非保守力学系统的Lie对称性和守恒量[1)]

赵跃宇
(湖南大学工程力学系，长沙 410012)

提要　本文讨论非保守力学系统的 Lie 对称性，给出由 Lie 对称性得到力学系统守恒量的条件，并给出了说明性的例子. 在文章最后，还说明对于非保守系统，它的 Noether 对称性并不一定是其自身的 Lie 对称性.

关键词　非保守，对称性，守恒量

1. 引言

关于力学系统的对称性和首次积分的研究在最近十多年内取得了较大进展[7]. 对于保守的力学系统， Noether 对称性提供了直接给出首次积分的一种方法. 最近的研究表明：即使是对于保守的力学系统，除 Noether 对称性之外，还有很多的对称性是非 Noether 的. 因此，人们开始寻求更一般地研究对称性的方法，提出了一些新的对称性概念，如 Lie 对称性[1]、Lagrange 对称性[2]、高阶 Noether 对称性、拟对称性和伴随对称性[3]等. 这些对称性既提供了求解运动方程的首次积分的方法，也大大丰富了人们对力学系统的对称性及其内在性质的认识. 尽管各种对称性概念研究问题的出发点不尽一致，但它们的目的是一致的，都是希望能对力学系统的本质有更加清楚的认识.

Lie 对称性研究运动方程在无穷小变换下的不变性，广泛用于非线性力学问题的约化、力学系统相似分析等. Logan[5]曾证明对于保守系统，它的 Noether 对称性是一个 Lie 对称性，反之不然. 在本文中，我们将研究非保守力学系统的 lie 对称性及守恒量的存在条件及形式，我们的一个例子还表明，对于非保守力学系统，它的 Noether 对称性不一定是它的一个 Lie 对称性.

2. 非保守力学系统的 Lie 对称性及守恒量

设非保守力学系统保守部分的 Lagrange 函数为 L，非保守广义力为 Q_i，广义坐标为 $q^i(i=1,2,\cdots,n)$，则系统的 Euler-Lagrange 方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}-\frac{\partial L}{\partial q^i}=Q_i \tag{2.1}$$

考虑无穷小单参数变换群为

$$t\to\bar{t}=t+\in\tau(t,q,\dot{q}) \tag{2.2}$$

$$q^i\to\bar{q}^i=q^i+\in\xi^i(t,q,\dot{q}) \tag{2.3}$$

1) 国家自然科学基金青年基金资助项目.

本文于 1993 年 1 月 7 日收到第一稿， 1993 年 11 月 8 日收到修改稿.

将方程 (2.1) 经解耦归一后可得

$$\ddot{q}^i = \alpha^i(t, q, \dot{q}) \tag{2.4}$$

设向量场

$$E = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi^i\frac{\partial}{\partial q^i} \tag{2.5}$$

其一阶扩展

$$E^{(1)} = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi^i\frac{\partial}{\partial q^i} + (\dot{\xi}^i - \dot{\tau}\dot{q}^i)\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \tag{2.6}$$

其作用于 (2.4) 而不变的充要条件为

$$\ddot{\xi}^i - \dot{q}^i\ddot{\tau} - 2\dot{\tau}\alpha^i = E^{(1)}(\alpha^i) \tag{2.7}$$

满足 (2.7) 的生成函数 ξ^i 、 τ 所对应的向量场 E 称为 Lie 对称向量场. 对于非保守的力学系统，我们可以证明如下定理.

定理　设 M 是非保守力学系统的位形流形， E 是它的一个 Lie 对称向量场，若存在 $f \in C^\infty(M)$ 使得

$$E^{(1)}(L) + \dot{\tau}L + Q_i(\xi^i - \tau\dot{q}^i) = \dot{f} \tag{2.8}$$

则该非保守力学系统存在以下形式的不变量

$$\Phi = f - \left[L\tau + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(\xi^i - \dot{q}^i\tau)\right] \tag{2.9}$$

证明　将 (2.9) 对 t 求导得

$$\begin{aligned}
\dot{\Phi} &= \dot{f} - \left[L\tau + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(\xi^i - \dot{q}^i\tau)\right]^{\bullet} \\
&= E^{(1)}(L) + \dot{\tau}L + Q_i(\xi^i - \dot{q}^i\tau) - \left[\dot{\tau}L + \dot{L}\tau + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(\xi^i - \dot{q}^i\tau) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(\dot{\xi}^i - \ddot{q}^i\tau - \dot{q}^i\dot{\tau})\right] \\
&= E^{(1)}(L) - \tau\dot{L} + \left[Q_i - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\right](\xi^i - \dot{q}^i\tau) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(\dot{\xi}^i - \ddot{q}^i\tau - \dot{q}^i\dot{\tau}) \\
&= \left[Q_i + \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right](\xi^i - \dot{q}^i\tau) \equiv 0
\end{aligned}$$

故 Φ 的确是运动的首次积分.

对应于保守力学系统的 Lie 对称性及守恒量的研究已有了大量成熟的工作，在 80 年代中后期并有了用 REDUCE 系统编制的软件包完成确定各种力学系统的 Lie 对称性的工作. 对于非保守力学系统的相关结果本文首次得到，通过下一部分的例子我们证实了对非保守力学系统对应于 Lie 对称性的首次积分的存在.

3. 说明性例子

我们考察下面的例子.

$$\ddot{q} = \dot{q}^3 \tag{3.1}$$

(3.1) 在无穷小变换的生成函数为 $\xi=\xi(t,q),\tau=\tau(t,q)$ 的点变换下的不变性条件为

$$\begin{aligned}&\xi_{tt}+\dot{q}(2\xi_{tq}-\tau_{tt})+\dot{q}^2(\xi_{qq}-2\tau_{tq})-\dot{q}^3\tau_{qq}+(\xi_q-2\tau_t-3\dot{q}\tau_q)\dot{q}^3\\&\quad=3[\xi_t+\dot{q}(\xi_q-\tau_t)-\dot{q}^2\tau_q]\dot{q}^2\end{aligned}\tag{3.2}$$

Sarlet 等给出了时间生成函数

$$\tau=C_1+C_2q+C_3q^2+C_4q^3+C_5t+C_6tq+C_9(q^4-4t^2)\tag{3.3}$$

进一步可计算出空间生成函数

$$\xi=-\frac{1}{6}(6C_4+24C_7+3C_6)t+\frac{1}{2}(C_5-2C_3-20C_7)q-\frac{1}{4}(C_6+6C_4)q^2+C_8\tag{3.4}$$

对于上述 Lie 对称性，当 $C_3=C_4=C_5=C_6=C_7=0$ 时，可证满足 (2.8) 的 f 为

$$f=-\frac{1}{2}C_1\dot{q}^2+C_8\dot{q}+C_9\tag{3.5}$$

此时将 (3.4)—(3.6) 代入 (2.9) 可得 $\Phi\equiv0$, 因而由它们不产生守恒量.

接着看一个 Lagrange 函数 $L=\frac{1}{2}\dot{q}^2$, 非保守广义力 $Q=\dot{q}$ 的力学系统. 此时运动微分方程 (2.1) 为

$$\ddot{q}=\dot{q}\tag{3.6}$$

在点变换下，(3.6) 不变的条件为

$$\begin{aligned}&\xi_{tt}+(2\xi_{tq}-\tau_{tt})\dot{q}+(\xi_{qq}-2\tau_{tq})\dot{q}^2-\tau_{qq}\dot{q}^3+(\xi_q-2\tau_t-3\dot{q}\tau_q)\dot{q}\\&\quad=\xi_t+\dot{q}(\xi_q-\tau_t)-\dot{q}^2\tau_q\end{aligned}\tag{3.7}$$

因而有

$$\xi_{tt}=\xi_t\tag{3.8}$$

$$2\xi_{tq}-\tau_{tt}+\xi_q-2\tau_t=\xi_q-\tau_\tau\tag{3.9}$$

$$\xi_{qq}-2\tau_{tq}-3\tau_q=-\tau_q\tag{3.10}$$

$$\tau_{qq}=0\tag{3.11}$$

求解 (3.8)—(3.11) 可得

$$\tau=C_6+C_7e^t-2C_1C_3+e^t\tag{3.12}$$

$$\xi=C_1e^t(C_3q+C_4)+g_{(q)}\tag{3.13}$$

代入 (2.8) 后最终解得存在守恒量 (2.9) 的空间与时间的生成函数为

$$\tau=C_6\tag{3.14}$$

$$\xi=C_6q+C_8\tag{3.15}$$

相应的规范函数

$$f = \frac{1}{2}C_6 q^2 + C_8 q \tag{3.16}$$

而力学系统的守恒量为

$$\Phi = \frac{C_6}{2}q^2 + C_8 q - \left[\frac{C_6}{2}\dot{q}^2 + \dot{q}(C_6 q + C_8 - C_6\dot{q})\right] \tag{3.17}$$

由于 (3.17) 中含有二个任意常数，分别取 C_6 任意、 $C_8 = 0$, 或 $C_6 = 0$ 、 C_8 任意，则得二个独立守恒量

$$\Phi_1 = \dot{q} - q \tag{3.18}$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - q\dot{q} - \frac{1}{2}q^2 \tag{3.19}$$

它们相对应的 Lie 对称向量场为

$$E_1 = C_8\frac{\partial}{\partial q} \tag{3.20}$$

$$E_2 = C_6\frac{\partial}{\partial t} + C_6 q\frac{\partial}{\partial q} \tag{3.21}$$

4. 点变换下 Noether 对称性与 Lie 对称性的关系

对于保守力学系统， Logan 已经证明点变换下的 Noether 对称性一定是一个 Lie 对称性，反之不然. 在此，我们以一例说明非保守系统在点变换下的 Noether 对称性不一定是一个 Lie 对称性.

以著名的 Emden 方程为例. Emden 方程为

$$\ddot{x} + \frac{2}{t}\dot{x} + x^5 = 0 \tag{4.1}$$

它是一个保守部分的 Lagrange 函数 $L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{6}x^6$, 非保守广义力 $Q = -\frac{2}{t}\dot{x}$ 的非保守力学系统. 在文献 [6] 中我们曾证明空间和时间的生成函数为

$$\tau = ct^3 \qquad \xi = -\frac{1}{2}cxt^3 \tag{4.2}$$

变换将导致 Noether 守恒量

$$x\dot{x}t^2 + \frac{1}{3}x^6t^3 + \dot{x}^2t^3 = \text{Const.} \tag{4.3}$$

(4.2) 为 Emden 系统的 Noether 对称变换，为说明其不是系统的 Lie 对称性，将其代入 (2.7) 为

$$\ddot{x} + \frac{8\dot{x}}{t} - \frac{4\dot{x}}{t^2} + \frac{12x}{t^2} - \frac{12x^5}{t} + 5x^5 = 0 \tag{4.4}$$

这表明无穷小变换的生成函数 (4.2) 不生成 Lie 对称性.

作者对评阅人的意见表示衷心的感谢.

参 考 文 献

[1] Lutzky M. *J Phys A: Math Gen* 1982, 15(3): L87–91
[2] Hojman S, Harleston H. *J Math Phys* 1981, 22: 1414–1419
[3] Sarlet W, Prince GE, Crampin M. *J Phys A: Math Gen* 1990, 23(8): 1335–1347
[4] Sarlet W, Crampin M. *J Phys A: Math Gen* 1985, 18(10): L563–565
[5] Thompson G. *J Phys A: Math Gen* 1986, 19(3): L105–110
[6] 赵跃宇. 湘潭大学自然科学学报, 1989, 11(2): 26–30
[7] 赵跃宇, 梅凤翔. 力学进展, 1993, 23(3): 360–372

CONSERVATIVE QUANTITIES AND LIE'S SYMMETRIES OF NONCONSERVATIVE DYNAMICAL SYSTEMS

Zhao Yueyu
(*Department of Engineering Mechanics, Hunan University, Changsha* 410012, *China*)

Abstract This paper discusses Lie's symmetry of nonconservative mechanical systems. The existence conditions of conservative quantities corresponding with Lie's symmetry are established. Two illustrative examples are given. Finally, we explain from an example that Noether's symmetry may not be Lie's symmetry for nonconservative mechanical system.

Key words nonconservative, symmetry, conservative quantity