$  之间区段的材料初始屈服强度已削弱至  $\sigma_o = 230$ . 全板的材料应变软化参数  $h_p = -10$

000, 非局部化材料参数  $C = 2000$ . 相应地, 材料内部长度参数可计算得  $l = \sqrt{-\frac{C}{h_p}} = 0.447\ 21$ .

如图 1 (b) 和图 1 (c) 所示, 虽然  $3 \times 5$  单元网格划分的解稍偏离于收敛解 (不难理解和

解释), 但另外三种情况的数值结果非常一致. 图1 (b) 表示了剪应力-上端部指定水平位移曲线的收敛性. 图1 (c) 表示了在上端部指定水平位移值  $\Delta u = 8.56 \times 10^{-2}$  时有效塑性应变沿  $y$  轴的分布, 由于对称性仅图示在板的一半上的分布, 值得注意的是后三种不同情况的局部

化区域的宽度的数值解与由  $w = 2\pi\sqrt{-\frac{C}{h_p}^{[11]}}$  确定的解析解非常一致.

www.cnki.net

图1 (b) 板顶指定水平位移-剪应力曲线

Fig. 1 (b) Shear stress curves with increasing prescribed displacement in  $x$  axis at the top of the plate

图1 (c) 沿  $y$  轴有效塑性应变分布

Fig. 1 (c) Effective plastic strain distribution along  $y$  axis of the plate

例题2显示局部化区域宽度对非局部化材料参数  $C$  (材料内部长度参数  $l$ ) 的相关性. 考虑三种情况, 它们皆具有与例题1情况 (2) 相同的尺寸、单元网格和初始屈服强度. 为表明所建议的方法在有限应变条件下有效, 采用  $E = 10\ 000$ ,  $\nu = 0$ ,  $h_p = -2\ 500$ . 三种不同情况



下: (1)  $C = 450$ , (2)  $C = 275$ , (3)  $C = 100$ . 图2 (a) 给出了三种情况下剪应力-上端水平指定位移曲线, 而图2 (b) 显示了局部化区域宽度以及有效塑性应变分布. 可以看到, 较大的  $l(C)$  值相应于较宽的局部化区域和较低的有效塑性应变值. 这是由于非局部化效应在较宽局部化区域下具有较多的材料贡献其承载能力以抵抗塑性变形的进一步发展.

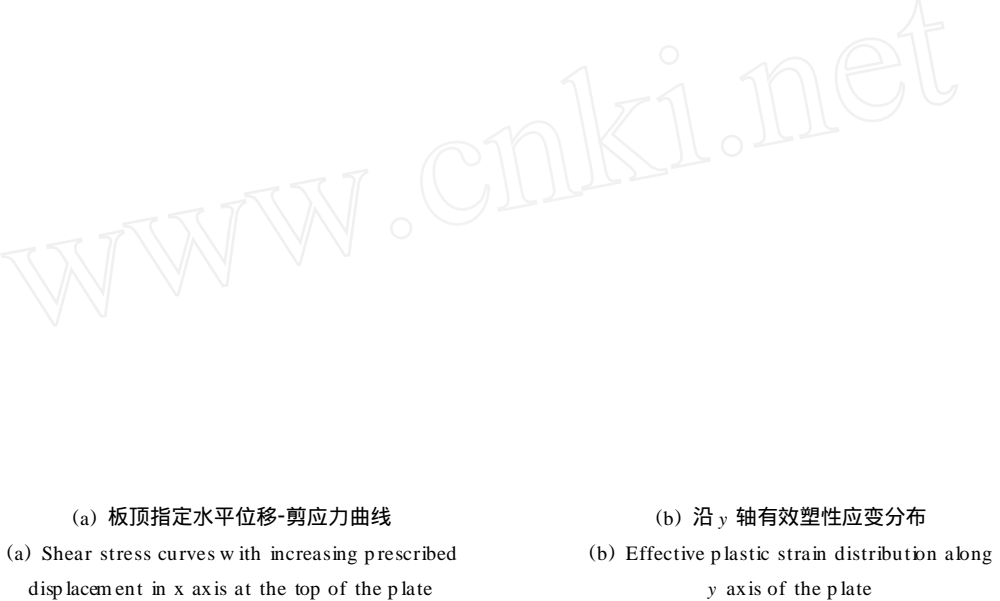


图2 不同非局部化材料塑性参数  $C$  下的变化

Fig. 2 For different values of the non-local material plastic parameter  $C$

## 参 考 文 献

- 1 Bazant ZP, Belytschko T, Chang TP. Continuum theory for strain softening. *J of Engng Mech ASCE*, 1984, 110: 1666~ 1692
- 2 Needleman A. Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems. *Comp Meth Appl Mech Eng*, 1988, 67: 69~ 86
- 3 Eringen AC, Edelen DG. On nonlocal elasticity. *Int J Engng Sci*, 10: 233~ 248
- 4 Mühlhaus HB. Application of Cosserat theory in numerical solutions of limit load problems. *Ing Arch*, 1989, 59: 124~ 137
- 5 de Borst R. Simulation of strain localization: A reappraisal of the Cosserat continuum. *Engineering Computations*, 1991, 8: 317~ 332
- 6 Fleck NA, Hutchinson JW. A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity. *J Mech Phys Solids*, 1993, 41: 1825~ 1857
- 7 Lasry D, Belytschko T. Localization limiters in transient problems. *Int J Solids Structures*, 1988, 24: 581~ 597
- 8 Aifantis EC. On the microstructural origin of certain inelastic models. *Trans ASME J Engng Mat Tech*, 1986, 106: 326~ 330
- 9 Aifantis EC. The physics of plastic deformation. *Int J Plasticity*, 1988, 3: 211~ 247
- 10 Mühlhaus HB, Aifantis EC. A variational principle for gradient plasticity. *Int J Solids Structures*, 1991, 29: 845~ 857
- 11 de Borst R, Mühlhaus HB. Gradient-dependent plasticity: formulation and algorithmic aspects. *Int J Numer Meths Engng*, 1992, 35: 521~ 539
- 12 Sluys LJ, de Borst R, Mühlhaus HB. Wave propagation, localization and dispersion in a gradient-dependent medium. *Int J Solids Structures*, 1993, 30: 1153~ 1171

- 13 Pijaudier- Cabot G, Bazant ZP. Nonlocal damage theory. *J Engng Mech ASCE*, 113: 1512~ 1533
- 14 Jetteur Ph, Cescotto S. A mixed finite element for the analysis of large inelastic strains. *Int J Numer Methods Engng*, 1991, 31: 229~ 239
- 15 Marsden JE, Hughes TJR. Mathematical foundations of elasticity. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1983
- 16 Li Xikui, Cescotto S. Finite element method for gradient plasticity at large strains. *Int J Numer Methods Engng*, 1996, 39: 619~ 633
- 17 Simo JC, Taylor RL. Consistent tangent operations for rate independent plasticity. *Comp Meth Appl Mech Engng*, 1985, 48: 101~ 118
- 18 Zienkiewicz OC, Taylor RL. The Finite Element Method, Vol. 1, 4th Edn. McGraw- Hill, 1989
- 19 Zienkiewicz OC, Taylor RL. The Finite Element Method, Vol. 2, 4th Edn. McGraw- Hill, 1991

## FINITE ELEMENT ANALYSIS FOR GRADIENT PLASTICITY AND MODELLING OF STRAIN LOCALIZATION

Li Xikui S. Cescotto<sup>+</sup>

(National Laboratory for Structural Analysis of Industrial Equipment,  
Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

<sup>+</sup> (M.S.M. Department, University of Liege, Belgium)

**Abstract** A finite element method for gradient plastic continuum is presented. The Laplacian of the internal state variable is determined on the basis of a least square polynomial approximation of the internal state variable around each integration point. A mixed strain element with one point quadrature and hourglass control derived from the Hu- Washizu principle and the average von-Mises yield criterion are particularly considered. The consistent element stiffness matrix and consistent algorithm for the integration of the rate constitutive equation for the gradient plasticity are analytically derived. The consistency condition is exactly satisfied at each integration point in the non-local sense in the proposed approach. The numerical examples illustrate the capability and performance of the present finite element method for the non-classical continuum in solving for the strain localization problems.

**Key words** gradient plasticity, strain localization, finite element, consistent algorithm