

关于 RNG 代数湍流模式的研究

姜宗林 陈耀松

(北京大学力学系, 北京 100871)

摘要 研究了 RNG 代数湍流模型, 提出的涡黏性方程根的识别方法对涡黏性的选择给予了合理的物理意义, 它减少了模型使用中的经验性, 缩短了计算时间. 另外关于用外部涡函数的双峰平均法来确定分离区附近边界层的厚度也是有意义的, 它继承了 Baldwin-Lomax 代数模型的长处, 改进了其不足, 可用于分离流动的工程计算.

关键词 RNG 代数模型, 涡黏性, 湍流

引 言

近十几年来, 大型计算机的发展为直接求解湍流问题提供了新途径, 并取得了很大成功^[1]. 但是由于既要使网格小到能描绘湍流的细微结构, 又要使网格多到能覆盖与感兴趣区域相关的流场, 这对计算机的运算速度与存储的要求是非常高的. 所以直接数值模拟还只限于较低雷诺数的湍流问题, 因此寻求适当的模式方程仍是非常有意义的研究题目.

在工程计算中, 由于一般曲线坐标系下控制方程本身已非常复杂, 人们常常倾向于选择比较简单的湍流模式去模拟湍流效应, 如 Baldwin-Lomax 两层代数模型^[2]. 不少研究表明, 对纯剪切流动, 这个模式可以给出非常好的计算结果. 但是由于它是以涡量为基础的模型, 在分离点处, 由于涡量为零, 它就不再适用了. 因此用它求解具有分离的湍流问题常常带来很大误差^[3].

1986 年, V. Yakhot & S.A. Orszag 利用重整化群理论 (Renormalization Group Theory) 提出了一个代数模型^[4]. 许多关于分离流的算例表明该模型优于 Baldwin-Lomax 模型^[5,6]. 特别需要指出的是这个模型是以耗散为基础的, 所以它可用于分离流的数值计算. 下面将先介绍一下这个 RNG 代数模型的基本方程, 然后给出补充方程与完善方法, 最后分析一下数值实验结果.

1 RNG 代数湍流模型

由重整化群理论可得重整化黏性系数方程

$$\nu = \nu_0 [1 + H(\frac{\alpha}{\nu_0^3} \varepsilon \Lambda_f^{-4} - C_c)]^{1/3} \quad (1)$$

这里 ν_0 是运动学黏性系数, ν 是有效涡黏性系数, $\alpha = 0.1186$, $C_c = 75.0$, Λ_f 是湍流谱空间中适当选择的外截断波数, 它与惯性域内允许的涡的最大尺度有关. $H(x)$

1993-09-27 收到第一稿, 1994-01-24 收到修改稿.

是 Heaviside 函数的广义积分, 其定义如下

$$H(x) = \begin{cases} x & \text{当 } x \geq 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (2)$$

这里 ϵ 是湍流耗散率. 如果假定局部平衡的话, 它可由下式确定:

$$\epsilon = \nu S \quad (3)$$

这里

$$S = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (4)$$

正是由于式 (3), 这个 RNG 代数模型被称之为以耗散为基础的湍流模型. 方程 (1) 中的 Λ_f 与积分尺度 L_f^i 有如下关系

$$L_f^i = \frac{2\pi}{\Lambda_f} \quad (5)$$

惯性区的湍流能量是

$$E = C_k \epsilon^{2/3} \Lambda^{-5/3} \quad (6)$$

这里 C_k 是 Kolmogorov 常数, RNG 的理论值是 1.6075. 对大于 Λ_f 的所有波数积分方程 (6). 得湍动能

$$k = \frac{3}{2} C_k \Lambda_f^{-2/3} \epsilon^{2/3} \quad (7)$$

在高雷诺数下, 可假定重整化的黏性系数取人们熟悉的形式

$$\nu = L_f^2 S^{1/2} = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (8)$$

这里 $C_\mu = 0.0845$ 是 RNG 的理论值. 这样惯性尺度即可与混合长度联系起来. 把 (7) 代入 (8) 可得

$$L_f = \left(\frac{9}{4} C_\mu C_k^2 \right)^{3/4} \Lambda_f^{-1} \quad (9)$$

它等价于

$$L_f = \frac{a^{1/4}}{2\pi} L_f^i \quad (10)$$

因此, 用混合长度, 方程 (1) 可重写作

$$\nu = \nu_o \left[1 + H \left(\frac{\epsilon}{\nu_o^3} L_f^4 - C_c \right) \right]^{1/3} \quad (11)$$

在近固壁边界, 湍流混合长度常取为 kn , 这里 n 是到固壁的法向距离, k 是 von Karman 常数, 其经验值为 0.4, 理论值为 0.372. 在剪切层外, 混合长度最好取具有边界层厚度的量级 $C_\mu \delta$, 其中, C_μ 取经验值 0.09, 或 RNG 的理论值 0.0845.

由于 ϵ 是 ν 的函数, 所以需要解一个立方方程来确定重整化黏性. 假定 Heaviside 函数的积分变量总是大于零, 那么方程 (11) 可写作

$$\nu^3 - \nu SL_f^4 + (C_c - 1)\nu_0^3 = 0 \tag{12}$$

该方程的解是

$$\left. \begin{aligned} \nu_1 &= 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{1}{3}\theta\right) \\ \nu_2 &= 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{1}{3}\theta + 120^\circ\right) \\ \nu_3 &= 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{1}{3}\theta + 240^\circ\right) \end{aligned} \right\} \tag{13}$$

这里

$$\left. \begin{aligned} Q &= -\frac{SL_f^4}{3} \\ R &= -\frac{(C_c - 1)\nu_0^3}{2} \\ \theta &= \cos^{-1}\left(\frac{R}{\sqrt{-Q^3}}\right) \end{aligned} \right\} \tag{14}$$

在应用 RNG 模型时只需解方程 (12), 选取适当的根作为涡黏性系数即可.

2 RNG 代数湍流模型的补充方程

在应用 RNG 湍流模型时, 仍然有两个问题需要解决. 其一是怎样从式 (12) 表示的方程中选择适当的根作为涡黏性系数. 文献 [5] 的作者从简单性考虑选三个根中的最大值作为涡黏性系数. 据湍流研究的经验可知, 湍流黏性系数一般要比分子黏性系数大几十倍或几百倍. 而且在数值计算中, 当计算的涡黏性系数比分子黏性仅大十几倍时通常认为这时流动仍为层流而不是湍流 [5]. 所以涡黏性系数应满足下述两个条件:

$$\left. \begin{aligned} \nu &\geq 0 && \text{inside sublayer} \\ \nu &\gg \nu_0 && \text{outside sublayer} \end{aligned} \right\} \tag{15}$$

在图 1 中, 给出了方程 (14) 的三个根随耗散项 S 和混合长度 L_f 乘积的分布.

从图 1 可以看到, 在 Heaviside 函数的积分为非零的条件下, 涡黏性方程的三个根有一个是负的, 一个在大部分区域小于分子黏性只在小部分区域是略大于分子黏性 ($\nu < 4\nu_0$). 因此只有一个根 ν_1 满足 (15) 表示的涡黏性判定条件. 另外从图 1 上还可以看到: ν_1 表示的根也是方程 (12) 的最大根. 因此文献 [5,6] 中验证 RNG 模型优于 Baldwin-Lomax 模型的算例仍然是有效的. 而这里的理论分析给根的适当选择以合理的物理含义.

使用 RNG 代数湍流模型的另一个困难问题是怎样确定边界层的厚度. Baldwin & Lomax 提出由外部涡黏性函数 F 的峰值来确定 [2]. 对简单的剪切流动这种方法

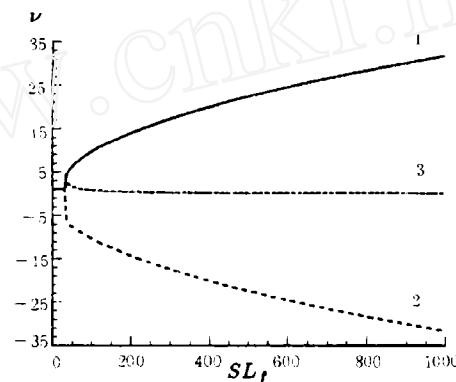


图 1 RNG 模型涡黏性方程的 3 个根
Fig.1 Three roots of the RNG modeling equation

是很有效的. 但对复杂的分离流动, 由于 F 函数的分布有几个峰, 选用那一个峰值就比较困难了 [5]. 计算表明: 若由近壁面的峰来确定边界层厚度, 那么当流动分离时边界层厚度就会突然下降 1 到 2 个数量级, 从而导致了涡黏性系数的突然减小, 有时甚至会引入数值振荡. 另外分离区的出现和存在一般只可能导致湍流的扰动加强, 引起更强烈的动量交换, 因此从 Prandtl 的混合长度理论中湍流扩散与分子扩散相似的观点来看, 这种湍流黏性系数的下降是非物理的. 为了克服这个困难, 文献 [3] 中取 F 函数最远的峰作为判定准则. 文献 [6] 则取 F 函数负的斜率的极大值作为准则. 他们都不同程度地改进了上述不足. 但是问题仍然存在. 本文在模型的应用中, 对 F 函数采用双峰值距离平均法求取分离区附近的 y_{\max} 来代替 δ , 即

$$y_{\max} = \frac{1}{2}(y_{\max 1} + y_{\max 2}) \quad (16)$$

当多峰现象消逝时, 令 $y_{\max 1} = y_{\max 2}$ 上式即常用的极值判定法. 以 $M = 3.0$ 的超音速流过一个 16° 度压缩拐角的流动为例. 改进后最大涡黏性系数沿流向的分布如图 2 所示, 这里涡黏性系数突然减小的现象被消除, 和文献 [3] 中的结果相比, 其改进是很明显的.

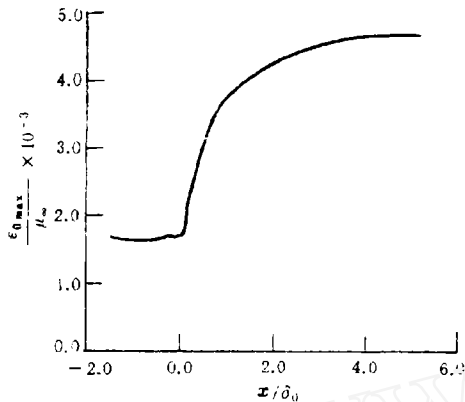


图 2 改进后最大涡黏性系数沿流向的变化
Fig.2 The variation of the vortex viscous coefficient along the flow



图 3 Mach 数分布, $M_{\infty} = 0.9, Re = 13.1 \times 10^6$
Fig.3 The mach number distribution,
 $M_{\infty} = 0.9, Re = 13.1 \times 10^6$

最后, 本文以高速气体绕过一个圆弧形坝的跨音速流作为算例来验证 RNG 模型及其补充方程. 来流马赫数为 0.9, 圆弧形坝的高长比为 9.36%. 进出流边界采用文献 [7] 中的无反射边界条件. 应用文献 [8,9] 提出的局部化概念和频散控制格式, 求得的数值解如图 3 所示. 比较图 3 与文献 [6] 中的结果可见: 激波结构与分离区的大小是非常一致的, 而且分离点与再附点的位置与该文献中的实验结果也吻合良好, 因此文献 [5,6] 中的结果是可重复的, 本文对 RNG 模型的改进与补充是合理的, 有效的.

3 结 论

一些文献和本文的算例都表明用 RNG 代数模型预测分离流是成功的, 原因是耗散现象比涡量更接近于湍流机制. 特别是对分离点, 基于涡量的模型给出为零的湍流黏性系数是不合理的, 而 RNG 模式作出了成功的改进. 还有应用 RNG 模型时在每一计算点上, 仅需解一个三次方程, 计算量比较小, 和现有的代数模型相比,

该模型是非常有竞争力的. 更有趣的是, 在层流底层 RNG 模型的湍流涡黏性系数就等于分子黏性, 出了这个区域, 湍流黏性成倍增加. 尽管有人讲这个跳跃是非物理的, 但其趋势还是与实验符合的. 另外, 湍流黏性方程根的判别方法节省了计算时间, 增强了它的竞争力. 最后本文提出的利用外部涡黏性函数的双峰值距离平均法去解决分离区附近边界层厚度的计算问题也是成功的方便的. 但是值得指出的是 RNG 模型毕竟只是一个代数模型, 和其它类似的模型一样, 它也使用了各向同性, 局部平衡, 单一特征长度等假设. 对较复杂的流动, 它也有一定的局限性.

参 考 文 献

- [1] Man Mohan Rai. Direct simulations of turbulent flow using finite-difference schemes, *J Comp Phys*, 1991, 96: 15-53
- [2] Baldwin BS and Lomax H. Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows. AIAA Paper, 78-257
- [3] Visbal M and Knight D. Evaluation of the Baldwin-Lomax turbulence model for two-dimensional shock wave boundary layer interactions; AIAA Paper, 83-1697
- [4] Yakhot Victor and Orszag SA. Renormalization group analysis of turbulence, I basic theory. *J of Scientific Computing*, 1986, 1(1): 1-51
- [5] Kirtley KR. An algebraic RNG-based turbulence model for three-dimensional turbomachinery flows. AIAA Paper, 91-0172
- [6] Luigi Martinelli and Yakhot Victor. RNG-based turbulence transport approximations with applications to transonic flows. AIAA Paper No 89-1950-cp
- [7] Jiang Zonglin, Chen Yaosong and Kuwahara K. Approximate nonreflecting inflow-outflow boundary conditions for Navier-Stokes equations calculations in internal flows. *ACTA Mechanica Sinica*, 1993, 9(4): 15-21
- [8] Jiang Zonglin, Chen Yaosong, Ishii K and Kuwahara K. Numerical dispersions, numerical oscillations, and dispersion control schemes for weak solution problems of hyperbolic equations. In: Daiguji H ed. Proc of 5-ISCFD. Sendai, Japan, 1993. Sendai, Pub Dept JSCFD, 1993. 394-402
- [9] Jiang Zonglin, Chen Yaosong and Kuwahara K. The localization concept of multi-dimensional gas dynamic equations and its one dimension-like numerical method. In: Zhuang FG ed. Proc of ICFD-II. Beijing, China, 1993. Beijing: Peking Univ Press, 1993. 385-390

THE STUDY ON ALGEBRAIC TRANSPORT TURBULENCE MODEL BASED ON RNG THEORY

Jiang Zonglin Chen Yaosong

(Department of Mechanics, Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract In this paper, investigations on a RNG based algebraic transport turbulent model is carried out. A proper way proposed here to choose a suitable root for the eddy viscosity from solutions of a cubic equation derived from the renormalization group theory has reasonable physical meaning. In addition, two-peak average method is used to determine the thickness of boundary layers inside separation regions, which has improved the way of Baldwin-Lomax algebraic turbulence model and can be applied in engineering calculations.

Key words RNG-based turbulence model, eddy viscosity, turbulent flows