第 28 卷 第 5 期
1996 年 9 月
ACTA MECHANICA SINICA
Vol 28, No. 5
Sept, 1996

弹/粘塑性柱体扭转问题的位移解

刚芹果
(河北大学数学系, 保定 071002)

摘要 利用位移通解, 讨论了柱体的弹-粘塑性扭转问题.

关键词 柱体扭转, 位移法, 弹/粘塑性

在文 [1] 中, 曾利用 Laplace 变换, 求解这一问题. 但这种方法, 对 $t=0$ 时刻应力和应变的取值是很模糊的. 另外, 不同半径处, 进入粘塑性状态的时间也不同. 为此, 本文采用位移的通解形式, 重新求解这一问题.

半径为 a 的圆柱体, 在扭矩 $M(t)$ 的作用下, 若 $y=0$ 端固定 (y 为轴向). 则其位移 u 通解为[1]

$$u(r, y, t) = ry\mathbf{F}(t) \tag{1}$$

$\mathbf{F}(t)$ 为时间 t 的待定函数, 并假设 $\mathbf{F}(t)$ 为单调增函数, 即不考虑卸载过程. 无论是弹性状态还是粘塑性状态, 上式都成立.

控制方程为[1]

$$\begin{aligned} &Gr\mathbf{F}(t) = \tau && (\tau \leq K) \\ &r\dot{\mathbf{F}}(t) = \frac{1}{G}\tau' + \frac{1}{\eta}(\tau - K) && (\tau \geq K) \end{aligned} \tag{2}$$

K 是屈服应力. τ 为剪应力, 是 r 和 t 的函数. $\dot{\mathbf{F}}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{F}(t)}{\mathrm{d}t}$, $\tau' = \frac{\partial\tau}{\partial t}$.

由 (2) 式的第一个方程得半径 r 处进入粘塑性状态 ($\tau = K$) 的时间 t_1 为

$$t_1 = \mathbf{F}^{-1}\left(\frac{K}{Gr}\right) \tag{3}$$

$\mathbf{F}^{-1}$ 为 $\mathbf{F}$ 的反函数. 当 $t \geq t_1$ 时, r 处已进入粘塑性状态, 应用式 (2) 的第2个方程, 并注意到 $t = t_1$ 时, $\tau = K$, 得其解为

$$\tau(r, t) = K + rG\int_{t_1}^{t}\dot{\mathbf{F}}(\tau)e^{-\frac{G}{\eta}(t-\tau)}\mathrm{d}\tau \tag{4}$$

根据平衡条件

$$2\pi\int_0^a \tau r^2\,\mathrm{d}r = M(t) \tag{5}$$

并考虑到 $t = t_0$ 时, 弹粘塑性交界面为 b, 由上式得

$$\frac{G}{4}F(t_0)b^4 + \frac{K}{3}(a^3 - b^3) + G\int_b^a r^3\left[\int_{t_1}^{t_0}\dot{\mathbf{F}}(\tau)e^{-\frac{G}{\eta}(t_0-\tau)}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}r = \frac{M(t)}{2\pi} \tag{6}$$

注意上式中的 t_1 为 r 的函数 (见 (3) 式). 由式 (3) 还可知, t_0 与 b 之间的关系为

$$t_0 = \mathbf{F}^{-1}\left(\frac{K}{Gb}\right) \tag{7}$$

1995-10-30收到.

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

由 (6) 和 (7) 式组成了该问题的求解方程. 已知 t_0 和 $\mathbf{F}$ (t), 由 (6) 和 (7) 式可求得 b 和 M (t) . 或由已知 t_0 和 M (t), 求得 b 和 $\mathbf{F}$ (t) . 但由于 (6) 和 (7) 式都是很复杂的非线性方程, 所以求其解析解, 将是很困难的. 若不考虑 (6) 式左端第三项, 则为理想弹塑性情况[2].

对于中空的圆柱扭转问题, 有类似分析. (略)

参 考 文 献

1 贾乃文. 弹/粘塑性柱体扭转问题的函数 Laplace 变换解. 力学学报, 1995, 27 (4): 434～439

2 徐秉业, 陈森灿. 塑性理论简明教程. 北京: 清华大学出版社, 1981

DISPLACEMENT METHOD OF ELASTIC/VISCOPLASTIC TORSIONAL COLUMN

Gang Qinguo

(Dept. of Mathematics, Hebei University, Baoding 071002, China)

Abstract The displacement general solution is used to discuss the torsion of elastic/viscoplastic column.

Key words torsion of column, displacement method, elastic/viscoplastic

对“弹/粘塑性柱体扭转问题的函数Laplace 变换解”一文的讨论

胡　辉

(邵阳高等专科学校, 湖南邵阳 422004)

1995年第4期《力学学报》上的“弹/粘塑性柱体扭转问题的函数 Laplace 变换解”一文对实心圆柱体的弹/粘塑性扭转问题进行了很好的讨论. 然而对于复连通域的空心圆柱体, 该文中的 (19) 式有误, 应该是

$$M = 2\pi b^2 \phi_b + 2\int_0^{2\pi}\int \phi \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \tag{1}$$

式中 $\phi_b = \phi|_{r=b}$, 对上式进行拉氏变换得

$$M/S = 2\pi b^2 \bar{\phi}_b + 2\int_0^{2\pi}\int \bar{\phi} \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \tag{2}$$

将该文中 (14) 式 $\bar{\phi}$ 之值代入上式可解得

$$\bar{F}_1 = \frac{2M(s/G + 1/\eta)}{\pi a^4(1 - \alpha^4)s^2} - \frac{4K(1 - \alpha^3)}{3\eta a(1 - \alpha^4)s^2} \tag{3}$$

式中 $\alpha = b/a$, 上式代入

1995-09-26收到.

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net