

层裂的分形机理及分维和连接阈值的关系¹⁾

卢春生 韩闻生 白以龙 夏蒙禁²⁾ 柯孚久³⁾

(中国科学院力学研究所非线性连续介质
力学开放实验室, 北京 100080)

摘要 通过对微裂纹连接的动力学分析, 提出了描述层裂损伤演化的统计分形模型. 指出分形层裂面的形成机理与层裂中微裂纹级串连接的动力学过程密切相关. 由此, 得到了一种单峰的分维—连接阈值关系, 定性解释了分维随韧性单峰变化的实验现象.

关键词 层裂, 分形机理, 微裂纹连接, 韧性

引 言

从微观尺度上来看, 由于材料内部各种无序因素(如位错、晶界、二相、微损伤、夹杂等)的影响, 裂纹实际上是沿着一条不规则的曲折路径扩展的, 由此所形成的断裂表面往往是粗糙不平的. 作为损伤断裂过程最直观反映, 复杂的断面形貌的定量分析一直是材料断裂研究的重要内容之一.

Mandelbrot 等^[1]首先发现, 金属的冲击断面具有分形特征, 其分维增量随相应的冲击能的增加而减小. 继此开创性的工作之后, 人们对各种材料断面的实验研究普遍发现, 断裂表面的不规则性可以用分维给予很好的定量描述, 并且得到了大量有关断面分维随材料宏观力学性能(如冲击能、断裂韧性等)变化的经验关系^[2]. 然而, 需要指出的是, 有的实验结果所得到的分维随韧性的变化趋势却是相反的, 而且由于目前的绝大多数研究工作仅局限于断面分形特征的几何描述, 而很少涉及形成分形断面的内在机理, 因此, 也就很难对有关的实验现象作出合理的解释^[2,3].

在某种意义上, 分形断面的形成可能意味着损伤演化过程具有某种程度上的标度不变性, 而且预示断裂过程与临界现象也有某些相似之处. 沈乐天等^[4]在对一铝合金材料的平板撞击实验中证实, 当损伤累积到一定程度时, 受损材料的残余强度突然丧失, 表现出类似临界破坏的现象. 本文通过对层裂表面破坏形貌的实验观测及微裂纹连接过程的动力学分析, 初步探讨了分形层裂表面的形成机理, 并且对分维随韧性单峰变化的实验结果进行了定性解释.

1 层裂表面的分形特征

本文所述的平板撞击实验是在 101mm 口径的轻气炮上进行的. 作为靶板的试样

¹⁾ 攀登计划“非线性科学”和中国科学院重点项目 KM85-33 项目资助.

²⁾ 北京大学物理系, 北京大学非线性中心, 北京 100871.

³⁾ 北京航空航天大学应用数理系, 北京 100083.

1993-09-03 收到.

取自于一批轧制的铝合金板材,其直径为 70mm,厚度为 2mm~10mm. 该材料是一种铝铜类高强度合金,其主要的物理力学参数如表 1 所示.

表 1 铝合金材料的物理力学性能

Table 1 The physical and mechanical properties of the aluminium alloy

Description	Values
Density, $\rho(\text{g}/\text{cm}^3)$	2.83
Tensile yield strength, $\sigma_s(\text{MPa})$	333
Ultimate tensile strength, $\sigma_b(\text{MPa})$	449
Young modulus, $E(\text{GPa})$	81
Elasticity wave velocity, $C(\text{m}/\text{s})$	5827

对于承受不同的应力幅值或脉宽的试样剖面的微观观察发现,铝合金材料的损伤断裂过程表现为成核于二相粒子中的微裂纹的扩展和连接. 在层裂区内,大量位于不同平面上的微裂纹的连接形成了台阶状、不规则的层裂表面(图版 II, 照片 1). 下面我们首先从定性观察和定量分析两个方面验证层裂表面是否具有分形特征.

所谓分形,指的是局部和整体具有某种自相似性的结构或图形. 若将其局部放大,就会显示出反复出现的细节. 自然界的许多无序系统都具有分形特征^[5]. 值得注意的是,这里所说的分形或自相似性只是在某种统计意义下而言的,而且仅在一一定的尺度范围内成立.

图版 II 照片 2 显示了铝合金材料层裂表面的破坏形貌. 实验观察是在 S570 扫描电镜下进行的. 在层裂表面上任选一点,以此为中心逐渐增加放大倍数观察层裂表面的形貌变化. 随着放大倍数的增加,可以看到整个视场布满一些亮带形成的网状图案,且在一定的放大倍数范围($\times 100 \sim \times 1000$)内,这些网状图案十分相似(图版 II 照片 2). 继续增加放大倍数,这种相似图案消失,看到的是一些布满碎块的凹坑(图版 II 照片 3). 直观观察表明,在一定的尺度范围内,层裂表面具有某种统计自相似性即分形特征.

对于一具有分形特征的曲线,有

$$N(r) \sim r^{-D} \quad (1a)$$

或

$$L(r) = N(r) \cdot r \sim r^{1-D} \quad (1b)$$

两边取对数,可得

$$D = \frac{\ln N(r)}{\ln(1/r)} \quad (2a)$$

或

$$D = 1 + \frac{\ln L(r)}{\ln(1/r)} \quad (2b)$$

式中, r 为码尺, $N(r)$ 为测量次数. $L(r)$ 为相应的曲线长度, D 为分维.

实验研究的任务之一是采集数据. 首先, 将待测样品进行细致的研磨、抛光处理, 然后在扫描电镜下沿剖面线连续拍照, 接下来将冲洗好的照片顺序接好, 利用图像分析系统对其离散采样, 得到一组数据序列 $\{x_i, y_i\}$. 对此数据序列进行计算机处理, 计算出不同的码尺 r_i 下相应的测量次数 $N(r_i)$ 或长度 $L(r_i)$, 在双对数坐标下作图, 通过图中直线段的斜率即可确定层裂剖面线的分维.

由于采集到的数据序列 $\{x_i, y_i\}$ 是离散的, 作为一种简单处理, 相邻两点间采用线性插值来近似. 为了检验和标定计算方法及所编程序的精度及可靠性, 我们计算了三类典型曲线的维数: (1) 直线, (2) Minkowski 分形, (3) 非整数 Brown 运动. 计算结果表明, 其最大相对误差小于 0.5%^[6]. 图 1 给出了 Minkowski 分形的计算结果.

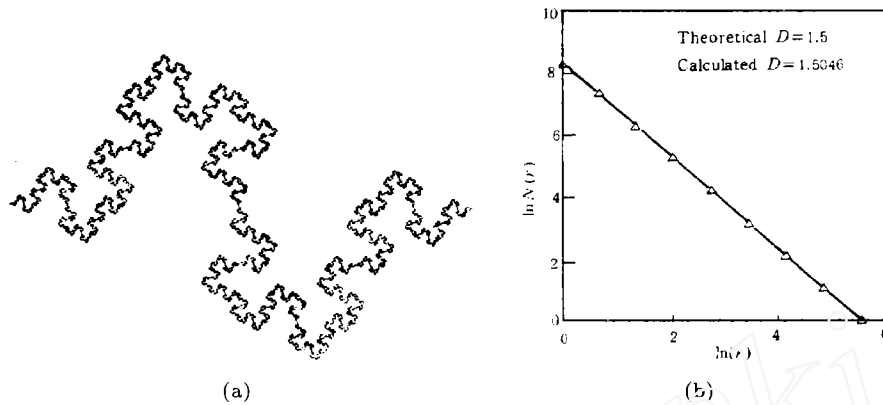


图 1
(a) Minkowski 分形, (b) 分维计算结果

Fig 1
(a) Minkowski fractal, (b) its calculated fractal dimension

针对层裂, 我们计算了 5 个试样共 7 个剖面的分维. 为了考查同一试样在不同剖面上的分维变化, 对其中两个试样分别选取了两个相互垂直的剖面, 计算结果如表 2 所示.

表 2 层裂剖面线的分维计算结果

Table 2 Calculated results of fractal dimension of spalled profiles

Specimen No.	Tensile stress σ (MPa)	Stress duration ΔT (μ s)	Fractal dimension D	Scaling range (μ m)
155 (A-A)	1453	1.67	1.09 \pm 0.01	5~995
(B-B)			1.10 \pm 0.01	10~950
190(A-A)	1386	1.34	1.08 \pm 0.01	5~550
(B-B)			1.09 \pm 0.01	15~700
602	3270	0.68	1.09 \pm 0.01	10~800
603	3270	0.53	1.09 \pm 0.01	5~500
604	3270	0.71	1.10 \pm 0.01	20~1250

图 2 给出了一典型的层裂剖面形貌及其分维计算结果. 显而易见, 约在 $10\mu\text{m}\sim 1000\mu\text{m}$ 的尺度范围内, 层裂剖面线具有分形特征, 其分维值 $D = 1.09 \pm 0.01$, 这和我们对于层裂表面破坏形貌的直观观察一致.

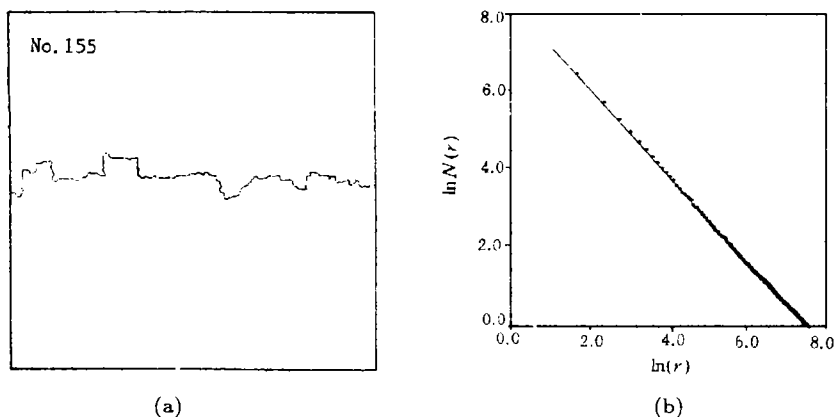


图 2
(a) 层裂剖面形貌, (b) 分维计算结果
Fig.2
(a) Spalled profile, (b) Its calculated fractal dimension

在这种铝合金材料中, 剖面上的微结构 (晶粒、二相粒子) 的尺度分布如图 3 所示. 相比之下, 材料内部微结构分布的尺度范围远小于存在分形特征的标度区间. 由此可见, 分形层裂剖面的形成不仅受到材料内部微结构尺度分布的影响, 而且还可能与损伤演化过程有关. 对铝合金材料层裂损伤演化过程的实验观察发现, 成核于二相粒子的微裂纹的级串连接对具有分形特征的层裂断面的形成有着重要的影响.

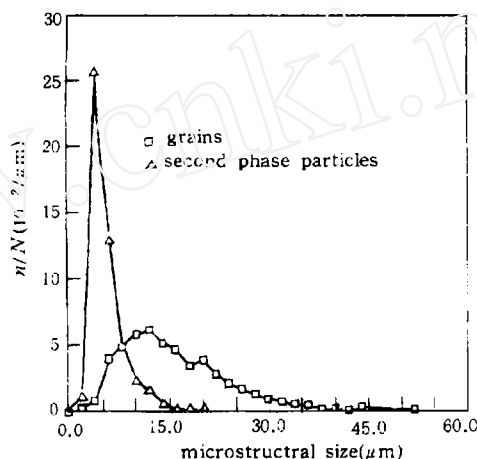


图 3 剖面上的微结构尺寸分布
Fig.3 Microstructural size distribution on a cross section

2 微裂纹连接的动力学模型

在铝合金的层裂损伤演化过程中, 成核于二相粒子中的微裂纹近似平行分布 (图版 II 照片 1A), 主要的连接方式为: (1) 位于同一平面内的微裂纹相互连接, 形成一条较长的裂纹; (2) 位于不同平面上的微裂纹连接, 形成一台阶状的裂纹 (图版 II 照片 1B). 在层裂区内, 大量微裂纹相互连接, 最终形成粗糙、不规则的层裂表面. 图 4 给出了一微裂纹系统连接过程的示意图.

在外载作用下, 材料内部两条相邻的微裂纹能否连接不仅与材料的物理力学性能有关, 而且受到微裂纹相互间的位置、取向以及载荷等因素的影响. 从理论上严格地确定微裂纹的连接条件是十分困难的, 下面我们对此作一简单的力学分析.

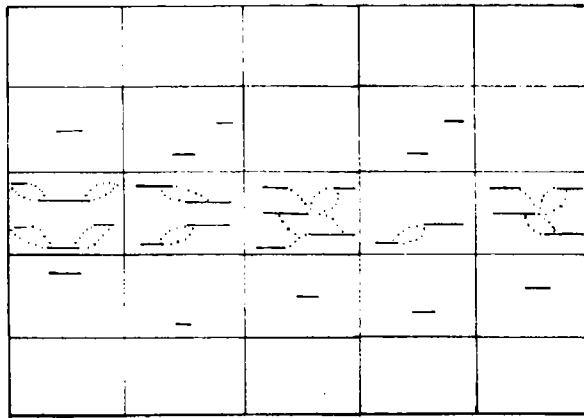


图 4 微裂纹系统连接过程示意图

Fig. 4 Schematic representation of the coalescence of microcracks

2.1 平均应力准则

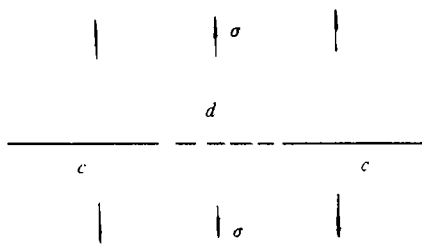


图 5 两条微裂纹的连接

Fig.5 Schematic diagram of coalescence of two aligned microcracks

度为 c 的微裂纹位于同一平面内, 其间距为 d (图 5). 在与裂纹所在平面垂直的均匀应力 σ 作用下, 根据量纲分析, 距裂纹尖端距离为 r 处的应力为^[7]

$$\frac{\sigma(r)}{\sigma} = f\left(\frac{r}{d}, \frac{c}{d}, \frac{\sigma}{E}\right) \quad (3)$$

在间距 d 上的无量纲平均应力

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{d} \int_0^d f\left(\frac{r}{d}, \frac{c}{d}, \frac{\sigma}{E}\right) dr = F\left(\frac{c}{d}, \frac{\sigma}{E}\right) \quad (4)$$

先从量纲分析角度考虑, 假设两条长

考虑最简单的情况, 对于一给定的材料, E 为常数, 则 $\bar{\sigma}/\sigma = F\left(\frac{c}{d}\right)$, 即只与微裂纹长度和间距有关, 或者反过来记作

$$L = \frac{d}{c} = L\left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma}\right) \quad (5)$$

再从平均应力角度估算. 对两条长为 c_1 和 c_2 的微裂纹, 假设微裂纹出现前, 作用在其上的力 $c\sigma$ 由微裂纹两侧分担, 则间距 d 上的平均应力为

$$\bar{\sigma} = \frac{\frac{c_1}{2}\sigma + \frac{c_2}{2}\sigma + d\sigma}{d} = \sigma\left(\frac{\bar{c}}{d} + 1\right) \quad (6)$$

式中, $\bar{c} = (c_1 + c_2)/2$.

即

$$L = \frac{d}{\bar{c}} = \frac{\sigma}{\bar{\sigma} - \sigma} \quad (7)$$

从强度理论出发, 当 $\bar{\sigma} \geq \sigma_c$ 时, 两条微裂纹连接. 这时, 连接条件可进一步表示为

$$L \leq L_c = \frac{\sigma}{\sigma_c - \sigma} \quad (8)$$

式中, σ_c 为材料强度.

显然, 对于不同的 σ/σ_c 值, 临界连接条件 L_c 不同. 具体到铝合金材料的层裂, 加载应力 $\sigma = (1386 \sim 3270)\text{MPa}$ ^[8], σ_c 应小于其理论强度^[9], 即

$$\sigma_c < \frac{E}{10} = \frac{81}{10} = 8.1\text{GPa}$$

代入 (8) 式有

$$L_c = \frac{1.39}{8.1 - 1.39} = 0.21 \quad (9a)$$

或

$$L_c = \frac{3.27}{8.1 - 3.27} = 0.68 \quad (9b)$$

根据铝合金材料层裂过程的实验观测, 当两条微裂纹间的间距与裂纹大小相当即 $L_c \sim 1$ 时, 两条微裂纹发生连接. 这和我们上面初步的理论分析结果定性一致.

2.2 能量准则

我们曾用类似 Griffith 的能量释放率平衡以及应力强度因子计算等方法探讨过微裂纹的连接条件, 此时, 连接条件已不再是几何相似的, 而与微裂纹尺度相关^[10]. 因此, 对能量准则的分析, 需要做更详细的讨论. 这里, 限于篇幅, 只给出一个定性的估计.

如图 5 所示 (为了简化处理, 这里, 我们仅考虑 $c_1 = c_2 = c$ 的平面问题). 当 $d \gg c$ 时, 两条裂纹间的相互作用可以忽略. 这时, 系统释放的应变能

$$U = -2Ac^2$$

式中, A 为单位面积释放的应变能.

当 $d \ll c$ 时, 两条裂纹可近似看作一条裂纹. 这时, 系统释放的应变能

$$U = -A(c+c)^2 = -4Ac^2$$

对于一般情况, 系统释放的应变能可近似表达为

$$U = -A \left[2c^2 + 2c^2 f\left(\frac{d}{c}\right) \right] = -2Ac^2 \left[1 + f\left(\frac{d}{c}\right) \right] \quad (10)$$

式中, $f\left(\frac{d}{c}\right)$ 具有以下性质: 当 $\frac{d}{c} \rightarrow 0$ 时, $f\left(\frac{d}{c}\right) \rightarrow 1$; 当 $\frac{d}{c} \rightarrow \infty$ 时, $f\left(\frac{d}{c}\right) \rightarrow 0$.

系统中裂纹所消耗的能量为

$$\Gamma = 2Bc \quad (11)$$

式中, B 为单位长度裂纹所消耗的能量.

因此, 系统的总能量为

$$W = U + \Gamma = -2Ac^2 \left[1 + f\left(\frac{d}{c}\right) \right] + 2Bc \quad (12)$$

若两条裂纹发生连接, 有

$$dW \leq 0 \quad (13)$$

考虑到 $2c + d = \text{常数}$, 可得

$$f'\left(\frac{d}{c}\right) \left[\frac{d}{c} + 2 \right] - 2f\left(\frac{d}{c}\right) \leq 2 - \frac{B}{Ac} \quad (14)$$

这里, 作为一种估算, 取 $f\left(\frac{d}{c}\right) = \exp\left(-\frac{d}{c}\right)$, 代入 (14) 式得

$$\left(\frac{d}{c} + 4\right) \exp\left(-\frac{d}{c}\right) \geq \frac{B}{Ac} - 2$$

或

$$(L + 4) \geq (K - 2) \exp(L) \quad (15)$$

式中, $K = B/Ac$. 显然, K 不仅与材料韧性和载荷有关, 还与微裂纹尺度有关.

这里, 我们仅定性分析一下式 (15) 的变化趋势. B 为材料韧性的代表参数, 并且 $K \propto B$ 而由 (15) 式可见, 连接阈值 L_c 是 K , 因而也是韧性的减函数. 即在相同的载荷下, 韧性越高的材料, 连接阈值 L_c 越小, 这与有关韧性的物理概念是一致的. 进一步的讨论见文献 [10].

3 统计分形模型

为了研究分形断面的形成机理, 根据材料内部的微观断裂方式, 已相继提出了一些唯象的、几何的微观断裂分形模型, 如对金属材料的沿晶断裂分形模型及对岩石类材料的穿晶断裂分形模型^[11,12]. 采用类似的方法, 可以构造各种形式的分形断裂模型. 然而, 这些模型并未真正涉及损伤断裂的动力学过程, 因此, 也就很难揭示分形断面的形成机理.

考虑到层裂表面的分形特征, 假设微裂纹连接按如图 6 所示的形式统计自相似地从小到大演化. 不妨设

$$z = \frac{d}{cL_c} = \frac{L}{L_c} \quad (16)$$

连接条件可表示为

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq z \leq 1 \\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \quad (17)$$

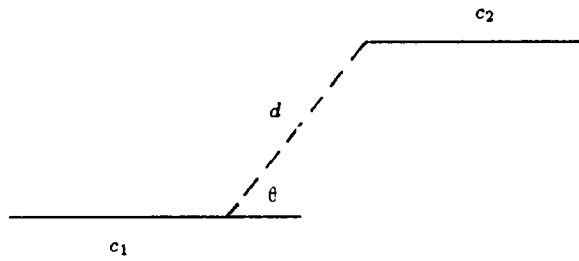


图 6 统计分形模型
Fig.6 The statistical fractal model

连接前，微裂纹的有效长度（测量尺度）可用 \bar{c} 近似。连接后，裂纹长度为

$$l' = c_1 + c_2 + d = \bar{c}(2 + L_c) \quad (18)$$

其有效长度为

$$c' = c_1 + c_2 + d \cos \theta = \bar{c}(2 + L_c \cos \theta) \quad (19)$$

由于微裂纹的数目很大，各种形式的连接都可能出现，作为一种简单近似，假定满足条件 (17) 的连接是等概率的。这时，相应于连接后的裂纹长度及其有效长度分别为

$$\bar{l}' = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 l' dz d\theta = \bar{c}(2 + L_c/2) \quad (20)$$

$$\bar{c}' = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 c' dz d\theta = \bar{c}(2 + L_c/\pi) \quad (21)$$

由 (2) 式，断裂剖面线的分维为

$$D = \frac{\ln(\bar{l}'/\bar{c})}{\ln(\bar{c}'/\bar{c})} = \frac{\ln(2 + L_c/2)}{\ln(2 + L_c/\pi)} \quad (22)$$

具体到该铝合金的层裂，前面的实验观测与理论分析表明，连接条件可近似取 $L_c \approx 1$ 。则相应的层裂剖面线的分维

$$D = \frac{\ln(2 + 1/2)}{\ln(2 + 1/\pi)} = 1.0897 \quad (23)$$

由此可见，由该统计分形模型所得的分维值与实测结果 ($D = 1.09 \pm 0.01$) 基本相符，同时也和作者在将要发表的一篇论文中依据相同的动力学规律所作的二维数值模拟结果一致。此外，该模型还能解释，为什么分形的标度区间远大于该材料中各类微结构（二相粒子、晶粒等）的分布尺寸，而这一点是已有的各种唯象、几何的断裂分形模型所无法解释的。

4 分维与断裂

Williford 综合了部分有关分形断裂的实验结果，发现分维随断裂韧性变化的实验数据点落在单峰曲线上 (图 7a)^[13]。令人们感兴趣的是，对于如金属等韧性材

料, 断裂韧性随分维的增加而减小, 然而, 对于陶瓷、岩石类脆性材料, 断裂韧性随分维的增加而增加, 对此现象目前尚无一致的看法. 不少工作从分形几何和分维计算方法上对此进行了讨论, 但是无法协调粗糙断面 (大的分维值) 应消耗更多能量的物理直观概念与大量实验结果表现的单峰曲线这一根本矛盾 [2]. 事实上, 分形断面的形成及其分维值的变化应与断裂的动力学机理有关. Dauskardt 等最近对几种不同的断裂方式 (如沿晶断裂、穿晶断裂、微空洞连接等) 所形成的断面的实验研究发现, 微结构分布及断裂方式的确对分形断面的形成有重要影响 [14].

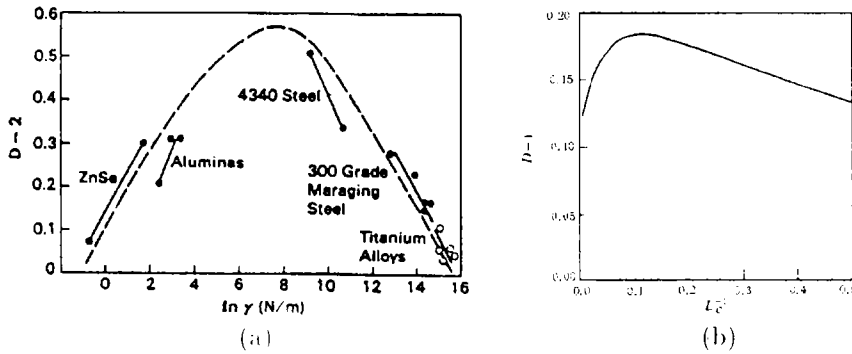


图 7 (a) 分维 D 随表面能 γ 变化的实验结果 [13], (b) 分维 D 与连接阈值 L_c 间的关系

Fig.7 (a) Fractal dimension D vs. surface energy γ [13], (b) Fractal dimension D vs. coalescence threshold L_c

利用我们在本文中提出的统计分形模型可以定性解释上述实验现象. 显而易见, 在式 (22) 中, D 随 $1/L_c$ 的变化也是一单峰曲线 (图 7b). 下面考虑两个最简单的情況. 对于理想韧性断裂, 由于裂尖钝化, 两个微裂纹 (或微空洞) 只有相距很近时才能连接, 这与能量准则 (15) 式所得结果一致. 这时, 可近似认为 $L_c \rightarrow 0$. 由 (22) 式有

$$D = \lim_{L_c \rightarrow 0} \frac{\ln(2 + L_c/2)}{\ln(2 + L_c/\pi)} = 1 \tag{24}$$

同样, 对于理想脆性断裂, 可近似认为 $L_c \rightarrow \infty$. 由 (22) 式有

$$D = \lim_{L_c \rightarrow \infty} \frac{\ln(2 + L_c/2)}{\ln(2 + L_c/\pi)} = 1 \tag{25}$$

比较图 7(a) 和 (b), 不难看出, 二者在变化趋势上定性一致.

综上所述, 分形断面的形成机理与损伤演化的动力学过程密切相关. 在铝合金材料的层裂中, 具体表现为大量成核于二相粒子的微裂纹的级串连接. 此外, 具有分形特征或标度不变性的标度区间往往介于宏观与细观尺度之间, 因此, 本文所提出的统计分形的动力学模型为沟通细观与宏观力学间的联系提供了一条新的途径.

参 考 文 献

- 1 Mandelbrot BB, Passoja DE, Paullay AJ. *Nature*, 1984(308): 721
- 2 卢春生, 白以龙. 力学进展, 1990(20):468
- 3 Cahn RW. *Nature*, 1989(338): 201
- 4 Shen Uetian, Bai Yilong, Zhao Shida. Proc of Int Symp on Intense Dynamic Loading and Its Effects, Science Press, Beijing: 1986: 753
- 5 Mandelbrot BB. *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, San Francisco, 1982
- 6 卢春生. 中国科学院力学研究所博士学位论文, 1992
- 7 Bai Yilong, Xia Mengfen, Ke Fujiu, Lu Chunsheng, Ling Zhong. *Chinese Phys Lett*, 1993(10): 155
- 8 凌中, 白以龙. 爆炸与冲击, 1994(14): 1
- 9 Orowan E. *Rep Prog Phys*, 1948(12): 185
- 10 韩闰生. 中国科学院力学研究所博士学位论文, 1993
- 11 Lung CW. in *Fractals in Physics* (eds, L Pietronero and E Tosatti), Elsevier Science Pub BV, 1986: 189
- 12 谢和平, 陈至达. 力学学报, 1988(20): 264
- 13 Williford RE. *Scripta Metall*, 1988(22): 1749
- 14 Dauskardt RH, Haubensak F, Ritchie RO. *Acta Metall Mater*, 1990(38): 143

FRACTAL MECHANISM OF SPALLATION AND RELATION BETWEEN FRACTAL DIMENSION AND COALESCENCE THRESHOLD

Lu Chunsheng Han Wensheng Bai Yilong Xia Mengfen Ke Fujiu

(Laboratory for Nonlinear Mechanics of Continuous Medium,
Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing 100080, China)

Abstract In the light of the dynamical analysis of microcrack coalescence, this paper presents a statistical fractal model to describe the damage evolution of spallation. The model demonstrates that the mechanism of fractal surfaces formed in spallation is closely related to the dynamic processes of the cascade coalescence of microcracks. A unimodal relation between the fractal dimension and the coalescence threshold based on the model can qualitatively explain the challenging observation of fractal dimension versus toughness.

Key words spallation, fractal mechanism, microcrack coalescence, toughness