

非线性系统模态分叉与模态局部化现象

刘济科 赵令诚 方 同
(西北工业大学 264 信箱, 西安 710072)

摘要 运用匹配法和多尺度法对一个两自由度非线性系统进行了研究. 详细分析了非线性系统的模态分叉和局部化现象.

关键词 非线性模态, 分叉, 局部化

引 言

结构振动系统的模态局部化现象是近年来的研究热点之一. 但迄今为止, 有关局部化现象的大量研究都是针对线性系统的, 对非线性系统的类似研究所见不多. 据我们所知, 仅有 Vakakis^[1], Pierre 和 Shaw^[2,3] 等人进行了这方面的研究工作. Vakakis 采用渐近展开法分析非线性模态特性和响应特性; Pierre 等则采用中心流形理论研究局部化模态, 并指出, 对于弱耦合系统, 非线性模态局部化是因破坏非线性项的对称性而引起的. 另一方面, 非线性系统的分叉、混沌等是非线性力学的研究热门. 因此, 研究非线性系统的模态分叉和局部化现象具有理论意义和实际价值.

本文运用匹配原则^[1]和多尺度法对一个两自由度非线性系统进行了研究. 根据非线性模态的定义^[4], 求得非线性模态, 同时详细讨论了发生模态分叉和局部化的条件. 研究表明, 非线性模态局部化并不是“因破坏非线性的对称性引起的”(Pierre^[2]), 而是系统的非线性性质所致.

1 模态分叉及模态局部化

采用图 1 所示的非线性系统, 其运动方程是

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + x_1 + \mu x_1^3 + \alpha_1(x_1 - x_2) + \alpha_3(x_1 - x_2)^3 &= 0 \\ \ddot{x}_2 + (1 + e_1)x_2 + \mu(1 + e_3)x_2^3 + \alpha_1(x_2 - x_1) + \alpha_3(x_2 - x_1)^3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中, μ 和 α_3 分别是两端弹簧及中间耦合弹簧的非线性刚度项; e_1 和 e_3 是失调参数.

先采用匹配方法分析. $e_1 = e_3 = 0$ 时, 令 $x_2 = cx_1$, 代入 (1) 式可得:

$$\text{对线性项:} \quad \alpha_1(c - 1) = \alpha_1(1 - c)c \quad (2)$$

若 $\alpha_1 \neq 0$, 则 $c = \pm 1$, 分别对应反对称及对称模态. $\alpha_1 = 0$ 时, c 可取任意值.

$$\text{对非线性项:} \quad \alpha_3(1 - c)^3(c + 1) = \mu c(c^2 - 1) \quad (3)$$

1994-04-29 收到第一稿, 1994-07-29 收到修改稿.

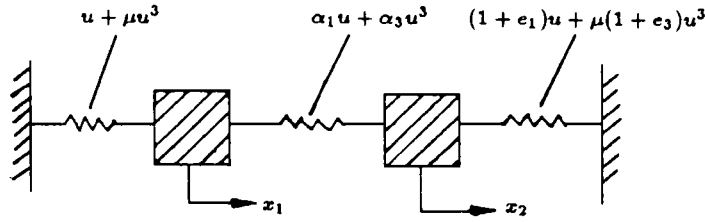


图 1 非线性系统
Fig.1 Schematic drawing of a nonlinear system

显然, $c = \pm 1$ 也是方程的解. 当 $0 \leq \frac{\alpha_3}{\mu} \leq 0.25$ 时, (3) 式存在其它实数解

$$c = 1 - \frac{\mu}{2\alpha_3} \pm \frac{\mu}{2\alpha_3} \sqrt{1 - \frac{4\alpha_3}{\mu}} \quad (4)$$

它确定了系统除 $c = \pm 1$ 外的附加模态解.

由 (4) 可得 $c < 0$, 所以模态只可能从对称模态 $c = -1$ 中分叉出来, 属反叉形分叉, 分叉点为 $\alpha_3/\mu = 0.25$; 模态解的稳定性通过对解进行小扰动分析获得: $\alpha_3/\mu < 0.25$ 时, 解 $c = -1$ 是不稳定分支, 而由 (4) 式决定的解是稳定的. 图 2 显示了系统谐调时 c 与 α_1 的变化关系, 图 3 则显示了系统谐调且 $\alpha_1 = 0$ 时 c 与 α_3/μ 间的关系, 图中虚线表示不稳定解.

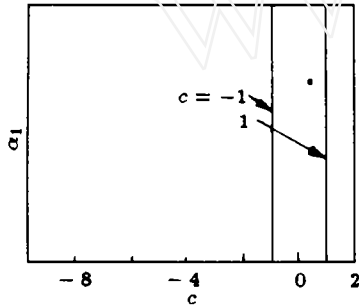


图 2 c 与 α_1 的变化关系 ($e_1 = e_3 = 0$)

Fig.2 Curve of c versus α_1 ($e_1 = e_3 = 0$)

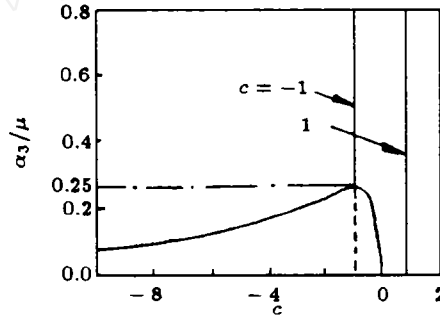


图 3 $\alpha_1 = 0$ 时, c 与 α_3/μ 间的关系
($e_1 = e_3 = 0$), 分叉点 $\alpha_3/\mu = 0.25$
Curve of c versus α_3/μ ($\alpha_1 = 0, e_1 = e_3 = 0$)
The bifurcation point: $\alpha_3/\mu = 0.25$

综上所述, 若系统耦合刚度存在线性项, 即 $\alpha_1 \neq 0$ 时, 则只有对称、反对称两个模态, 它们与初始条件无关. $\alpha_1 = 0$ 时, 还有附加相似模态, 也与能量无关, 且解曲线有分叉现象出现. 由 (4) 式或图 3 可得, α_3/μ 很小时, c 很大或者很小, $\alpha_3/\mu = 0$ 时, $c = 0$ 或 $-\infty$, 这就是所谓的局部化现象. 此时, 并没有失调的要求, 这与线性系统完全不一样 (线性系统必须有失调条件才能发生局部化现象).

$e_1, e_3 \neq 0$ 时, 仍令 $x_2 = cx_1$, 代入 (1) 得到的匹配方程组无实数解. 这表明, 匹配方法不能求得此时系统的模态.

下面采用多尺度法进行分析. 考虑工程上广泛存在的弱非线性弱耦合系统. 此

时相应于(1)式的运动方程可写成(考虑谐调情况)

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + x_1 + \varepsilon\alpha_1(x_1 - x_2) + \varepsilon\mu x_1^3 + \varepsilon\alpha_3(x_1 - x_2)^3 &= 0 \\ \ddot{x}_2 + x_2 + \varepsilon\alpha_1(x_2 - x_1) + \varepsilon\mu x_2^3 + \varepsilon\alpha_3(x_2 - x_1)^3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中, $\varepsilon \ll 1$.

根据多尺度法, 由 ε^0 项可解得零阶项为

$$\left. \begin{aligned} x_{10} &= A_1(T_1)e^{iT_0} + \bar{A}_1(T_1)e^{-iT_0} \\ x_{20} &= A_2(T_1)e^{iT_0} + \bar{A}_2(T_1)e^{-iT_0} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

其中, x_{10}, x_{20} 分别是 x_1, x_2 的零阶项, $T_0 = t, T_1 = \varepsilon t, A_1, A_2$ 为未知复函数, \bar{A}_1, \bar{A}_2 为 A_1, A_2 的共轭函数. 令

$$A_1(T_1) = \frac{1}{2}a_1(T_1)e^{i\beta_1(T_1)}, \quad A_2(T_1) = \frac{1}{2}a_2(T_1)e^{i\beta_2(T_1)} \quad (7)$$

分别代入 ε^1 项并利用(6)式, 可得

$$a_1' = \left[\frac{1}{2}\alpha_1 a_2 + \frac{3}{8}\alpha_3(a_2^3 + a_1^2 a_2) \right] \sin \varphi - \frac{3}{8}\alpha_3 a_1 a_2^2 \sin 2\varphi \quad (8)$$

$$a_2' = - \left[\frac{1}{2}\alpha_1 a_1 + \frac{3}{8}\alpha_3(a_1^3 + a_1 a_2^2) \right] \sin \varphi + \frac{3}{8}\alpha_3 a_1^2 a_2 \sin 2\varphi \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \varphi' &= \frac{1}{2}\alpha_1 \left(\frac{a_2}{a_1} - \frac{a_1}{a_2} \right) \cos \varphi + \frac{3\mu}{8}(a_2^2 - a_1^2) \\ &\quad + \frac{3}{8}\alpha_3 \left[(a_1^2 - a_2^2)(1 + \cos 2\varphi) - \left(\frac{a_1^3}{a_2} - \frac{a_2^3}{a_1} \right) \cos \varphi \right] \end{aligned} \quad (10)$$

其中, “'”表示 $\frac{d}{dT_1}$, $\varphi = \beta_2 - \beta_1$.

由(8), (9)式可得

$$a_1^2 + a_2^2 = E \quad (11)$$

其中, 常数 E 由初始条件决定.

根据非线性模态的定义, 引入驻值条件: $a_1' = a_2' = \varphi' = 0$, 则由(8), (9)式得

$$\sin \varphi = 0, \quad \cos \varphi = \pm 1 \quad (12)$$

由(10), (11)式得

$$a_1^2 = a_2^2 \quad (13)$$

或

$$a_1 a_2 = \pm \frac{4\alpha_1 + 3\alpha_3 E}{6\alpha_3 - 3\mu} = \pm F \quad (14)$$

其中 $\cos \varphi = 1$ 时上式取正号, $\cos \varphi = -1$ 时取负号.

方程 (13) 表明 $a_1/a_2 = \pm 1$, 代表了非线性系统的对称、反对称相似模态, 与能量 E 无关. 这与匹配法所得结果一致.

由 (11), (14) 式可得

$$\left. \begin{aligned} a_1 + a_2 &= \pm \sqrt{E + 2F} \\ a_1 a_2 &= \pm F \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

其可解条件为 $E \geq \pm 2F$.

(15) 表明了 a_1 与 a_2 间的关系, 一般情况下是非线性关系, 与能量 E 有关, 由此决定的模态是非相似模态. 图 4 显示了 a_2/a_1 随 F 的变化情况, 其中 $E = 1$, $\cos \varphi = 1$. 此时仍存在着分叉现象, 虚线表示不稳定解. 另外, F 很小时, a_2/a_1 要么很小, 要么是很大的负值, 此即局部化现象.

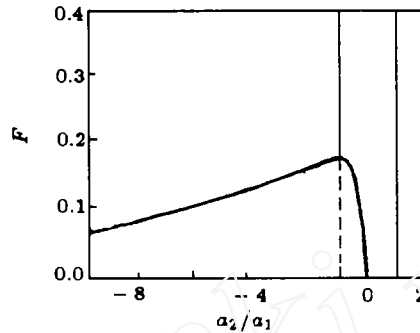


图 4 a_2/a_1 随 F 的变化情况 ($E = 1$)
Fig.4 Curve of a_2/a_1 versus $F(E = 1)$

若令 $\alpha_1 = 0$, $\cos \varphi = 1$, $a_1 = 1$, 则由 (11) 及 (14) 得到的解与 (4) 式完全一样.

可见, 此时与匹配法结果一致. 所以, 多尺度法不仅能求解相似模态, 还能求非相似模态, 而匹配法则只能求解相似模态.

参 考 文 献

- 1 Vakakis AF. Non-similar normal oscillations in a strongly non-linear discrete system. *Journal of Sound and Vibration*, 1992, 158(2): 341-361
- 2 Pierre C, Shaw SW. Mode localization due to symmetry-breaking nonlinearities. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1991, 1(2): 471-475
- 3 Shaw SW, Pierre C. Non-linear normal modes and invariant manifolds, *Journal of Sound and Vibration*, 1991, 150(1): 170-173
- 4 刘炼生, 黄克累. 一种用于非线性振动系统的模态分析方法. *力学学报*, 1980, 20(1): 41-48

BIFURCATION AND LOCALIZATION PHENOMENA OF NONLINEAR MODES IN A NONLINEAR SYSTEM

Liu Jike Zhao Lingcheng Fang Tong

(Northwestern Polytechnical University, P.O. Box 264, Xi'an 710072, China)

Abstract A 2 degree of freedom system with cubic nonlinear stiffnesses is investigated by use of the matching method and the method of multiple scales. The nonlinear modes are obtained according to their definition. The bifurcation and localization phenomena of nonlinear modes in the system are analysed in detail. It is shown that the basic mechanism for nonlinear mode localization is not nonlinear asymmetries as concluded by C. Pierre et al., but the properties of nonlinear system, i.e., the dependence of the frequency of oscillation on the amplitude.

Key words nonlinear modes, mode bifurcation, mode localization, matching method, method of multiple scales

www.cnki.net