

CML 模型的时空混沌

刘兆存

(中国水利水电科学研究院水力学研究所, 北京 100038)

摘要 提出了一类新的耦合映射格点 (CML) 模型。数值实验表明这类新的 CML 模型对于强弱耦合系统均能有效研究其时空复杂性, 揭示了非线性、耗散、色散相互作用的非常丰富的时空 Pattern 行为。

关键词 CML 模型, 时空混沌, Pattern

引言

耦合映射格点 (CML) 动力系统模型的特点是时间和空间离散, 而状态为连续, 它既能使低维动力学理论运用到高维系统, 又能观察到随着参数改变时相应时空 Pattern 的变化情况。本文中提出了新的强弱耦合情形下能同时模拟非线性、耗散、色散相互作用的 CML 模型, 数值模拟表明模型是合理有效的。

1 CML 模型

受文献 [1] 的启发, 深入分析后认为更适合模拟非线性机制如湍流等的应是如下的 CML 模型

$$\left. \begin{aligned}
 & \left[1 + \frac{\beta}{2} \times C_{IP} \times f(x_{n-1}(1)) + \epsilon \right] x_n(1) - \\
 & \left[\frac{\epsilon}{2} - \frac{\beta}{2} \times C_{IE} \times f(x_{n-1}(1)) \right] x_n(2) = \\
 & f(x_{n-1}(1)) + \left[\frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} \times C_{IW} \times f(x_{n-1}(1)) \right] f(x_{n-1}(N)) - \\
 & \left[\frac{\epsilon}{2} + \frac{\beta}{2} \times C_{IW} \times f(x_{n-1}(i)) \right] x_n(i-1) + \\
 & \left[1 + \frac{\beta}{2} \times C_{IP} \times f(x_{n-1}(i)) + \epsilon \right] x_n(i) - \\
 & \left[\frac{\epsilon}{2} - \frac{\beta}{2} \times C_{IE} \times f(x_{n-1}(i)) \right] x_n(i+1) = f(x_{n-1}(i)) \\
 & (i = 2, 3, \dots, N-1) \\
 & - \left[\frac{\epsilon}{2} + \frac{\beta}{2} \times C_{IW} \times f(x_{n-1}(N)) \right] x_n(N-1) + \\
 & \left[1 + \frac{\beta}{2} \times C_{IP} \times f(x_{n-1}(N)) + \epsilon \right] x_n(N) = \\
 & f(x_{n-1}(N)) + \left[\frac{\epsilon}{2} - \frac{\beta}{2} \times C_{IE} \times f(x_{n-1}(N)) \right] f(x_{n-1}(1))
 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

上式中

$$\left. \begin{aligned} C_N &= [[\operatorname{sgn}(x_{n-1}(i)), 0]] \\ C_{IE} &= [[\operatorname{sgn}(-x_{n-1}(i)), 0]] \quad (i = 1, 2, \dots, N) \\ C_{IP} &= \operatorname{sgn}(x_{n-1}(i)) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中 n 是时间, i 是格点 ($i = 1, 2, \dots, N$; N 是系统的大小), ϵ 是耦合强度, $f(x)$ 为 Logistic 映射, $f(x) = 1 - ax^2$, $[[\]]$ 示取其中项的最大者, sgn 是符号函数, 变量为正、零、负时分别取 1, 0, -1.

和模型 (1) 相比还同时可以模拟色散机制 (除非线性, 耗散机制外) 的是如下的 CML 模型

$$\left. \begin{aligned} [1 + \epsilon - \beta(1 - f(x_{n-1}(1)))]x_n(1) - \frac{\epsilon}{2}x_n(2) &= f(x_{n-1}(1)) + \frac{\epsilon}{2}f(x_{n-1}(N)) - \\ \frac{\epsilon}{2}x_n(i-1) + [1 + \epsilon - \beta(1 - f(x_{n-1}(i)))]x_n(i) - \frac{\epsilon}{2}x_n(i+1) &= \\ f(x_{n-1}(i)) \quad (i = 2, 3, \dots, N-1) & \\ - \frac{\epsilon}{2}x_n(N-1) + [1 + \epsilon - \beta(1 - f(x_{n-1}(N)))]x_n(N) &= \\ f(x_{n-1}(N)) + \frac{\epsilon}{2}f(x_{n-1}(1)) & \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

或为模型

$$\left. \begin{aligned} [1 + \epsilon + \beta f(x_{n-1}(1))]x_n(1) - \frac{\epsilon}{2}x_n(2) &= (1 + \beta)f(x_{n-1}(1)) + \frac{\epsilon}{2}f(x_{n-1}(N)) - \\ \frac{\epsilon}{2}x_n(i-1) + [1 + \epsilon + \beta f(x_{n-1}(i))]x_n(i) - \frac{\epsilon}{2}x_n(i+1) &= \\ (1 + \beta)f(x_{n-1}(i)) \quad (i = 2, 3, \dots, N-1) & \\ - \frac{\epsilon}{2}x_n(N-1) + [1 + \epsilon + \beta f(x_{n-1}(N))]x_n(N) &= \\ (1 + \beta)f(x_{n-1}(N)) + \frac{\epsilon}{2}f(x_{n-1}(1)) & \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

模拟行波状 Pattern 的模型为

$$x_{n+1}(i) = [1 - \epsilon - \epsilon + \beta(1 - f(x_n(i)))]f(x_n(i)) + \epsilon f(x_n(i+1)) + \epsilon f(x_n(i-1)) \quad (5)$$

且模型 (5) 中取周期边界条件, 仅显示 $x_n(i)$ 不小于 $(\sqrt{1+4a}-1)/(2a)$ 的部分.

在模型 (1), (3), (4) 中经分析认为 $f(x) = 1 - ax^2$ 中 $a \in [0, 2]$, 即 $x_n(i)$ 可取负值, $|\beta| < 1$.

静态 Pattern 熵值计算用

$$S_P = - \sum_j Q(j) \log Q(j) \quad (6)$$

其中 $Q(j)$ 为空间点进入长为 j 的域的概率

2 模型的数值模拟和结果分析

在模型 (1), (3) ~ (5) 中, 其初值采用赋予区间 $[-1, 1]$ 中随机数的方法 数值模拟结果表明 ϵ 值的增加可使系统状态趋于规则均匀 a 值增加使系统状态趋于混乱 模型 (1) 中 β 值增加同 a 值增加情形 模型 (3), (4) 的结构、功能相近, 负 β 值有维持系统规则有序的作用, 正 β 值使系统变得混乱 模型 (5) 的状态明显取决于 $e-\epsilon$ 的值, 和 β 值的变化关系不密切 模型 (1) 的数值模拟结果表 1 给出; 模型 (3) 的示于表 2, 图 1; 模型 (4) 的示于表 3, 图 2; 模型 (5) 的示于图 3

数值模拟的结果表明我们提出的模型是可行的, 其结果是合理的^[2,3], 且含有更为丰富的时空 Pattern 行为 清楚揭示了非线性、耗散、色散机制的相互作用对时空处于混沌态的模型的影响

表 1

Table 1

No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
A	1.44	1.44	1.44	1.44	1.44	1.54	1.74	1.80	1.80	1.80	1.80	1.80	1.80
E	0.10	0.10	0.10	0.70	1.30	3.00	3.00	1.90	2.70	3.00	3.00	3.00	3.00
B	0.00	0.05	0.30	0.00	0.50	0.20	0.50	0.00	0.70	0.00	0.10	0.30	0.70
S _P	1.74	1.82	1.94	1.84	1.86	2.06	2.16	2.17	2.17	2.17	2.17	2.18	2.18

表 2

Table 2

No.	1	2	3	4	5	6
A	1.72	1.72	1.72	1.72	1.72	1.72
E	3.00	3.00	3.00	3.00	3.00	3.00
B	-0.47	-0.37	-0.20	0.00	0.13	0.17
S _P	1.99	2.04	2.09	2.13	2.19	2.19

表 3

Table 3

No.	1	2	3	4	5
A	1.72	1.72	1.72	1.72	1.72
E	3.00	3.00	3.00	3.00	3.00
B	-0.27	-0.17	-0.09	0.00	0.19
S _P	2.03	2.07	2.07	2.13	2.19

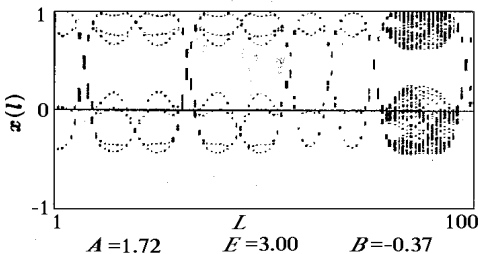


图 1
Fig 1

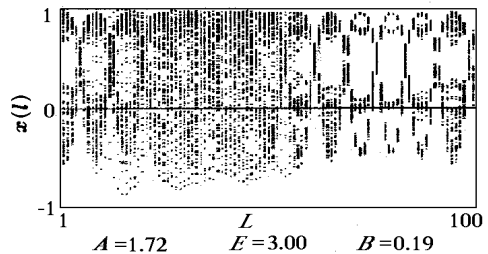


图 2
Fig 2

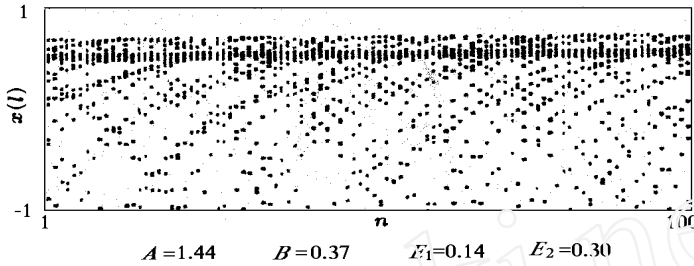


图3
Fig. 3

3 结 论

数值模拟的结果说明了 CML 模型在演化过程中产生的 Pattern 在演化过程中竞争的结果一方面使演化对初始条件和模型参数很敏感具有不稳定性而使演化表现出一定的随机性而造成不可逆, 另一方面在模型参数一定的情形下各种 Pattern 态竞争的结果又表现出一定程度的整体稳定性而形成至少在统计意义上的一定的空间图型 这种性态非常类似于物理上的湍流现象

致谢 衷心感谢河海大学金忠青、肖勇先生对作者在河海大学学习期间所给予的指导和帮助 衷心感谢中国水利水电科学研究院水力学所李世琴、谢省宗对本文工作的支持

参 考 文 献

- 1 黄欣等 时空 Chaos 研究中的 CML 模型 应用数学和力学, 1993, 14 (10): 919~ 928
- 2 陈曦等 非均匀耦合映射中的行波状 Pattern 科学通报, 1992, 37 (8): 764~ 765
- 3 Kaneko K. Pattern dynamics in spatiotemporal Chaos Physica, 1989, D34: 1~ 41

CML MODELS FOR SPATIOTEMPORAL CHAOS

Liu Zhaojun

*Dept. of Hydraulics, China Institute of Water Resources and
Hydro-power Research, Beijing 100038, China*

Abstract Some new coupled map lattice (CML) models are developed. Numerical results show that the new models not only are effective to study both weakly and strongly coupled systems spatiotemporal chaos but also reveal abundant spatiotemporal pattern evolution in different nonlinear dissipative dispersive terms.

Key words CML model, spatiotemporal chaos, pattern