

一致切线刚度法在三维弹塑性有限元分析中的应用

邢誉峰

(北京航空航天大学固体力学研究所, 北京 100083)

钱令希

(大连理工大学工程力学研究所, 大连 116023)

提要 本文提出了一致切线刚度法, 并把它应用于三维弹塑性有限元分析问题. 从而解决了增量迭代弹塑性有限元分析方法中长期存在的速度慢、精度低问题. 一致切线刚度法满足加卸载互补准则, 即没有应力漂移现象, 具有一阶精度、二阶迭代收敛速度、计算量少和无条件稳定等优点. 借助算例对一致切线刚度法和传统切线刚度法(包括路径相关和路径无关两种结构变量更新格式)从计算精度、迭代收敛速度和计算量等几方面进行了比较.

关键词 一致切线刚度, 弹塑性有限元, 应力漂移, 互补准则, 增量迭代

一、引 言

在增量弹塑性有限元分析方法中, 一直存在这样两个方面: (1) 精度; (2) 迭代收敛速度. 二者相互影响, 不能单独地考虑一方面而舍弃另一方面. 在牛顿迭代法中, 决定这两个方面的关键因素是弹塑性模量的计算、结构变量(位移 u 、应变 ϵ 和应力 σ) 的更新以及二者是否一致. 本文亦是围绕这两个方面、具体针对三维弹塑性有限元分析而展开的.

在变刚度法中, 弹塑性模量的计算用到结构变量, 因此结构变量的更新精度直接影响弹塑性模量的计算精度, 进而影响迭代收敛速度. 譬如, 传统切线刚度法有与路径无关和应用较为广泛的路径相关两种变量更新格式, 后者不能保证精确满足加卸载“互补”准则, 即避免不了应力漂移现象, 甚至结果真实性亦不能保证; 又由于连续弹塑性切线模量 D_T 和路径无关变量更新格式不“一致”, 因此若二者联合起来使用不能保证切线刚度法固有的二阶迭代收敛速度. 为了提高传统切线刚度法的计算精度和迭代收敛速度, 人们已经做了不少工作^[1,2], 但都没有从根本上解决问题.

以弹性预测-塑性纠正为基本特征的弹塑性有限元分析方法^[3,4], 由于采用具有一阶精度且与路径无关的变量更新格式和与变量更新格式相“一致”的弹塑性切线模量 D_C , 因此提高了计算精度、且保持了传统切线刚度法的二阶收敛速度.

本文于 1993 年 3 月 18 日收到.

若用 D_C 代替 D_T , 同时利用与 D_C 相一致且与路径无关的变量更新格式, 就得到另外一种牛顿迭代方法, 本文称之为一致切线刚度法.

文献 [3] 把广义积分法则引入三维弹塑性问题分析之中, 但只给出一般本构方程的积分形式, 本文把一致切线刚度法应用于三维弹塑性分析问题, 包括以下几方面的工作: (1) 引入一与材料本构矩阵有相同特征子空间的对称矩阵, 从而得到向量形式的本构方程, 使整个推导过程和方法实现变得容易; (2) 为了便于说明一致切线刚度法中蕴涵的“一致”性概念, 从向量形式的连续型本构方程出发得到连续弹塑性切线模量 D_T ; (3) 应用广义中点积分法则对本构方程积分得到与路径无关的变量更新递推格式和与之相一致的弹塑性切线模量; (4) 说明给出的算法满足加卸载互补准则, 对一致切线刚度法高精度、收敛快的原因进行了分析, 并和传统切线刚度法进行比较, 算例证实了得出的结论.

二、向量形式本构方程及连续弹塑性切线模量

引入应力向量 σ 、应变向量 ε 和对称矩阵 P , 矩阵 P 和材料本构矩阵 D 有相同的特征子空间

$$\sigma = \{\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{12} \ \sigma_{23} \ \sigma_{31}\}^T$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ \varepsilon_{12} \ \varepsilon_{23} \ \varepsilon_{31}\}^T$$

$$P = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & & & & & \\ & -1 & 2 & & & \\ & & & \text{对 称} & & \\ & -1 & -1 & 2 & & \\ & 0 & 0 & 0 & 6 & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$D = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & & & & \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix}$$

其中 E 为弹性模量, μ 为泊松比.

1. 本构方程的向量形式

根据广义 Mises 屈服准则和广义 Prandtl-Reuss 相关联的塑性流动法则, 小变形塑性本构方程具有下列向量形式

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon^e + \varepsilon^p \\ \sigma &= D\varepsilon^e \\ \dot{\varepsilon}^p &= \dot{\lambda}P\sigma \\ \dot{\varepsilon}^p &= \dot{\lambda}\Phi\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \phi &= \frac{1}{2}\Phi^2 - \frac{1}{3}k^2(\bar{\varepsilon}^p) \leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中 $\Phi = \sqrt{\sigma^T P \sigma}$. 加卸载准则的 Kuhn-Tucker 形式为

$$\varphi \leq 0; \quad \dot{\lambda} \geq 0; \quad \varphi \dot{\lambda} \equiv 0 \quad (2)$$

本文称 (2) 式为加卸载互补准则. 其中 $\dot{\lambda}$ 为塑性流动因子, φ 为屈服函数, $k^2(\bar{\varepsilon}^p)$ 是等效塑性应变 $\bar{\varepsilon}^p$ 的单值连续函数, 反映屈服面不断扩展过程中等效应力不断增大的强化效应.

2. 连续弹塑性切线模量

传统切线刚度法通常用连续弹塑性切线模量. 从本构方程 (1.2) 式得

$$\dot{\sigma} = D(\dot{\varepsilon} - P\sigma\dot{\lambda}) \quad (3)$$

设某点处于塑性状态, 引入一致性条件 $\dot{\varphi} \equiv 0$ 得

$$\dot{\varphi} = \sigma^T P \dot{\sigma} - \frac{2}{3} k k' \dot{\varepsilon} \equiv 0 \quad (4)$$

其中 $k' = \partial k / \partial \bar{\varepsilon}^p$. 把 (1.4) 式、(9) 式一起代入 (4) 式得塑性拉格朗日乘子

$$\dot{\lambda} = \frac{n^T}{\beta} \dot{\varepsilon} \quad (5)$$

其中 $n = DP\sigma$, $\beta = n^T D^{-1} n + \frac{2}{3} k' \Phi^2$. 把 (5) 式代入 (3) 式整理得

$$d\sigma = D_T d\varepsilon \quad (6)$$

其中 $D_T = D - nn^T/\beta$ 被称为连续弹塑性切线模量.

三、本构方程的积分和一致弹塑性切线模量

1. 本构方程的积分

一致切线刚度法和传统切线刚度法不同, 它只用与路径无关的变量更新格式. 首先引入记号

$$\varepsilon_{m+\alpha} = \varepsilon_m + \alpha \Delta \varepsilon, \quad \alpha \in [0, 1] \quad (7)$$

其中 $\Delta\varepsilon = \varepsilon_{m+1} - \varepsilon_m$ 为应变增量. 应用广义中点积分法则, 在载荷增量段 $[R_m, R_{m+1}]$ 内对本构方程中的两个速率型方程 (1.3) 和 (1.4) 式进行积分, 以下以 λ 代替 $d\lambda$.

$$\varepsilon_{m+1}^p = \varepsilon_m^p + \lambda P \sigma_{m+\alpha} \quad (8)$$

$$\bar{\varepsilon}_{m+1}^p = \bar{\varepsilon}_m^p + \lambda \Phi_{m+\alpha} \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (9)$$

其中 λ 为载荷增量段上的塑性拉格朗日乘子, $\Phi_{m+\alpha} = \sqrt{\sigma_{m+\alpha}^T P \sigma_{m+\alpha}}$. 利用 (8—9) 式替换 (1.3), (1.4) 两式得另外一种形式的本构方程表达式

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{m+\alpha} &= \varepsilon_{m+\alpha}^e + \varepsilon_{m+\alpha}^p \\ \sigma_{m+\alpha} &= D \varepsilon_{m+\alpha}^e \\ \varepsilon_{m+1}^p &= \varepsilon_m^p + \lambda P \sigma_{m+\alpha} \\ \bar{\varepsilon}_{m+1}^p &= \bar{\varepsilon}_m^p + \lambda \Phi_{m+\alpha} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \varphi_{m+\alpha} &= \frac{1}{2} \Phi_{m+\alpha}^2 - \frac{1}{3} k^2 (\bar{\varepsilon}_{m+\alpha}^p) \leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

由于用 (8—9) 式代替 (1.3) 和 (1.4) 式, 当 $\alpha = 1$ 时, 替换精度是一阶的; 当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时为二阶替换精度^[3], 因此 (10) 式和 (1) 式是“一致”的.

根据广义中点积分法则, $\varepsilon_{m+\alpha}^p$ 的定义为

$$\varepsilon_{m+\alpha}^p = \alpha \varepsilon_{m+1}^p + (1 - \alpha) \varepsilon_m^p \quad (11)$$

由 (7) 式和 (10—11) 式可导出如下与路径无关的变量更新递推公式

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{m+\alpha} &= \varepsilon_m + \alpha \Delta\varepsilon \\ \sigma_{m+\alpha} &= \Theta(\lambda) (\varepsilon_{m+\alpha} - \varepsilon_m^p) \\ \varepsilon_{m+\alpha}^p &= \varepsilon_m^p + \alpha \lambda P \sigma_{m+\alpha} \\ \bar{\varepsilon}_{m+\alpha}^p &= \bar{\varepsilon}_m^p + \alpha \lambda \sqrt{\frac{2}{3}} \Phi_{m+\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

其中 $\Theta(\lambda) = (D^{-1} + \alpha P \lambda)^{-1}$ 被称为算法弹性切线模量.

对于载荷增量法, 若第 m 次加载后, 在载荷 R_m 作用下结构变量 $\{\varepsilon_m, \varepsilon_m^p, \bar{\varepsilon}_m^p\}$ 都已经准确地求出, 则根据 (12) 式即可求得在载荷 $R_{m+1} = R_m + \Delta R$ 作用下的更新变量 $\{\varepsilon_{m+1}, \varepsilon_{m+1}^p, \bar{\varepsilon}_{m+1}^p\}$, 其更新精度由求解 λ 的精度来控制. 实质上, 变量的更新是在应变之间进行的.

根据一致性条件, 可得塑性拉格朗日乘子 λ .

$$\varphi_{m+\alpha}(\lambda) = \frac{1}{2} \Phi_{m+\alpha}^2 - \frac{1}{3} k^2 (\bar{\varepsilon}_{m+\alpha}^p) = 0 \quad (13)$$

上式是 λ 的标量方程, 很容易用局部迭代法求解, 对线性强化模型, λ 具有解析式, 见 (24) 式.

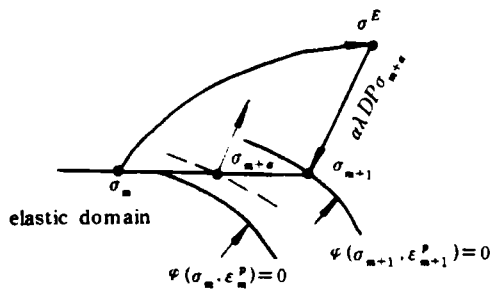


图1 塑性纠正过程
Fig.1 The process of plastic correction

2. 一致弹塑性切线模量

一致切线刚度法使用的是与积分法则相一致的弹塑性切线模量.

由(10)式得

$$\sigma_{m+\alpha} = D(\varepsilon_{m+\alpha} - \varepsilon_{m+\alpha}^p) \quad (14)$$

对(14)式微分,同时利用(10.3)式和(11)式得

$$d\sigma_{m+\alpha} = \Theta(\lambda)(d\varepsilon_{m+\alpha} - \alpha P \sigma_{m+\alpha} d\lambda) \quad (15)$$

对(12.4)式微分得

$$d\varepsilon_{m+\alpha}^p = \alpha \sqrt{\frac{2}{3}} (\Phi_{m+\alpha} d\lambda + \lambda d\Phi_{m+\alpha})$$

对(13)式微分,同时利用上式得

$$d\varphi_{m+\alpha} = \gamma \Phi_{m+\alpha} d\Phi_{m+\alpha} - \frac{2}{3} k' \alpha \Phi_{m+\alpha}^2 d\lambda = 0 \quad (16)$$

其中 $\gamma = 1 - \frac{2}{3} \alpha \lambda k'_{m+\alpha}$. 这样由(15—16)两式可得塑性拉格朗日乘子

$$d\lambda = \frac{N_{m+\alpha}^T}{\alpha \beta} d\varepsilon_{m+\alpha} \quad (17)$$

其中 $N_{m+\alpha} = \Theta P \sigma_{m+\alpha}$, $\beta = N_{m+\alpha}^T \Theta^{-1} N_{m+\alpha} + \frac{2}{3} \Phi_{m+\alpha}^2 \frac{k'_{m+\alpha}}{\gamma}$.

利用(15)和(17)两式得一致弹塑性应力-应变关系

$$d\sigma_{m+\alpha} = D_C d\varepsilon_{m+\alpha} \quad (18)$$

其中 $D_C = \Theta^{-1} N_{m+\alpha} N_{m+\alpha}^T / \beta$ 即是与积分法则一致的弹塑性切线模量.

若令 $\alpha = 1$, 且某点处于塑性状态, 则当载荷增量 $\Delta R \rightarrow 0$ 时, 有 $\lambda \rightarrow 0$, $\gamma \rightarrow 1$, 进而 $\Theta \rightarrow D$, $D_C \rightarrow D_T$, 即一致弹塑性切线模量退化为连续弹塑性切线模量, 相当于在前面推导过程中略去二阶小量 $d\lambda$, 这亦可说明(1)式和(10)式是“一致”的. 同时我们可得出这样的结论: 当载荷增量取得足够小时, 一致切线刚度法和传统切线刚度法具有相同的收敛速度, 算例亦说明了这点.

利用(11)式和(10.1—10.3)式可得下式

$$\sigma_{m+\alpha} = \sigma^E - \alpha \lambda D P \sigma_{m+\alpha}$$

其中 $\sigma^E = D(\varepsilon_{m+\alpha} - \varepsilon_m^p)$ 可理解为纯弹性预测应力, 而根据一致性条件 $\varphi_{m+\alpha}(\lambda) = 0$ 求 λ 相当于更新应力从预测状态 σ^E 返回到加载面的塑性纠正过程, 应力的塑性纠正量为 $\alpha \lambda D P \sigma_{m+\alpha}$, 如图1.

四、塑性拉格朗日乘子和方法实现

文献 [3] 已经证明, 近似积分式 (8—9), 当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时, 保证二阶精度; 当 $\alpha \neq \frac{1}{2}$ 时, 保证一阶精度, 并且对 Mises 屈服准则, 当 $\alpha \geq \frac{1}{2}$ 时导出的变量更新公式 (12) 是无条件稳定的. 又由于在实际计算时, 对较大载荷增量, $\alpha = 1$ 比 $\alpha = \frac{1}{2}$ 的精度要高、迭代过程也较之平稳, 因此以下我们取 $\alpha = 1$.

1. 塑性拉格朗日乘子

下面考虑矩阵 D 和 P . 对各向同性弹性体, 矩阵 D 和 P 有相同的特征子空间, 即

$$P = Q^T \Lambda_P Q, \quad D = Q^T \Lambda_D Q \quad (19)$$

其中 Q 为正交矩阵, $Q^{-1} \equiv Q^T$,

$$Q^T = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & Q_{22} \end{bmatrix}$$

其中子矩阵 Q_{11} 和 Q_{22} 分别为

$$Q_{11} = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -2 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad Q_{22} = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ & \sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix}$$

对角矩阵 Λ_P 和 Λ_D 分别为

$$\Lambda_P = \text{diag}[1 \ 1 \ 0 \ 2 \ 2 \ 2]$$

$$\Lambda_D = \text{diag}[2G \ 2G \ \frac{E}{1-2\mu} \ G \ G \ G]$$

其中 G 为剪切弹性模量.

又因为 P 和 D 有相同的特征向量, 因此

$$PD = DP \quad (20)$$

下面定义

$$\sigma^E = D(\varepsilon_{m+1} - \varepsilon_m^p); \quad \eta = Q\sigma^E$$

$$\Xi(\lambda) = (I + \lambda\Lambda_D\Lambda_P)^{-1}; \quad S^2(\lambda) = \frac{1}{3}k^2 \left(\varepsilon_m^p + \lambda\Phi(\lambda)\sqrt{\frac{2}{3}} \right)$$

现在给出塑性拉格朗日乘子的具体求法:

把 (19) 式代入 (12.2) 式整理得

$$Q\sigma_{m+1} = \Xi(\lambda)\dot{\eta}$$

对 Φ 的表达式进行变换

$$\Phi_{m+1}^2 = \eta^T \Xi \Lambda_P \Xi \eta = \eta^T \Gamma(\lambda) \eta \quad (21)$$

其中 $\Gamma(\lambda) = \Xi \Lambda_P \Xi$ 为对角矩阵. 不妨假设 η 已知

$$\eta = \{\eta_{11} \ \eta_{22} \ \eta_{33} \ \eta_{12} \ \eta_{23} \ \eta_{31}\}^T$$

因为 Ξ 为对角矩阵, 因此 $\Gamma(\lambda)$ 的对角元素很容易求出, 即

$$\Gamma(\lambda) = \text{diag}[a \ a \ 0 \ 2a \ 2a \ 2a]$$

其中 $a = 1/(2G\lambda + 1)^2$. 这样可得 Φ 的显式

$$\Phi_{m+1}^2(\lambda) = 2a^2 \left(\frac{1}{2}(\eta_{11}^2 + \eta_{22}^2) + \eta_{12}^2 + \eta_{23}^2 + \eta_{31}^2 \right)$$

根据定义 $\eta = Q\sigma^E$, 展开后代入上式得

$$\Phi_{m+1}^2(\lambda) = \frac{2}{3}a(\bar{\sigma}^E)^2 \quad (22)$$

其中 $\bar{\sigma}^E$ 为等效应力

$$\bar{\sigma}^E = \frac{\sqrt{2}}{2} \left((\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) \right)^{1/2}$$

这样方程 (13) 变换为

$$\varphi_{m+1}(\lambda) = \frac{1}{2}\Phi_{m+1}^2(\lambda) - s^2(\lambda) = 0, \lambda \geq 0 \quad (23)$$

由 (22) 式可以看出, 上式中的 Φ_{m+1} 计算起来很容易, 这样由一致性条件, 利用 Regula-Falsi 算法可容易地求得指定精度的 λ 值.

如果是线性强化模型, $k = \sigma_s + k'_{m+1}\bar{\varepsilon}_{m+1}^p$ (σ_s 为初始屈服应力, k 为后继屈服应力, k' 相当于强化系数), 则 λ 的解析式为

$$\lambda = \frac{1}{2G} \left(\frac{\bar{\sigma}^E \left(1 + \frac{k'_{m+1}}{3G} \right)}{\sigma_s + k'_{m+1} \left(\bar{\varepsilon}_m^p + \frac{\bar{\sigma}^E}{3G} \right)} - 1 \right) \quad (24)$$

2. 一致切线刚度法的实现

下面是牛顿一致切线刚度法用于三维弹塑性问题分析的具体执行步骤:

- (1) 由位移增量, 更新应变和应力
 - (i) 更新应变向量, 计算弹性试应力

$$\varepsilon_{m+1} = \varepsilon_m + \Delta\varepsilon$$

$$\sigma^E = D(\varepsilon_{m+1} - \varepsilon_m^p)$$

(ii) 根据一致性条件 $\varphi_{m+1} \equiv 0$ 和 Regula-Falsi 算法求塑性拉格朗日乘子

$$\varphi_{m+1}(\lambda) = \frac{1}{3}a(\bar{\sigma}^E)^2 - \frac{1}{3}k^2\left(\bar{\varepsilon}_m^p + \lambda\Phi(\lambda)\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \equiv 0$$

(iii) 更新应力和塑性应变

$$\begin{aligned} \sigma_{m+1} &= Q^T(I + \lambda\Lambda_D\Lambda_P)^{-1}Q\sigma^E \\ \varepsilon_{m+1}^p &= \varepsilon_m^p + \lambda Q^T(\Lambda_p^{-1} + \lambda\Lambda_D)^{-1}Q\sigma^E \\ \bar{\varepsilon}_{m+1}^p &= \bar{\varepsilon}_m^p + \lambda\sqrt{\frac{2}{3}}\Phi_{m+1} \end{aligned}$$

(2) 计算单元刚度阵和不平衡力向量 ΔF

$$\begin{aligned} K_{m+1} &= \sum_e \int_{V_e} B^T D_c B dv \\ \Delta F &= R_{m+1} - \sum_e \int_{V_e} B^T \sigma_{m+1} dv \\ D_C &= \Theta - N_{m+1} N_{m+1}^T / \bar{\beta} \end{aligned}$$

(3) 求解平衡方程.

说明与讨论：

(1) 变量 $(\bullet)_m$ 代表载荷 R_m 作用下的收敛值，而变量 $(\bullet)_{m+1}$ 应该理解为载荷 R_{m+1} 作用下的第 i 次迭代值，即 $(\bullet)_{m+1}^i$ 。由于变量更新与前次迭代未收敛值 $(\bullet)_{m+1}^{i-1}$ 没有直接关系，仅仅依赖于收敛值 $(\bullet)_m$ ，因此变量更新是与路径无关的，迭代过程中的误差不会被累积继承下去，故保证最后结果完全满足方程 (10)，这亦是一致切线刚度法精度高的原因。图 2 清楚地显示了应力的更新过程，图中 $(\sigma_i^E)_0$ 皆对应 $\lambda_i = 0$ 。

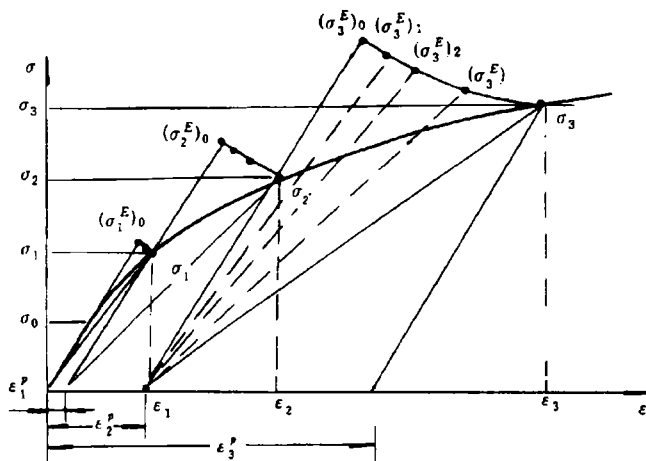


图 2 应力更新过程
Fig.2 Geometric interpretation of stress updating

(2) 由算法第 (ii) 步可知, 一致切线刚度法的每一步迭代计算都精确满足加卸载互补准则; $\varphi \leq 0$, $\lambda \geq 0$, $\varphi\lambda \equiv 0$, 因此不会出现应力漂移现象, 更新变量的精度完全由 λ 的求解精度来控制.

为了更加清楚地说明一致切线刚度法无应力漂移现象, 下面以线性强化情况进行证明: 以 σ_{m+1} 计算出来的等效应力 $\bar{\sigma}_{m+1}$ 和后继屈服应力 $k = \sigma_s + k'_{m+1}(\bar{\varepsilon}_m^p + \lambda\Phi_{m+1}\sqrt{\frac{2}{3}})$ 相等, 即

$$\bar{\sigma}_{m+1} = \sigma_s + k'_{m+1}(\bar{\varepsilon}_m^p + \lambda\Phi_{m+1}\sqrt{\frac{2}{3}}) \quad (25)$$

把 (22) 和 (24) 式代入上式右端整理得

$$k = \left(\sigma_s + k'_{m+1} \left(\bar{\varepsilon}_m^p + \frac{\bar{\sigma}^E}{3G} \right) \right) / \left(1 + \frac{k'_{m+1}}{3G} \right) \quad (26)$$

比较 (26) 和 (24) 两式可得

$$\lambda = \left(\frac{\bar{\sigma}^E}{k} - 1 \right) / 2G \quad (27)$$

把 (27) 式代入 σ_{m+1} 的表达式得

$$\sigma_{m+1} = \frac{1}{6} \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^E(4+2b) + (\sigma_{22}^E + \sigma_{33}^E)(2b-2) \\ \sigma_{22}^E(4+2b) + (\sigma_{11}^E + \sigma_{33}^E)(2b-2) \\ \sigma_{33}^E(4+2b) + (\sigma_{11}^E + \sigma_{22}^E)(2b-2) \\ 6\sigma_{12}^E \\ 6\sigma_{23}^E \\ 6\sigma_{31}^E \end{Bmatrix} \frac{k}{\bar{\sigma}^E} \quad (28)$$

其中 σ_{ij}^E 为 σ^E 的分量, $b = \bar{\sigma}^E/k$ 故

$$\bar{\sigma}_{m+1} = k \quad (29)$$

证闭.

传统切线刚度法中, 可求得满足一定精度的弹塑性比例因子 (对 Mises 各向同性硬化, 弹塑性比例因子有解析解), 但对路径相关格式而言, 变量更新精度难以保证, 故不能消除应力漂移现象, 参见算例.

(3) 一致切线刚度法的“一致”性概念包含以下三方面涵义:

(i) 方程 (10) 是方程 (1) 的替换方程, 由于满足一阶替换精度, 因此二者一致;

(ii) D_C 是通过线性化 (保证一阶精度) 方程 (10) 得到的, 而与路径无关的变量更新格式是精确满足方程 (10) 的, 故 D_C 和变量更新格式 (12) 一致, 这亦是一致切线刚度法有二阶迭代收敛速度的原因;

(iii) 塑性拉格朗日乘子 λ 是通过一致性条件得来的，使得整个迭代过程满足卸载互补准则。

五、算 例

如图 3 所示一旋转圆盘。弹性模量 $E = 2.0 \times 10^5 \text{MPa}$ ，泊松比 $\mu = 0.35$ ，屈服应力 $\delta_s = 8.14 \times 10^2 \text{MPa}$ ，强化系数 $k' = 9.0 \times 10^3 \text{MPa}$ ，容重 $\rho = 8.32 \text{ t/m}^3$ 。同时考虑面载荷和离心载荷，对圆盘进行弹塑性分析。算例采用 14 点高斯积分法，详见文献 [5]。从内边缘到外边缘顺序将结构 (沿 z 坐标方向) 剖分成 10 个单元，且单元编号 (NT) 也是从内到外依次为 1, 2, ..., 10。结果列入表 1—5 中。算例是在微机 SAT386 上完成的。表 1 中数据

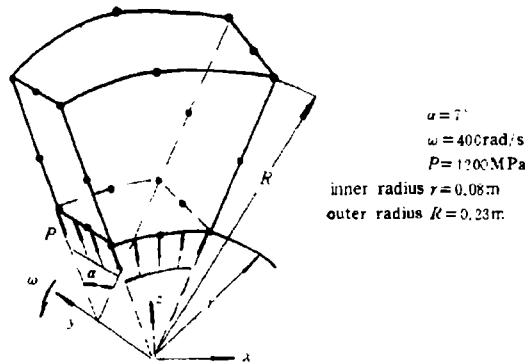


图 3 旋转圆盘
Fig.3 Rotating disk

(●) 表示加载到当前步时进入塑性状态的总高斯点数，TNI 为总迭代次数，LDSTEP 为载荷总步数，(e), (ep) 和 (p) 分别表示弹性状态、弹塑性状态和塑性状态；CTSM 表示一致切线刚度法，PI-TSM 为传统切线刚度法 (采用与路径无关变量更新格式 (12)), PD-TSM 为采用与路径相关格式的传统切线刚度法，详见文献 [5] 第五、六两章；表 3—5 中的 IES 为各单元高斯点序号， N_x, N_z 分别表示 x, z 坐标方向的应力。本文采用相对均方差位移收敛准则。

表 1 各种方法的迭代过程比较

Table 1 The comparison between the iterative processes under different methods

method	LDSTEP=6						LDSTEP=4					
	TNI	iterative process						TNI	iterative process			
PD-TSM	18	e	e	ep	ep	ep	p	24	e	ep	ep	p
		1	1	4	4	4	4		1	14	4	5
		(23)	(51)	(115)	(140)		(23)	(68)	(140)			
PI-TSM	66	e	e	ep	ep	ep	p	71	e	ep	ep	p
		1	1	5	6	12	41		1	16	6	48
		(23)	(51)	(112)	(140)		(23)	(67)	(140)			
CTSM	18	e	e	ep	ep	ep	p	14	e	ep	ep	p
		1	1	4	4	4	4		1	5	4	4
		(23)	(51)	(110)	(140)		(23)	(68)	(140)			

表 2 各种方法所用时间比较

Table 2 The comparison between CPU times under different methods

method	LDSTEP=6			LDSTEP=4		
	CTSM	PI-TSM	PD-TSM	CTSM	PI-TSM	PD-TSM
t(s)	1260	4440.01	1440.43	1380.26	4620.22	1620.21

表 3 第一单元应力值 (MPa) 比较

Table 3 The comparison between the stresses of the 1st element

IES	LDSTEP=6			LDSTEP=4		
	PD-TSM	PI-TSM	CTSM	PD-TSM	PI-TSM	CTSM
1	-1133.91	-1140.63	-1140.50	-1120.30	-1141.97	-1142.51
2	-934.17	-939.18	-939.11	-933.35	-940.36	-940.98
3	-1045.44	-1054.22	-1054.10	-1045.71	-1055.74	-1054.61
4	-1046.96	-1053.56	-1053.43	-1047.12	-1055.09	-1053.98
5	-1074.00	-1073.95	-1073.90	-1080.65	-1074.02	-1073.21
6	-1075.35	-1075.98	-1075.91	-1081.94	-1076.32	-1075.79
7	-1122.76	-1119.78	-1119.72	-1124.20	-1119.46	-1120.34
8	-1121.54	-1120.18	-1120.13	-1123.15	-1119.91	-1120.85
9	-1127.91	-1122.96	-1122.92	-1131.74	-1122.32	-1123.14
10	-1125.41	-1121.72	-1121.67	-1129.69	-1121.12	-1121.99
11	-907.63	-913.15	-913.11	-898.84	-914.38	-915.14
12	-905.72	-911.34	-911.29	-897.31	-912.65	-913.49
13	-919.32	-920.64	-920.60	-914.97	-921.48	-922.39
14	-917.16	-918.73	-918.68	-916.82	-919.58	-920.49

表 4 第十单元 x 方向应力值 (MPa) 比较

Table 4 The comparison between the stresses in x direction of the 10th element

IES	LDSTEP=6			LDSTEP=4		
	PD-TSM	PI-TSM	CTSM	PD-TSM	PI-TSM	CTSM
1	827.69	831.43	831.42	828.19	832.24	832.37
2	844.39	848.02	848.01	844.94	848.79	848.92
3	829.35	831.91	831.90	828.52	832.69	832.82
4	828.89	829.92	829.91	827.00	830.71	830.83
5	836.69	839.32	839.30	836.17	840.12	840.24
6	836.59	839.13	839.11	836.08	839.92	840.05
7	820.89	824.59	824.57	820.97	825.38	825.51
8	819.32	823.55	823.55	820.80	824.37	824.50
9	820.07	824.12	824.11	820.82	824.92	825.05
10	815.87	823.31	823.30	820.47	824.11	824.25
11	838.67	841.58	841.57	838.40	842.34	842.47
12	835.04	838.91	838.89	836.21	839.68	839.80
13	838.30	841.48	841.47	838.36	842.24	842.38
14	834.15	838.90	838.89	836.14	839.67	839.80

表 5 PD-TSM 的各高斯点应力漂移值 (MPa)

Table 5 Stress drifts at the Gaussian points of PD-TSM

IES	LDSTEP=6			LDSTEP=4		
	NT=1	NT=5	NT=10	NT=1	NT=5	NT=10
1	22.89	4.432	1.448	21.99	4.163	1.446
2	15.59	3.588	1.239	14.86	2.818	1.236
3	19.09	3.643	1.343	18.37	2.926	1.359
4	19.12	4.082	1.296	18.42	4.057	1.316
5	19.10	3.897	1.339	18.37	3.511	1.337
6	19.27	4.113	1.340	18.56	3.652	1.337
7	22.67	4.043	1.426	21.97	3.969	1.454
8	22.62	4.202	1.417	21.72	4.113	1.429
9	22.89	4.203	1.420	22.14	3.907	1.453
10	22.75	4.451	1.410	21.87	4.332	1.429
11	15.66	3.299	1.270	14.82	2.529	1.270
12	15.65	3.873	1.186	14.96	3.768	1.212
13	15.75	3.371	1.263	14.91	2.521	1.268
14	15.91	3.829	1.186	15.25	3.595	1.213

从算例结果可以看出：(1)CTSM 和 PI-TSM 的计算结果几乎不随增量步数和迭代次数变化而改变(见表 3—4)，这是因为(10)式替换(1)式时保证一阶精度，CTSM 和 PI-TSM 采用了与路径无关的变量更新格式(12)的缘故，避免了数值计算误差的积累，因此精度较高；而 PD-TSM 则不然，它避免不了误差累积，消除不了应力漂移

(见表 5). (2) 由于 D_C 和变量更新格式 (12) 是一致的, 因此 CTSM 具有二阶迭代收敛速度; 因为在一个迭代步内, D_T 是和传统切线刚度法中常采用的路径相关格式一致的; 在一个载荷增量步内, 当载荷步长取得适当小时, 这种关系也可以说成立, 所以 PD-TSM 具有条件二阶迭代收敛速度, 且误差累积和大载荷步也可以使 PD-TSM 丧失平方收敛速度; 由于 D_T 和 (12) 式不一致, 因此 PI-TSM 丧失了平方迭代收敛速度 (见表 1). 理论上讲, 当 $\Delta R \rightarrow 0$ 时, D_T 和 (12) 式趋近一致, 但这样会使载荷步数变得很多, 实际上不可行. (3) 表 2 给出的各种方法所用计算时间说明了 CTSM 计算量最少.

六、讨 论

因为 (10) 式是 (1) 式的一阶近似, 而一阶近似是局部性质的, 因此和传统切线刚度法一样, 载荷步长取得越小, CTSM 的计算精度越高, 即 (10) 式对 (1) 式的逼近精度越高, 进而我们可以得出结论: CTSM 的精度和全局加载历史有关, 和局部加载历史 (每一载荷步内的迭代次数) 无关. 又由于 CTSM 和 PI-TSM 计算结果十分吻合, 这说明弹塑性分析结果主要和变量更新格式相关.

综合前面理论分析和算例分析, 我们可以归纳出 CTSM 具有一阶精度、二阶迭代收敛速度、无条件稳定、计算量少等特征.

CTSM 从根本上更新了传统增量迭代方法, 在计算精度和迭代速度上都有明显的提高. 前述中的 α 取值不同, 就代表不同的算法, 因此 CTSM 是一簇方法. 对 PD-TSM 的条件稳定性, 我们可以采用线性搜索技术来保证实际应用时的收敛要求. 目前较受人青睐的另外一种弹塑性有限元分析方法是拟牛顿迭代法, 对其和 CTSM 的优劣有待于进一步研究比较, 以便为实际应用提供理论依据.

参 考 文 献

- [1] Nyssen C. An efficient and accurate iterative method allowing large incremental steps to solve elastoplastic problems. *Comput. Struct.*, 1981, 13: 63-71
- [2] Marques J M M C. Stress computation in elastoplasticity. *Eng. Comput.*, 1984, 1: 42-51
- [3] Ortiz M, Popov E P. Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive equations. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1985, 21: 1561-1576
- [4] Simo J C, Taylor R L. A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1986, 22: 649-670
- [5] 邢誉峰. 发动机涡轮盘榫槽分析与优化. 大连理工大学博士学位论文, 1992, 42-74

CONSISTENT TANGENT STIFFNESS METHOD AND ITS APPLICATION TO THREE-DIMENSIONAL ELASTOPLASTIC FINITE ELEMENT ANALYSIS

Xing Yufeng

(*The Solid Mechanics Research Center,
Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China*)

Qian Lingxi

(*Research Institute of Engineering Mechanics,
Dalian University of Technology, Dalian 116023, China*)

Abstract A method, called the Consistent Tangent Stiffness Method(CTSM), is proposed in this paper. We apply CTSM to the solution of three-dimensional elastoplastic problems. The method satisfies the complementary criteria of loading and unloading, and furthermore it is characterized by the advantages of preserving the asymptotic rate of quadratic convergency, consuming less computational time, holding the first order accuracy and unconditional stability. The problems of slow convergence and low accuracy, which have existed all along in the increment-iterative elastoplastic finite element analysis, have been solved. By the numerical experiments, the accuracy, the rate of convergence and the amount of computation of CTSM have been compared with those of classical tangent stiffness method (both path-dependent and path-independent update procedures).

Key words consistent tangent stiffness, elastoplastic finite elements, stress drifts, complementary criteria, increment-iterative