

# 动态裂纹扩展中的分形效应<sup>1)</sup>

谢和平

(中国矿业大学, 徐州 221008;

中国科学院力学研究所 LNM 开放实验室, 北京 100080)

David J. Sanderson

(英国南安普敦大学)

**摘要** 假设裂纹顶端沿着分形轨迹运动, 建立了裂纹扩展的分形弯折 (kinking) 模型来描述裂纹的动态扩展. 根据这个模型, 我们推导了分形裂纹扩展对动态应力强度和裂纹速度的影响. 动态应力强度因子与表观应力强度因子之比  $K(l(t), V)/K(L(t), 0)$  是表观裂纹速度  $V_0$ , 材料微结构参数  $(d/\Delta a)$ , 分维  $D$  和裂纹扩展路径的弯折角  $\theta$  的函数. 本文研究结果表明: 在分形裂纹扩展中, 表观 (或量测) 的裂纹速度  $V_0$  很难接近 Rayleigh 波速  $C_r$ . 动态断裂实验中  $V_0$  明显低于  $C_r$  的原因可能是分形裂纹扩展效应所致. 材料的微结构, 裂纹扩展路径的分维和弯折角均很强地影响动态应力强度因子和裂纹扩展速度.

**关键词** 裂纹扩展, 动态断裂, 分形裂纹路径, 分形弯折模型, 分形效应

## 引 言

材料在动、静载作用下裂纹扩展的研究工作无论在理论上还是在工程应用上都具有很重要的意义, 然而难度也相当大. Freund<sup>[1]</sup> 最近对裂纹扩展问题的研究进展已进行很好的总结. 在动态断裂领域, 实测值与理论分析一直存在较大差距, 无法达到一致<sup>[2]</sup>. 例如, 大多数材料的实测裂纹速度  $V_0$  明显地低于 (约为一半) 理论预测的裂纹速度 (Rayleigh 波速  $C_r$ ). 在高应力速率下, 理论预测的动态应力强度因子  $K(l(t), V)$  很难与其实测值达到一致<sup>[1,2]</sup>. 引起这些偏差的可能原因是当前动态断裂理论总是假设裂纹是沿光滑直线扩展的. 而事实并非如此, 大多数裂纹是沿不规则路径传播, 并产生粗糙断裂表面<sup>[2-7]</sup>. 最近 Watanabe<sup>[6]</sup>, Goldstein & Lewandowski<sup>[7]</sup>, Guo<sup>[2]</sup> 和 Xie & Sanderson<sup>[16]</sup> 已经分析了粗糙裂纹表面对裂纹扩展速度和动态应力强度的影响. 特别是 Guo<sup>[2]</sup> 提出了一个波状裂纹模型来描述裂纹曲线地扩展的影响. 所有这些研究表明使用当前的动态断裂理论很难使理论值与实测值达到定性和定量的一致.

由 Mandelbrot 发展的分形理论<sup>[8,9]</sup> 已在众多领域中得到应用. 分形的两个基本特性是分维和自相似性. 自相似性就是标度不变性, 也就是物体 (或集合) 的任一部

<sup>1)</sup> 国家自然科学基金项目, 国家重大基础性理论课题“非线性科学”和国家教育委员会跨世纪优秀人才计划项目资助.

1993-09-25 收到第一稿, 1994-02-07 收到修改稿.

分放大后与其整体相似. 从微观断裂到大尺度断裂(地震)都已普遍发现这种自相似性规律<sup>[10-15]</sup>, 目前人们已广泛地应用分形几何来描述裂纹的不规则性和断裂表面的粗糙性<sup>[10,12-14]</sup>.

本文将应用分形几何来描述动态裂纹扩展的不规则性, 建立了一个分形裂纹扩展模型来分析分形裂纹扩展对动态应力强度因子和裂纹速度的影响.

## 1 分形裂纹扩展对裂纹速度的影响

大量实验表明<sup>[1,5,12-14]</sup>在快速断裂中即使大多数脆性材料也产生粗糙的断裂表面和不规则扩展路径, 如图版 I 照片 1 和图 1 所示. 已有许多研究者<sup>[17-19]</sup>使用不同的理论模型来分析这些曲线式(curved)和弯折式(kinked)裂纹扩展. Guo<sup>[2]</sup>提出了波状裂纹模型来描述不规则裂纹扩展. Xie<sup>[3,4]</sup>和 Xie & Sanderson<sup>[16]</sup>使用分形几何分析了裂纹扩展的不规则性. 我们考虑间隔长度  $L_0$  内的裂纹长度(这里  $L_0$  可以选择为裂纹扩展增量步长  $\Delta a$ ), 由于裂纹扩展的弯曲性, 其实际或“微观”裂纹扩展长度  $l$  大于  $L_0$ . 当假设裂纹扩展的不规则路径具有自相似性特征时<sup>[12-16]</sup>, 由分形理论<sup>[8,9]</sup>, 我们有

$$l = L_0^D \delta^{1-D} \quad (1)$$

式中  $L_0$  也称为表观或“宏观”裂纹长度(见图 1).  $\delta$  是量测码尺, 它取决于自相似性存在的范围,  $D$  为分维. 注意到这里引出的“微观”和“宏观”两个名词不是物理学中的通常定义, 而是为了刻画裂纹扩展的局部和表观尺度特性. 在表观尺度上看裂纹扩展, 裂纹路径是光滑的规则曲线, 但局部上看裂纹扩展总是弯弯曲曲的和不规则的. 在分形数学中, 分形裂纹的长度随  $\delta$  的减小而增加, 也就是当  $\delta \rightarrow 0$  时,  $L_{(\delta)} \rightarrow \infty$ (见方程 (1)). 但是裂纹扩展事件是自然分形, 裂纹长度是有限的, 存在一个标度不变性的范围, 即  $\delta_{\min} \leq \delta \leq \delta_{\max}$ . 在这个范围内, 裂纹扩展的自相似性统计地存在,  $\delta_{\min}$  就是断裂表面的最小粗糙尺寸, 由材料微结构决定<sup>[16]</sup>. 根据当前的研究, 晶粒尺寸可以认为是裂纹不规则扩展的最小粗糙性尺度<sup>[3,4,10-14]</sup>, 因为实验已表明<sup>[11-13]</sup>: 断裂表面的粗糙性和不规则性主要是由材料的沿晶断裂和穿晶断裂导致. 这样,  $\delta_{\min}$  就可近似为材料的晶粒尺寸  $d$ . 方程 (1) 成为

$$l/L_0 = (d/L_0)^{1-D} \quad (2)$$

现在考虑图 1 所示的分形裂纹扩展.  $x$ -轴是裂纹扩展主方向,  $V_0$  表示表观(实测)裂纹速度.  $V$  是分形裂纹速度或局部裂纹速度. 当裂纹在宏观(表观)传播方向扩展增量步长  $L_0 = \Delta a$  时, 并假设  $V$  在此增量步内为常数, 则我们有

$$\frac{\Delta a}{V_0} = \frac{\Delta a (d/\Delta a)^{1-D}}{V} \quad (3)$$

或 
$$V/V_0 = (d/\Delta a)^{1-D} \quad (4)$$

式中  $(d/\Delta a) \leq 1$ , 可看作为材料微结构参数, 因为  $d$  是晶粒尺寸,  $\Delta a$  是裂纹扩展步长. 注意到  $\Delta a$  的取值范围就是粗糙裂纹的自相似性存在的尺度范围, 由  $(d/\Delta a) \leq 1$

可确定其下限  $(\Delta a)_{\min} = d$ . 上限  $(\Delta a)_{\max}$  取决于平直裂纹的视域尺度, 即在视域尺度上考察到裂纹已接近平直裂纹 ( $D = 1$ ) 时, 该视域尺度就为  $(\Delta a)_{\max}$ .

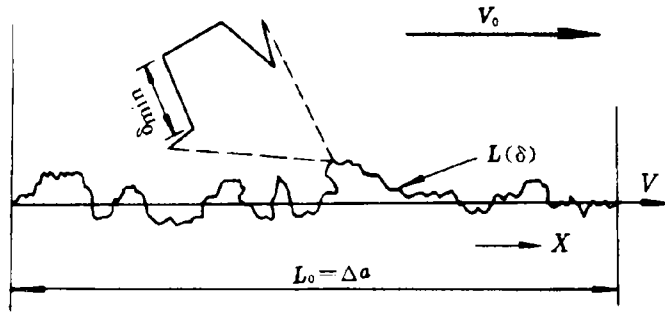


图 1 分形裂纹扩展模型

Fig.1 Illustration of a fractal crack propagation path.  $L_0$  is the apparent crack length, which is chosen here as the apparent incremental step length of crack extension.  $L(\delta)$  is the fractal crack length, measured using the scale  $\delta$ .  $\delta_{\min}$  is the smallest roughness scale on a fracture surface, determined by the microstructure of the material.  $V_0$  is the apparent crack velocity, and  $V$  is the fractal crack velocity or the local crack tip velocity.

方程 (4) 表明: 速度比  $V/V_0$  取决于材料的晶粒尺寸, 裂纹扩展步长以及裂纹扩展路径的分维或粗糙度. 在分形裂纹扩展中,  $(d/\Delta a) < 1$  和  $(1 - D) < 0$ , 因此局部裂纹速度  $V$  随  $D$  的增加而增加. 图 2 给出了  $V/V_0$  随  $D$  的变化曲线. 在中等裂纹表面粗糙度时 ( $D = 1.2-1.3$  时), 局部裂纹速度  $V$  就能达到表观 (量测) 裂纹速度  $V_0$  的两倍. 这可能就是为什么目前的实测速度值与理论预测值无法定量比较的理由之一. Xie & Sanderson<sup>[16]</sup> 已经定量地详细讨论了这个问题.

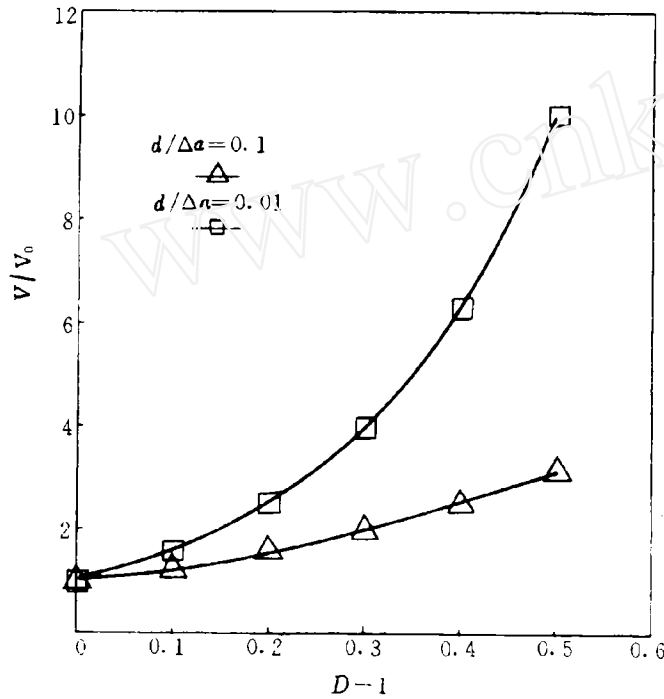


图 2  $V/V_0$  随分维  $D$  的变化曲线

Fig.2 Graph of the change tendency of  $V/V_0$  with the fractal dimension ( $D$ ) of fracture surfaces.  $V$  is the fractal crack velocity or the local crack tip velocity.

## 2 沿分形路径扩展的裂纹顶端运动

考虑含半平面裂纹的弹性体承受模型 I 平面应变的时间无关荷载作用. 假设裂纹顶端位于  $y = 0$  平面的  $x = 0$  位置. 根据动态断裂理论<sup>[1]</sup>, 在平面  $(x > 0, y = 0)$  的法向应力分布是  $\sigma_{yy} = P(x, 0)$ . 如果裂纹顶端位于  $x = L^*$ , 对于时间无关荷载作用下, 其法向应力为  $P(x, L^*)$ . 定义  $t = 0$  时裂纹开始扩展,  $t > 0$  裂纹顶端位置为  $x = l(t)$ . 函数  $l(t)$  满足分形曲线的定义即它是连续的, 处处不可微的. 这个函数也满足其物理条件, 即其裂纹扩展速度将小于或等于材料的 Rayleigh 波速, 也就是  $0 \leq V \leq C_r$ .

根据分形插值理论<sup>[20-22]</sup>, 函数  $l(t)$  能由分段插值函数  $L(t)$  来近似.  $L(t)$  的顶点位于分形曲线  $l(t)$  上 (见图 3). 定义递推插值点  $t_k = K\Delta t (K = 0, 1, 2, \dots)$ , 对应这些插值点  $l(t)$  的位置为  $(0, 0), (t_1, L_1), \dots, (t_k, L_k), \dots$ . 在这些插值点上  $L_k = l(t_k) = L(t_k)$ . 这样, 可认为在间隔  $t_k < t < t_{k+1} (k = 0, 1, 2, \dots)$  裂纹顶点以常速  $V_k = (L_{k+1} - L_k) / (t_{k+1} - t_k)$  运动<sup>[1]</sup>. 根据 Freund 动态断裂理论<sup>[1]</sup>, 在任一间隔  $t_k < t < t_{k+1}$ , 其应力强度因子可由递推方法得出

$$K(L(t), V_k) = h(V_k)K(L(t), 0) \quad (5)$$

式中

$$K(L(t), 0) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{L(t)} \frac{P(x, 0)dx}{[L(t) - x]^{1/2}} \quad (6)$$

$$h(V) = (1 - V/C_r) / (1 - V/C_d)^{1/2} = (1 - V/C_r) / [1 - (V/C_r)(C_r/C_d)]^{1/2} \quad (7)$$

这里  $h(V)$  称为裂纹速度的普适函数<sup>[1]</sup>.  $C_d$  为弹性膨胀波速.  $(C_r/C_d)$  能近似为<sup>[1]</sup>

$$C_r/C_d = (0.862 + 1.14\nu) / \left\{ (1 + \nu) \left[ \frac{2(1 - \nu)}{1 - 2\nu} \right]^{1/2} \right\} \quad (8)$$

式中  $\nu$  是泊松比. 从式 (7) 和 (8) 可见,  $h(V)$  取决于弹性波速和材料常数, 而与加载条件无关.

根据分形插值理论<sup>[20,21]</sup>, 当  $\Delta t \rightarrow 0$  时曲线  $L(t)$  趋向于分形裂纹顶端迹线  $l(t)$ . 类似地当  $\Delta t \rightarrow 0, V_k \rightarrow V$ . 事实上, 裂纹速度不连续点的应力强度因子的变化完全由在跳跃值发生时的裂纹速度本身和裂纹长度来决定. 根据 Freund 的理论推导<sup>[1]</sup>,  $\Delta t \rightarrow 0$  时裂纹顶端运动  $L(t)$  的应力强度因子可近似作为裂纹顶端运动  $l(t)$  的应力强度因子. 根据分形力学, 我们可推广 Freund 的动态应力强度因子公式来描述分形

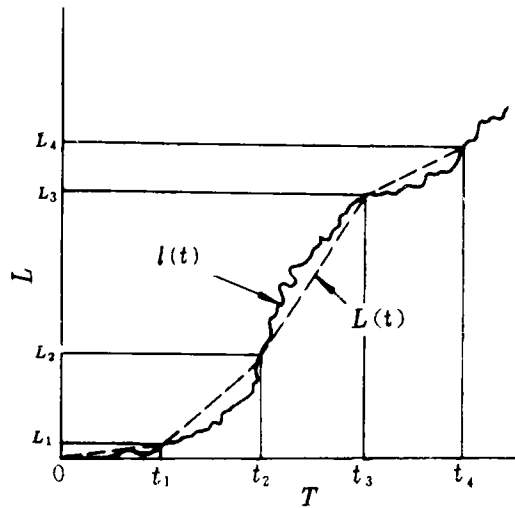


图 3 分形裂纹扩展轨迹的分形插值示意图

Fig.3 A polygonal curve of a fractal interpolating function,  $L(t)$ , with vertices at  $t_k = K\Delta t (K = 0, 1, 2, \dots, n)$ . This curve approximates the actual crack tip trajectory or fractal crack trace,  $l(t)$ .

裂纹顶端运动, 即

$$K(l(t), V) = h(V)K(l(t), 0) \quad (9)$$

式 (9) 表明沿分形路径扩展裂纹的动态应力强度因子等于瞬时分形裂纹速度的普适函数与沿分形路径扩展的准静态 (平衡) 应力强度因子的乘积.

### 3 分形裂纹扩展对动态应力强度因子和裂纹速度的影响

由前一节的分析知,  $K(l(t), 0)$  为取决于分形裂纹扩展路径的局部平衡应力强度因子. 将方程 (4) 和 (7) 代入方程 (9) 得

$$K(l(t), V)/K(l(t), 0) = [1 - (V_0/C_r)(d/\Delta a)^{1-D}]/[1 - (V_0/C_r)(C_r/C_d)(d/\Delta a)^{1-D}]^{1/2} \quad (10)$$

图 4 给出了  $K(l(t), V)/K(l(t), 0)$  随  $V_0/C_r$  的变化曲线 (取  $\nu = 0.3$ ). 如不考虑分形效应, 断裂力学理论得出仅当  $V_0/C_r = 1$  时,  $K(l(t), V)/K(l(t), 0)$  才趋于零<sup>[1]</sup>. 而图 4 表明由于分形裂纹扩展的影响,  $V_0/C_r < 1$  时,  $K(l(t), V)/K(l(t), 0)$  就能趋于零. 当分维  $D > 1$  时,  $V_0/C_r < 1$ , 当  $D > 1.3$  时,  $V_0/C_r < 0.5$ .

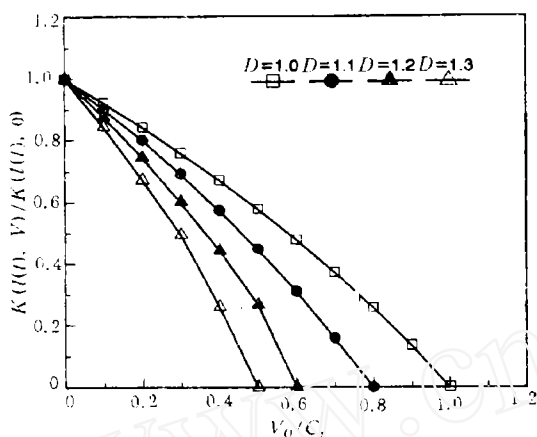


图 4  $K(l(t), V)/K(l(t), 0)$  随  $V_0/C_r$  的变化曲线 ( $\nu = 0.3$ )

Fig.4 Graph of the change tendency of the ratio of  $K(l(t), V)/K(l(t), 0)$  with increasing  $V_0/C_r$  for different fractal dimensions, using  $(d/\Delta a) = 0.1$  and  $\nu = 0.3$ . See text for details.

图 4 和方程 (10) 定性定量地给出了分形裂纹传播对应力强度因子和裂纹速度影响的基本理解, 但不全面, 因为方程 (10) 仅只给出了动态 (速度) 分形裂纹扩展的影响, 其静态 (平衡) 影响隐含在  $K(l(t), 0)$  项中. 下面我们将讨论  $K(l(t), 0)$  的静态效应.

根据分形理论<sup>[8,9]</sup>, 分形裂纹曲线是处处不可微的, 这意味着分形裂纹处处有拐点, 弯折地沿着主方向扩展.  $K(l(t), 0)$  中包含分形裂纹扩展的两个静态效应. 第一就是分形裂纹的弯折效应 (引起应力场的改变), 第二就是分形裂纹不规则扩展的长度效应 (因为  $l(t) \geq L(t)$  引起更多的能量耗散). 让  $K(L(t), 0)$  表示表观准静态应力强度因子,  $L(t)$  现在为宏观裂纹长度即表观长度. 由方程 (2), 我们可把分形裂纹扩展的静态效应分解为<sup>[3,6,9]</sup>

$$K(l(t), 0) = (d/\Delta a)^{(1-D)/2} K^*(L(t), 0) \quad (11)$$

式中  $K^*(L(t), 0)$  表示分形弯折裂纹的表观应力强度因子, 即表示分形裂纹扩展的弯折效应对应力强度因子的影响.

为了决定  $K^*(L(t), 0)$ , 我们建立了一个分形裂纹扩展模型如图 5 所示, 这里选择弯折裂纹作为分形裂纹扩展的生成元. 根据这个分形裂纹模型和分形理论, 可直接计算出分形裂纹扩展的分维值为

$$N = 3, \quad \frac{1}{r} = (5 + 4 \cos \theta)^{1/2} \tag{12}$$

$$D = \log 3 / \log (5 + 4 \cos \theta)^{1/2}$$

式中  $\theta$  为分形裂纹扩展的弯折角, 由 Pippan 的结果<sup>[17]</sup>,  $\theta$  的取值范围为  $0^\circ$  到  $90^\circ$ .  $N$  为生成元的折线段数,  $r$  为相似比. 图 6 和表 1 给出了这个模型给出的分维值与弯折角  $\theta$  之间的关系. 分形维数非线性地随  $\theta$  的增加而增加.

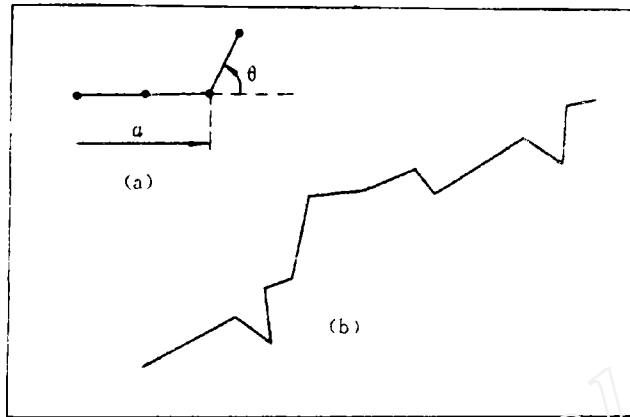


图 5 分形弯折裂纹模型. (a) 生成元; (b) 第三次生成步构造

Fig.5 A fractal model for crack propagation. (a) The generator. (b) A fractal crack extension trace (the third generation) constructed by using the generator (Fig.6a).  $\theta$  is the kinking angle. Fractal dimension ( $D$ ) is estimated directly from the generator, and  $D = \log 3 / \log (5 + 4 \cos \theta)^{1/2}$ .

表 1 分形裂纹扩展的分维值  $D$  与弯折角  $\theta$  之间的关系

Table 1 Relationship between the fractal dimension ( $D$ ) and the kinking angle ( $\theta$ )

$\theta$	$0^\circ$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$	$50^\circ$	$60^\circ$	$70^\circ$	$80^\circ$	$90^\circ$
$D$	1.00	1.003	1.013	1.028	1.053	1.085	1.129	1.187	1.263	1.365

众所周知, 既使在模型 I 加载下分形裂纹扩展的弯折路径也会引起裂纹顶端的局部复合型加载<sup>[17,18]</sup>. 对于线弹性材料, 裂纹顶端附近的应力场能由局部应力强度因子  $k_I, k_{II}$  和  $k_{III}$  来描述. 这些局部应力强度因子取决于裂纹几何和表观应力强度因子  $K_I(L(t), 0), K_{II}(L(t), 0)$  和  $K_{III}(L(t), 0)$ . 现在我们考虑模型 I 裂纹扩展, 由断裂力学<sup>[1,17,18,23]</sup> 最大应变能释放率  $G$  定义为

$$G = \frac{1}{E} [(1 - \nu^2)k_I^2 + (1 - \nu^2)k_{II}^2 + (1 + \nu)k_{III}^2] \tag{13}$$

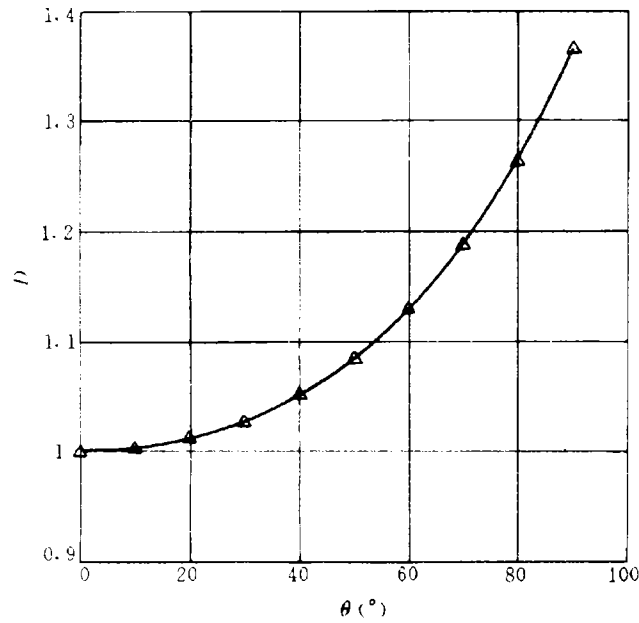


图 6 分维  $D$  随裂纹扩展弯折角  $\theta$  的变化曲线

Fig.6 Graph of the relationship between the fractal dimension ( $D$ ) and the kinking angle ( $\theta$ )

式中  $\nu$  和  $E$  分别为泊松比和弹性模量. 如果模型 I 裂纹的扭转效应忽略不计, 则裂纹局部驱动力为

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} (k_I^2 + k_{II}^2) = \frac{1 - \nu^2}{E} K^{*2}(L(t), 0) \quad (14)$$

式中  $K^*(L(t), 0) = (k_I^2 + k_{II}^2)^{1/2}$  (15)

对于图 5 给出的裂纹扩展的分形弯折模型, 其局部应力强度因子  $k_I$  和  $k_{II}$  能直接由断裂力学分析来估计 [17,18]

$$\left. \begin{aligned} k_I &= \cos^3\left(\frac{\theta}{2}\right) K(L(t), 0) \\ k_{II} &= \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) K(L(t), 0) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式中  $K(L(t), 0)$  为断裂力学中定义的模式 I 裂纹应力强度因子, 它正比于当前的表观裂纹长度  $L(t)$  的平方根 [1]. 将方程 (16) 代入方程 (15) 得

$$K^*(L(t), 0) = \left[ \left( \cos \frac{3\theta}{2} \right)^2 + \left( \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{2\theta}{2} \right)^2 \right]^{1/2} K(L(t), 0) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) K(L(t), 0) \quad (17)$$

结合方程 (10), (11) 和 (17), 我们有

$$\begin{aligned} K(l(t), V)/K(L(t), 0) &= [1 - (V_0/C_r)(d/\Delta a)^{1-D}](d/\Delta a)^{(1-D)/2} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) / \\ &[1 - (V_0/C_r)(C_r/C_d)(d/\Delta a)^{1-D}]^{1/2} \end{aligned} \quad (18)$$

式中 $\theta$ 是分维 $D$ 的函数(见方程(12)). 图7a和7b给出了不同参数下 $K(l(t), V)/K(L(t), 0)$ 随无量纲裂纹速度( $V_0/C_r$ )和无量纲弯折角( $\theta/100^\circ$ )的变化趋势表面图形. 现有的动态断裂理论分析结果得出动态应力强度因子与表观准静态应力强度因子之比 $K(l(t), V)/K(L(t), 0)$ 在 $V_0/C_r$ 趋于1时必然递减到零, 因为 $K(L(t), 0)$ 线性地随表观裂纹长度 $L(t)$ 的增加而增加. 然而, 当考虑分形裂纹扩展以后, 图7a(选 $d/\Delta a = 0.1$ )表明 $K(l(t), V)/K(L(t), 0)$ 在分维为 $D = 1.365$ 时, 仅当 $V_0/C_r = 0.5$ 就趋于零, 而对 $D = 1.263$ , 仅当 $V_0/C_r = 0.6$ ,  $K(l(t), V)/K(L(t), 0)$ 就趋于零. 当选 $(d/\Delta a) = 0.01$ , 图7b表明当分维 $D = 1.365$ 时, 仅当 $V_0/C_r = 0.2$ 和当分维 $D = 1.187$ 时仅当 $V_0/C_r = 0.5$ ,  $K(l(t), V)/K(L(t), 0)$ 就趋于零. 从图7可以看到, 在分形裂纹扩展下, 表观(量测)裂纹速度必然小于 Rayleigh 波速值, 这与目前的实验观察完全一致<sup>[1,2,17-19,23]</sup>. 这从理论上解释了实验测定的裂纹速度 $V_0$ 总是明显低于 Rayleigh 波速 $C_r$ 现象可能是分形裂纹扩展效应所致.

图7a( $d/\Delta a = 0.1$ )与图7b( $d/\Delta a = 0.01$ )之间差异表明材料的微结构参数( $d/\Delta a$ )很强烈地影响动态应力强度因子和表观裂纹速度, 也就是很强烈地影响裂纹扩展路径和裂纹表面不规则性. Pippan<sup>[17,19]</sup>已在 ARMCO- 铁的裂纹扩展实验中考察到了这个事实.

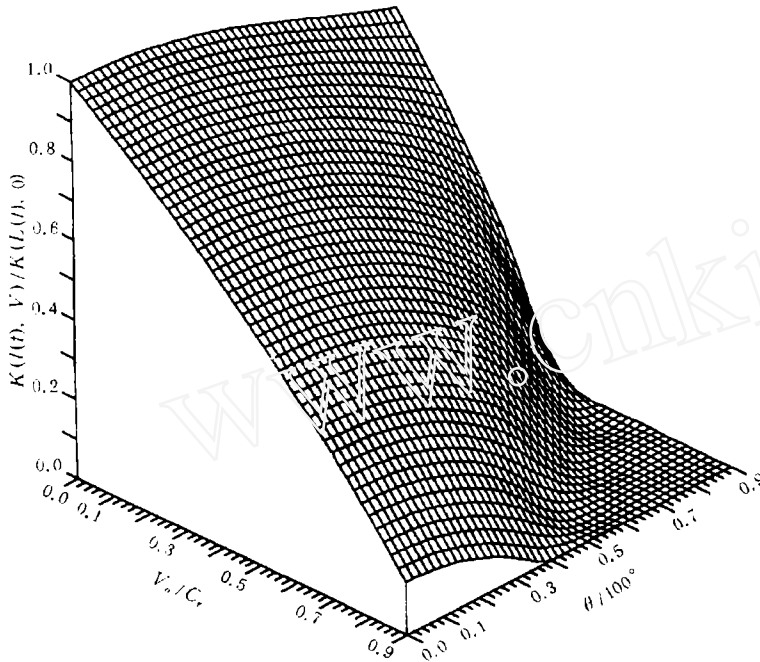


图 7a  $K(l(t), V)/K(L(t), 0)$  随  $V_0/C_r$  和  $\theta/100^\circ$  的变化表面图形 ( $\nu = 0.3, d/\Delta a = 0.1$ )

Fig.7a Surface of the ratio of the dynamic stress intensity factor to the initial stress intensity factor,  $K(l(t), V)/K(L(t), 0)$ , plotted against the plane of the dimensionless crack speed,  $V_0/C_r$ , and the dimensionless kinking angle,  $\theta/100^\circ$ . The surface is for the microstructure parameter  $(d/\Delta a) = 0.1$ , and  $\nu = 0.3$

#### 4 结 语

本文建立了分形裂纹扩展模型来描述裂纹的非规则扩展. 这个模型揭示了分形



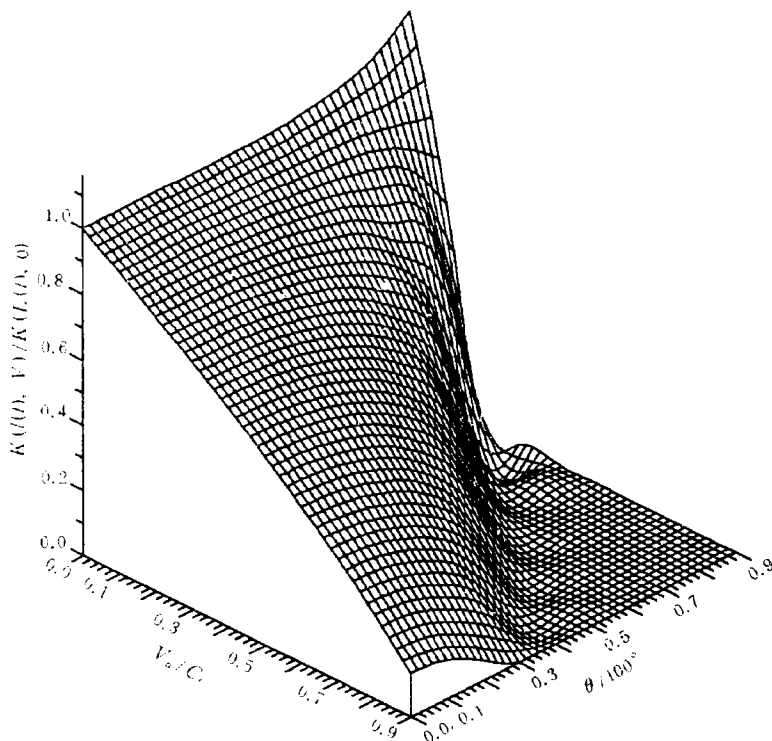


图 7b  $K(l(t), V)/K(L(t), 0)$  随  $V_0/C_r$  和  $\theta/100^\circ$  的变化表面图形 ( $\nu = 0.3, d/\Delta a = 0.01$ )

Fig.7b Surface of the ratio of the dynamic stress intensity factor to the initial stress intensity factor,  $K(l(t), V)/K(L(t), 0)$ , plotted against the plane of the dimensionless crack speed,  $V_0/C_r$ , and the dimensionless kinking angle,  $\theta/100^\circ$ . The surface is for the microstructure parameter  $(d/\Delta a) = 0.01$ , and  $\nu = 0.3$

裂纹速度, 裂纹长度和裂纹弯折角对动态应力强度因子和裂纹速度的影响. 动态应力强度因子与准静态应力强度因子之比  $K(l(t), V)/K(L(t), 0)$  取决于裂纹速度  $V_0$ , 微结构参数  $(d/\Delta a)$ , 分维  $D$  和裂纹扩展的弯折角  $\theta$ .

本文的分析结果很好地解释了为什么现有大多数实验观察的裂纹速度  $V_0$  仅只 Rayleigh 波速  $C_r$  的一半左右. 根据动态断裂力学,  $K(L(t), 0)$  线性地随表观裂纹长度  $L(t)$  的增加而增长, 仅当  $V_0/C_r$  趋于 1 时, 动态应力强度因子  $K(l(t), V)$  才趋于零. 然而本文的分形裂纹扩展模型得出  $K(l(t), V)$  当  $V_0$  接近  $C_r$  的一半左右就可能趋于零. 量测的裂纹速度  $V_0$  很难接近 Rayleigh 波速. 材料微结构很强地影响动态应力强度因子和裂纹速度. 现有动态断裂理论分析与实验观察存在较大差异的原因可能就是分形裂纹扩展效应所致.

### 参 考 文 献

- 1 Freund LB. *Dynamic Fracture Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990
- 2 Guo H. *J Mech Phys Solids*, 1993, 41(3): 457-486
- 3 Xie H. *Int J Fracture*, 1989, 41(4): 267-274
- 4 Xie H. *Chinese Science Bulletin*, 1989, 34(15): 1292-1296
- 5 Ravi-Chandar K, Knauss WG. *Int J Fracture*, 1984, 26: 65-80
- 6 Watanabe M. *Int J Fracture*, 1991: 49: 69-77
- 7 Goldstein RV, Lewandowski J. *Acta Mechanica*, 1992, 91: 235-243

- 8 Madelbrot BB. *The Fractal Geometry of Nature*. W.H. Freeman and Company (1982)
- 9 Xie H. *Fractals in Rock Mechanics*, Rotterdam: A.A. Balkema Publishers, 1993
- 10 Madelbrot BB et al. *Nature*, 1984, 308: 721-723
- 11 Pande CS et al. *Acta Metall*, 1987, 35(7): 1633-1637
- 12 Xie H, Chen ZD. *Acta Mechanica Sinica*, 1988, 4(3): 256-267
- 13 谢和平. 岩石、混凝土损伤力学. 中国矿业大学出版社出版, 1990
- 14 Turcotte DL. *Fractals in Geology and Geophysics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1992
- 15 Xie H, Sanderson DJ, Peacock DCP. Fractal description of Riedel shears. Proc. 2nd Int. Con. Nonlinear Mech., Beijing: 1993
- 16 Xie H, Sanderson DJ. Fractal effect of rapidly propagating cracks. Proc. 2nd Int. Conf. Nonlinear Mech., Beijing: 1993
- 17 Pippin R. *Engng Fracture Mech*, 1993, 44(5): 821-829
- 18 Cotteral B, Rice JR. *Int J Fracture*, 1980, 16: 155-169
- 19 Pippin R. *Mater Sci Engng*, 1991, A138: 1-13
- 20 Panagiotopoulos PD. *Int J Solids Struct*, 1992, 29(17): 2159-2175
- 21 Wallin H. *Constr. Approx*, 1980, 5: 137-150
- 22 Barnsley M. *Fractals Everywhere*, Academic Press Inc. 1988
- 23 Rose LRF. *Int J Fracture*, 1976, 12(6): 799-813

## FRACTAL EFFECTS OF DYNAMIC CRACK PROPAGATION

Xie Heping

(China University of Mining Tech., Xuzhou, Jiangsu; Laboratory for Nonlinear Mechanics of Continuous Media, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, China)

David J. Sanderson

(Geology Department, University of Southampton, Southampton, S09 5NH, U.K.)

**Abstract** Crack extension paths are often irregular, producing rough fracture surfaces which have a fractal geometry. In this paper, crack tip motion along a fractal crack trace is analysed. A fractal kinking model of the crack extension path is established to describe irregular crack growth. A formula is derived to describe the effects of fractal crack propagation on the dynamic stress intensity factor and on crack velocity. The ratio of the dynamic stress intensity factor to the applied stress intensity factor,  $K(l(t), V)/K(L(t), 0)$ , is a function of the apparent crack velocity,  $V_0$ , microstructure parameter,  $d/\Delta a$  (grain size/crack increment step length), fractal dimension,  $D$ , and fractal kinking angle of crack extension path,  $\theta$ . For fractal crack propagation, the apparent (or measured) crack velocity,  $V_0$ , cannot approach the Rayleigh wave speed,  $C_r$ . Why  $V_0$  is significantly lower than  $C_r$  in dynamic fracture experiments can be explained by the effects of fractal crack propagation. The dynamic stress intensity factor and apparent crack velocity are strongly affected by the microstructure parameter,  $(d/\Delta a)$ , fractal dimension,  $D$ , and fractal kinking angle of crack extension path,  $\theta$ . This is in good agreement with experimental findings.

**Key words** crack propagation, dynamic fracture, fractal crack path, fractal kinked model, fractal effect