弹/粘塑性柱体扭转问题的函数 Laplace 变换解

贾乃文
(华南理工大学工程力学系，广州 510641)

摘要　在应力 Laplace 变换分析粘塑性轴对称问题基础上，对弹性－弹/粘塑性圆柱体扭转全过程进行分析．根据柱体扭转的应力分布，构造应力函数与位移函数，并对函数进行 Laplace 变换．相应求出圆柱体、空心圆柱体的 Laplace 变换解．以及圆柱体的弹性－粘塑性交界线值．

关键词　柱体扭转，构造函数，粘塑性，Laplace 变换

材料在塑性变形时，它的变形速率与材料的粘性相关，该变形属粘塑性变形．由于粘塑性变形要计入时间变量的影响，所以在分析和求解粘塑性材料应力和变形时，往往借助于应力和位移分量的 Laplace(拉氏) 变换方法，消除时间变量，形成便于求解的常微分方程．解出应力和位移后，再进行 Laplace 逆变换，从而获得问题的真值．文献 [5] 所分析的受内压作用的粘塑性轴对称解答便是一例．

对粘塑性柱体扭转问题，本文提出应用构造应力函数或位移函数，代入粘塑性本构方程进行 Laplace 变换的一种方法，求得扭转问题的函数表达和应力解答之后，再进行 Laplace 逆变换求得应力的真值．以下就圆柱体、空心圆柱体的粘塑性柱体扭转问题进行分析，并借用它们的结果给出弹/粘塑性圆柱体扭转时弹性变形和粘塑性变形的交线值．

本文采用的弹/粘塑性本构方程

$$\left.\begin{aligned} \dot{e}_{ij} &= \frac{1}{2G}\dot{s}_{ij} + \frac{1-\dfrac{K}{\sqrt{J_2'}}}{2\eta}s_{ij} \qquad &(\sqrt{J_2'} > K) \\ \dot{e}_{ij} &= \frac{1}{2G}\dot{s}_{ij} &(\sqrt{J_2'} \le K) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

式中 η 为粘性系数， K 为剪切屈服应力， $\sqrt{J_2'}$ 在直角坐标下表为

$$\begin{aligned} \sqrt{J_2'} = \ & \frac{1}{\sqrt{6}}\big[(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2 \\ & +6(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)\big]^{1/2} \end{aligned} \tag{2}$$

1993-08-02 收到第一稿， 1994-08-02 收到修改稿.

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

Laplace 变换的一般公式用应力分量为例可以表为

$$\bar{\sigma}(r\cdot s)=\int_0^{\infty}\sigma(r\cdot t)e^{-st}\mathrm{d}t \tag{3}$$

并简称为拉氏变换.

1 粘塑性圆柱体扭转

设有一半径为 a 的圆柱体，弹 / 粘塑性材料制成，在扭矩 M 作用下发生扭转变形. 设 z 方向为轴向. 按圆柱体扭转变形的平截面假定以及荷载作用特征，柱坐标下的位移分量仅有 $u_\theta=u_\theta(r,z,t)$; 应变分量仅有 $\nu_{\theta z}=\nu_{\theta z}(r,t)$; 应力分量仅有 $\tau_{\theta z}=\tau_{\theta z}(r,t)$.

将应力分量 $\tau_{\theta z}$ 代入柱坐标表达的平衡方程，可知是自然满足的. 将位移分量 u_θ 代入几何方程，列出相关式后得

$$2\nu_{r\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r} \tag{4}$$

$$2\gamma_{\theta z}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial z} \tag{5}$$

由此二式求得

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial r}=\frac{u_\theta}{r}\,,\qquad 2\nu_{\theta z}=\frac{\partial u_\theta}{\partial z} \tag{6}$$

分析 (6) 中第一式，可以构造位移函数 u_θ 为

$$u_\theta=rF(z,t) \tag{7}$$

式中 $F(z,t)$ 为待求函数. 将 u_θ 代入弹 / 粘塑性本构方程 (1) 式得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)=\frac{1}{G}\frac{\partial}{\partial t}(\tau_{\theta z})+\frac{\tau_{\theta z}}{\eta}-\frac{K}{\eta} \tag{8}$$

综合 (7) 和 (8) 式，可以看出构造函数 u_θ 进而表为

$$u_\theta=r\cdot zF_1(t)+rF_2(t) \tag{9}$$

式中 F_1 与 F_2 均是关于时间 t 的待求函数. 如设 $z=0$ 处受扭圆柱端面固定，即有 $F_2=0$, $u_\theta=rzF_1(t)$. 将 u_θ 代入本构方程 (8) 式，得

$$rF_1'(t)=\frac{1}{G}\tau_{\theta z}'+\frac{\tau_{\theta z}}{\eta}-\frac{K}{\eta} \tag{10}$$

方程两边进行拉氏变换得

$$rs\bar{F}_1=\frac{1}{G}s\bar{\tau}_{\theta z}+\frac{\bar{\tau}_{\theta z}}{\eta}-\frac{K}{\eta s} \tag{11}$$

由此式解出

$$\bar{\tau}_{\theta z}=\frac{rs\bar{F}_1+\dfrac{K}{\eta s}}{\dfrac{s}{G}+\dfrac{1}{\eta}}$$

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

引入扭转应力函数 ϕ, 在粘塑性扭转变形时，ϕ 应是坐标 r 和时间 t 的函数. 函数 ϕ, 剪应力 $\tau_{\theta z}$，外扭矩 M 之间有如下方程和边界条件

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{\partial\phi}{\partial r}=-\tau_{\theta z} & \\ M=2\displaystyle\iint_R \phi r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta & \text{柱端} \\ \phi=0\,,\quad r=a & \text{周边}\end{array}\right\} \tag{12}$$

对 (12) 式进行拉氏变换，求出 $\bar{\phi}$ 即变换后应力函数为

$$\bar{\phi}=-\frac{\dfrac{1}{2}r^2 s\bar{F}_1+\dfrac{rK}{\eta s}}{\dfrac{s}{G}+\dfrac{1}{\eta}}+A \tag{13}$$

式中 A 为积分常数. 考虑 ϕ 函数周边边界条件，即拉氏变换后仍有 $\bar{\phi}|_{r=a}=0$, 从而定出 A 值. 再代回 (13) 式，则有

$$\bar{\phi}=\frac{\dfrac{1}{2}(a^2-r^2)s\bar{F}_1+\dfrac{(a-r)K}{\eta s}}{\dfrac{s}{G}+\dfrac{1}{\eta}} \tag{14}$$

利用 (12) 中第二式的拉氏变换式求出 $\bar{F}_1$ 为

$$\bar{F}_1=-\frac{4K}{3\eta a s^2}+\frac{2M\left(\dfrac{s}{G}+\dfrac{1}{\eta}\right)}{\pi a^4 s^2} \tag{15}$$

从而求出 $\bar{\tau}_{\theta z}$ 为

$$\bar{\tau}_{\theta z}=\frac{-\dfrac{4Kr}{3\eta a s}+\dfrac{2Mr\left(\dfrac{s}{G}+\dfrac{1}{\eta}\right)}{\pi a^4 s}+\dfrac{K}{\eta s}}{\dfrac{s}{G}+\dfrac{1}{\eta}} \tag{16}$$

上式在拉氏逆变换后，求得弹 / 粘塑性圆柱体受扭矩 M 作用下的剪应力 $\tau_{\theta z}$ 为

$$\tau_{\theta z}=\left(K-\frac{4Kr}{3a}\right)\left(1-e^{-\frac{G}{\eta}t}\right)+\frac{2Mr}{\pi a^4} \tag{17}$$

位移 u_θ 为

$$u_\theta=\left(\frac{2M}{\pi a^4\eta}-\frac{4K}{3a\eta}\right)rzt+\frac{2Mrz}{\pi a^4 G} \tag{18}$$

为验证以上结果的正确性，可将 u_θ 值代入柱端扭转条件，可知

$$\begin{aligned}&\int_0^a\int_0^{2\pi}\tau_{\theta z}\cdot r^2\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\\&=\left[2\pi\left(\frac{Kr^3}{3}-\frac{Kr^4}{3a}\right)\left(1-e^{-\frac{G}{\eta}t}\right)+\frac{Mr^4}{2\pi a^4}\right]\Big|_0^a\\&=M\end{aligned}$$

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

显见，此应力解满足平衡方程和边界条件.

如果令 $\eta=0$, 即在弹 / 粘塑性的物理关系中略去粘性影响，相当于理想弹塑性情况 [4]. 另外从 (17) 可知，当 $\eta=0$ 则有

$$\tau_{\theta z}=\left(K-\frac{4Kr}{3a}\right)+\frac{2Mr}{\pi a^4}$$

在全塑状态下，必 $\tau_{\theta z}=K$. 代入上式求得此时 M 值为

$$M=\frac{2}{3}\pi a^3 K$$

即是文献 [3] 给出圆柱体扭转沙堆比拟解. 应力表达式还表明，随着时间 t 的增加，初始较大的粘性影响逐渐减小，以至于最后剪应力在塑性变形过程中趋于稳定的极限值.

2 空心圆柱体粘塑性扭转

对于外半径为 a, 内半径为 b 空心圆柱，受扭矩 M 作用产生粘塑性变形，可以借助于上面的分析和结果求其应力. 空心圆柱的柱端条件为

$$M=2\int_b^a\int_0^{2\pi}\phi r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \tag{19}$$

对 (19) 进行拉氏变换后，代入 (14) 式相同的 $\bar{\phi}$, 可以求出此空心圆柱的 $\bar{F}_1$ 为

$$\bar{F}_1=\frac{\dfrac{M}{2\pi s^2}\left(\dfrac{s}{G}+\dfrac{1}{\eta}\right)-\dfrac{2K}{\eta s^2}\left(\dfrac{a^3}{6}-\dfrac{ab^2}{2}+\dfrac{b^3}{3}\right)}{\left(\dfrac{a^4}{4}-\dfrac{a^2b^2}{2}+\dfrac{b^4}{4}\right)} \tag{20}$$

将 $\bar{F}_1$ 代入 $\bar{\tau}_{\theta z}$ 公式中，再进行拉氏逆变换，可以求出粘塑性空心圆柱体在扭矩 M 作用下剪应力 $\tau_{\theta z}$ 的真值为

$$\tau_{\theta z}=\frac{Mr}{2\pi\left(\dfrac{a^4}{4}-\dfrac{a^2b^2}{2}+\dfrac{b^4}{4}\right)}+\left[K-\frac{2Kr\left(\dfrac{a^3}{6}-\dfrac{ab^2}{2}+\dfrac{b^3}{3}\right)}{\left(\dfrac{a^4}{4}-\dfrac{a^2b^2}{2}+\dfrac{b^4}{4}\right)}\right]\left(1-e^{-\frac{G}{\eta}t}\right) \tag{21}$$

借用以上结果，可以分析出弹 / 粘塑性实心圆柱体扭转时，部分材料 $\sqrt{J_2'}>K$, 另一部分材料 $\sqrt{J_2'}\le K$ 的应力以及从弹性过渡到弹 / 粘塑性变形的交线.

设半径为 a 的圆柱体在扭矩 M 作用下发生弹性变形和弹 / 粘塑性变形. 如果 M 值不足以使柱体全部进入塑性阶段，那么会有部分材料处在弹性变形阶段，按荷载分布设弹性核半径为 b. 即在 $r\le b$ 时，是一实心的弹性受扭圆柱；在 $b\le r\le a$ 时，是一空心的粘塑性受扭柱体. 如果令粘塑性变形区域的扭矩为 M_1, 依据 (21) 式. 即在 M_1 作用下 b 处的剪应力 $\tau_{\theta z}$ 为

$$\tau_{\theta z}|_b=\frac{M_1\cdot b}{2\pi\left(\dfrac{a^4}{4}-\dfrac{a^2b^2}{2}+\dfrac{b^4}{4}\right)}+\left[K-\frac{2Kb\left(\dfrac{a^3}{6}-\dfrac{ab^2}{2}+\dfrac{b^3}{3}\right)}{\left(\dfrac{a^4}{4}-\dfrac{a^2b^2}{2}+\dfrac{b^4}{4}\right)}\right]\left(1-e^{-\frac{G}{\eta}t}\right) \tag{22}$$

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

因为总扭转力矩为 M, 在半径为 b 的弹性核内，剪应力是线性分布的. 按弹性关系式

$$M - M_1 = \frac{\pi}{2} b^3 \cdot \tau_{\theta z}|_b \tag{23}$$

弹性圆柱体的扭转，存在应力函数 ϕ^e, 引用文献 [3] 结果， ϕ^e 应是

$$\phi^e = \Big(-\frac{1}{2}r^2 + A\Big) G\theta \tag{24}$$

式中 A 为积分常数.

在 $b \le r \le a$ 的粘塑性区，应力函数 $\bar{\phi}$ 由 (14) 式给出

$$\bar{\phi} = \frac{\dfrac{1}{2}(a^2 - r^2) s\bar{F}_1 + \dfrac{(a-r)K}{\eta s}}{\dfrac{s}{G} + \dfrac{1}{\eta}} \tag{25}$$

代入 (20) 中 $\bar{F}_1$, 并进行拉氏逆变换，求得此部分 ϕ^p 为

$$\phi^p = \frac{\dfrac{(a^2 - r^2)}{4\pi} M - K(a^2 - r^2)\Big(\dfrac{a^3}{6} - \dfrac{ab^2}{2} + \dfrac{b^3}{3}\Big)\Big(1 - e^{-\frac{G}{\eta}t}\Big)}{\Big(\dfrac{a^4}{4} - \dfrac{a^2 b^2}{2} + \dfrac{b^4}{4}\Big)} + K(a - r)\Big(1 - e^{-\frac{G}{\eta}t}\Big) \tag{26}$$

综合 (23), (24) 和 (26) 式可知，共有四个未知数，即 M_1, A, $G\theta$ 和 b. 这里除具有 (23) 方程外，尚应补充在 $r = b$ 处的连续条件. 即在弹性和粘塑性交界处，两部分的 ϕ 值及 $\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}$ 应当相同. 此外还有弹性部分条件

$$M - M_1 = 2\iint_{R_1} \phi^e \mathrm{d}R_1 \qquad (R_1\text{：}b\text{半径内部分}) \tag{27}$$

求解以上方程，可以求出外力矩 M 和半径 b 的关系式，也就是在 M 不足以使圆柱体全部扭转成粘塑性状态时，弹性与粘塑性交线 b 值可以获得.

参 考 文 献

1 Chakrabarty J. Theory of plasticity. McGraw-Hill. 1987

2 杨绪灿等. 粘塑性力学概论. 中国铁道出版社， 1985. 146

3 徐秉业. 塑性力学. 高等教育出版社， 1988. 144

4 王子昆等. 用伪应力函数法求解幂硬化材料柱体扭转问题. 力学学报， 1990, 22(2)

5 贾乃文. 粘塑性平面应变轴对称动力问题 Laplace 变换解. 力学与实践， 1991, 12(4)

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

ELASTIC/VISCOPLASTIC SOLUTION OF TWISTY COLUMNS BY MEANS OF LAPLACE FUNCTIONAL TRANSFORMATIONS

Jia Naiwen
(*Department Engineering Mechanics, South China University of Technology, Guangzhou* 510641, *China*)

Abstract By means of Laplace transformation, the whole process of the twisting of elastic/viscoplastic columns are solved in this paper. In considering the distribution of the stresses in the column, we construct a stress function and a displacement function and then use Laplace transformation. The solutions cylinder and a cylinder with a hole are obtained.

Key words twist of column, constructive function, viscoplastic, Laplace transformation

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net