

一种新的区域分离法¹⁾

王 斌 季仲贞* 曾庆存*

(中国科学院计算中心, 北京 100080)

*(LASG, 中国科学院大气物理研究所, 北京 100080)

提要 本文在特征方向法的基础上建立了一种新的区域分离法, 它适于在全球或半球区域的正压“浅水”模式上实现. 该方法有三个优点: 第一, 在分离区域的交界处的边条件不需要专门处理, 可以自然吻合, 这是其他区域分离法所难以达到的; 第二, 该方法利用地球经向为自然周期边界的特点, 可以将时间步长在极区附近增大数倍, 从而节省大量计算时间; 第三, 该方法虽然有两个分裂区域, 但主体计算仍在整个大区域内进行, 只是计算结果的具体处理不同而已, 这样的计算十分灵活方便.

关键词 特征方向法, 区域分离, 计算稳定性, 显式完全平方守恒差分格式

引 言

在计算地球流体力学领域中, 计算稳定性问题是一个不容回避的重要问题. 一个稳定性好的计算格式往往可望得到好的计算结果, 也可望取较大的时间步长, 节省计算时间. 大气动力学和海洋动力学的数值模拟问题, 往往需要作长时间的数值积分, 如何提高其时间效益显得十分重要. 在我国目前计算机技术还比较落后的情况下, 积极发展和建立稳定性好的快速算法是提高时间效益的重要途径, 而区域分离算法是其有效的方法之一. 对于全球或半球大气动力学方程, 其计算稳定性随区域的变化很大, 在极地和高纬地区的稳定性较差, 时间步长受到严重的限制, 而在赤道附近和中、低纬地区, 其计算稳定性较好, 时间步长可比极区附近增大 4—5 倍. 因此, 使用区域分离法可大量节省计算时间. 为了这个目的, 本文在特征方向法^[1]的基础上, 建立了一种新的区域分离算法, 数值试验结果表明, 该方法的时间效益很好.

特征方向法的基本原理已在文献 [1] 作了具体介绍. 由于那时是在一维平流方程的基础上提出的, 为了适于在全球或半球正压“浅水”模式上使用, 在这里, 我们有必要先将特征方向法作适当的推广.

1 特征方向法在球面正压“浅水”方程上的实现

对于球面正压“浅水”方程, 类似文献 [2,3], 令 $h = \sqrt{\varphi}$, $U = uh$, $V = vh$, 并记

$$AF = \frac{1}{2a \cos \theta} \left\{ \left(\frac{\partial u F}{\partial \lambda} + u \frac{\partial F}{\partial \lambda} \right) + \left(\frac{\partial v F}{\partial \theta} + v \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) \right\} \quad (1)$$

¹⁾ 国家科委“攀登计划”重大关键项目和国家科技攻关 85-906 项目中部分资助.
1993-04-14 收到.

则原方程可变成

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \theta} \left(h \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right) - f^* V &= -AU \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \theta} \left(h^* \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + f^* U &= -AV \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (hU) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h^* V) \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

根据 [4] 的理论，左端为适应过程，是一个快过程，而右端为演变过程，是一个慢过程。用差分格式求解 (2) 时，严重限制时间步长的是左端。因此，要提高格式的时间效益就必须从左端着手。然而，对于全球模式或半球模式，左端适应过程中严重限制差分格式时间步长的因子是 $a \cos \theta \Delta \lambda$ ，它在极点附近会变得很小，使稳定性判据得不到满足。因此，只要对左端 λ 方向使用特征方向法便可大大增加时间步长。由于 (2) 左端的空间微商部分不具有 (1) 的形式，因此不能直接在 (2) 上使用特征方向法^[1]。为此，我们对它作适当的变换。令

$$R_U = f^* V - AU, \quad R_\varphi = -\frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (h^* V) \quad (3)$$

并作等幅变换

$$\tilde{U} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\varphi - U), \quad \tilde{\varphi} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\varphi + U), \quad ((\tilde{U})^2 + (\tilde{\varphi})^2 = U^2 + \varphi^2) \quad (4)$$

则由 (2) 的第一式和第三式易得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} - \frac{1}{2a \cos \theta} \left[h \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \lambda} (h \tilde{U}) \right] &= R_{\tilde{U}} - f_1 \tilde{\varphi} \\ \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} + \frac{1}{2a \cos \theta} \left[h \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \lambda} (h \tilde{\varphi}) \right] &= R_{\tilde{\varphi}} + f_1 \tilde{U} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中

$$R_{\tilde{U}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(R_\varphi - R_U), \quad R_{\tilde{\varphi}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(R_\varphi + R_U), \quad f_1 = \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial h}{\partial \lambda} \quad (6)$$

容易看出，(5) 式左端的空间微商部分在形式上与 (1) 相同。根据文献 [1]，令

$$\left. \begin{aligned} \tilde{U} &= F^\lambda \left[\lambda + m^n(\lambda, \theta) \frac{\Delta \lambda}{\tau} (t - t^n), \theta, t \right] \\ \tilde{\varphi} &= G^\lambda \left[\lambda - m^n(\lambda, \theta) \frac{\Delta \lambda}{\tau} (t - t^n), \theta, t \right] \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} m(\lambda, \theta, t) &= \left[h \frac{2\tau}{a \cos \theta \Delta \lambda} \right] \\ h'(\lambda, \theta, t) &= h(\lambda, \theta, t) - m^n(\lambda, \theta) \frac{a \cos \theta \Delta \lambda}{2\tau} \quad \left(\left| h' \frac{\tau}{a \cos \theta \Delta \lambda} \right| < \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

则当 $t = t_n$ 有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F^\lambda}{\partial t} - \frac{1}{2a \cos \theta} \left\{ h' \frac{\partial F^\lambda}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \lambda} (h' F^\lambda) \right\} &= R_{\tilde{U}} - f'_1 G^\lambda \\ \frac{\partial G^\lambda}{\partial t} + \frac{1}{2a \cos \theta} \left\{ h' \frac{\partial G^\lambda}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \lambda} (h' G^\lambda) \right\} &= R_{\tilde{\varphi}} + f'_1 F^\lambda \end{aligned} \right\} \quad \left(f'_1 = \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial h'}{\partial \lambda} \right) \quad (9)$$

又设

$$U^\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}(G^\lambda - F^\lambda), \quad \varphi^\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}(G^\lambda + F^\lambda) \quad (10)$$

由于 $t = t_n$ 时, $U^\lambda = U$, $\varphi^\lambda = \varphi$, 则在此时刻可得到与原方程相似的方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U^\lambda}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \theta} \left(h' \frac{\partial \varphi^\lambda}{\partial \lambda} \right) - f^* V &= -AU^\lambda \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \theta} \left(h^* \frac{\partial \varphi^\lambda}{\partial \theta} \right) + f^* U^\lambda &= -AV \\ \frac{\partial \varphi^\lambda}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (h' U^\lambda) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h^* V) \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

按文献 [2,3], 将 (11) 离散化得到显式完全平方守恒差分方案

$$\left. \begin{aligned} \frac{(U^\lambda)^{n+1} - (U^\lambda)^n}{\tau} + L_1 (U^\lambda)^n + \varepsilon_n \tau B_1 (U^\lambda)^n &= 0 \\ \frac{V^{n+1} - V^n}{\tau} + L_2 V^n + \varepsilon_n \tau B_2 V^n &= 0 \\ \frac{(\varphi^\lambda)^{n+1} - (\varphi^\lambda)^n}{\tau} + L_3 (\varphi^\lambda)^n + \varepsilon_n \tau B_3 (\varphi^\lambda)^n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

其中 L_1, L_2, L_3 为与 (11) 式中空间微商部分 (左端和右端) 相容的空间差分算子. 用上式求出 $(U^\lambda)^{n+1}$, $(V)^{n+1}$ 和 $(\varphi^\lambda)^{n+1}$ 后, 我们来反演求 $U^{n+1}, V^{n+1}, \varphi^{n+1}$.

$$\left. \begin{aligned} (F^\lambda)^{n+1} &= \frac{\sqrt{2}}{2} [(\varphi^\lambda)^{n+1} - (U^\lambda)^{n+1}] \\ (G^\lambda)^{n+1} &= \frac{\sqrt{2}}{2} [(\varphi^\lambda)^{n+1} + (U^\lambda)^{n+1}] \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

根据文献 [1], 由 (7) 可得到反演公式

$$\left. \begin{aligned} \tilde{U}_{i,j}^* &= (F^\lambda)_{i+\frac{1}{2}m_{i,j}^n}^{n+1} = \frac{1}{2} [(F^\lambda)_{i+m_{i,j}^n}^{n+1} + (F^\lambda)_{i,j}^{n+1}] \\ \tilde{U}_{i,j}^{n+1} &= \tilde{U}_{i,j}^* - \sigma_n^\lambda (m_{i,j}^n)^2 (\tilde{U}_{i,j+1}^* - 2\tilde{U}_{i,j}^* + \tilde{U}_{i,j-1}^*) \\ \tilde{\varphi}_{i,j}^* &= (G^\lambda)_{i-\frac{1}{2}m_{i,j}^n}^{n+1} = \frac{1}{2} [(G^\lambda)_{i-m_{i,j}^n}^{n+1} + (G^\lambda)_{i,j}^{n+1}] \\ \tilde{\varphi}_{i,j}^{n+1} &= \tilde{\varphi}_{i,j}^* - \sigma_n^\lambda (m_{i,j}^n)^2 (\tilde{\varphi}_{i,j+1}^* - 2\tilde{\varphi}_{i,j}^* + \tilde{\varphi}_{i,j-1}^*) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

最后, 由 (4) 便求得 U^{n+1}, φ^{n+1}

$$U^{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} [\tilde{\varphi}^{n+1} - \tilde{U}^{n+1}], \quad \varphi^{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} [\tilde{\varphi}^{n+1} + \tilde{U}^{n+1}] \quad (15)$$

注意: (1) (12) 中的 B 算子及 ε_n 的计算详见文献 [2,3]. (2) 反演公式 (14) 中的 σ_n^λ 的计算详见文献 [1]. (3) 一般情况下, (8) 式中的 m 随时间变化得很慢, 因此可

以在时间方向隔数步换一次，这样可以节省计算量。(4) 对于非周期边界条件，时间步长不能比原来增加得太多，否则得增加附加边界条件，给计算带来麻烦。在这种情况下，时间步长取为原来的 $\alpha(1 < \alpha < 2)$ 倍，这样既增大了时间步长，又不需附加边界条件。但是，若边界条件是周期的，则时间步长不会受到这方面的限制。象全球模式和半球模式， λ 方向自然为周期边界，这样就避开了极区 $a \cos \theta \Delta \lambda$ 对时间步长的影响。

2 区域分离法

上面介绍了特征方向法在球面正压“浅水”方程上的具体实施，下面以此为基准对全球或半球区域的正压“浅水”模式建立一种新的区域分裂算法。对于半球模式或全球模式，其时间步长 τ 总是在极地和高纬地区取得很小，这是因为在这两个地区 $\Delta x = a \cos \theta_j \Delta \lambda$ 变得非常小，若 τ 取大了就会使稳定性判据得不到满足。而在中低纬地区和赤道附近， τ 就可以取得大得多(大约 4 至 5 倍)。因此，我们只要用前面介绍的特征方向法将极地和高纬地区的时间步长增大到与中低纬地区和赤道附近的时间步长同样大，就可在上述特征方向法的基础上进一步节省计算时间。下面我们作详细介绍。

假设在中低纬地区和赤道附近(即 $j \in D_2$ 时)差分格式的时间步长可取 $\tau = \tau_M$ (根据稳定性判据 $|\frac{2\tau}{a \cos \theta_j \Delta \lambda} h| < 1$)，而在极地和高纬地区(即 $j \in D_1$ 时)，其时间步长取为 $\tau = \tau_m (\tau_m \ll \tau_M)$ 。其中

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \{j | j = 2, 3, \dots, j_0; \quad j = 1 \text{ 对应极点} \} \\ D_2 &= \{j | j = j_0 + 1, j_0 + 2, \dots, J - 1; \quad j = J \text{ 对应赤道} \} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

令

$$\left. \begin{aligned} m_{i,j}^n &= \left[\frac{2\tau_M}{a \cos \theta_j \Delta \lambda} h_{i,j}^n \right] \\ (h'_{i,j})^n &= h_{i,j}^n - m_{i,j}^n \frac{a \cos \theta_j \Delta \lambda}{2\tau_M} \quad \left(\left| \frac{2\tau_M}{a \cos \theta_j \Delta \lambda} (h'_{i,j})^n \right| < 1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

则根据假设，当 $j \in D_1$ 时， $m_{i,j}^n > 0$ ，而当 $j \in D_2$ 时， $m_{i,j}^n \equiv 0$ ， $(h'_{i,j})^n \equiv h_{i,j}^n$ 。这样，我们可将两个区域 D_1, D_2 分离开来，分别采用不同的方案。对于区域 D_1 ，由于时间步长取不到 τ_M ，我们在 λ 方向用特征方向法将其增大到 τ_M 。这样，原方程组(2)在 D_1 内就可处理成(11)的形式。而对区域 D_2 ，我们不作任何处理，仍然保持(2)的形式。为了计算方便，我们再将两者统一起来。为此，令

$$\left. \begin{aligned} U_s &= \begin{cases} U^\lambda, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_{j_0} \\ U, \theta_{j_0+1} \leq \theta \leq \theta_{J-1} \end{cases} & V_s &= V \\ \varphi_s &= \begin{cases} \varphi^\lambda, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_{j_0} \\ \varphi, \theta_{j_0+1} \leq \theta \leq \theta_{J-1} \end{cases} & h_s &= \begin{cases} i', \theta_1 \leq \theta \leq \theta_{j_0} \\ h, \theta_{j_0+1} \leq \theta \leq \theta_{J-1} \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

这样, 方程组可统一写成 ($h_s^* = h \cos \theta$)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U_s}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \theta} \left(h_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial \lambda} \right) - f^* V_s &= -A U_s \\ \frac{\partial V_s}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \theta} \left(h_s^* \frac{\partial \varphi_s}{\partial \theta} \right) + f^* U_s &= -A V_s \\ \frac{\partial \varphi_s}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (h_s U_s) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h_s^* V_s) \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

于是可以直接用 (12) 的方法求解 (19), 得到 $(U_s^{n+1})_{i,j}$, $(V_s^{n+1})_{i,j}$, $(\varphi_s^{n+1})_{i,j}$. 当 $j \in D_1$ 时, $(U_{i,j}^\lambda)^{n+1} = (U_s^{n+1})_{i,j}$, $V_{i,j}^{n+1} = (V_s^{n+1})_{i,j}$, $(\varphi_{i,j}^\lambda)^{n+1} = (\varphi_s^{n+1})_{i,j}$. 按方案 (13), (14) 和 (15) 便可求得 $U_{i,j}^{n+1}$, $\varphi_{i,j}^{n+1}$. 当 $j \in D_2$ 时, $U_{i,j}^{n+1} = (U_s^{n+1})_{i,j}$, $V_{i,j}^{n+1} = (V_s^{n+1})_{i,j}$, $\varphi_{i,j}^{n+1} = (\varphi_s^{n+1})_{i,j}$. 至此, 区域分离法的基本原理就介绍完了. 余下的问题就是怎样分区. 一般情况下, 有人为分区和自动分区两种方法. 人为分区是根据本人的经验和主观判断来划分区域的. 例如, 对于半球模式, 一般取 $j_0 = [J/4]$. 而自动分区则是对预先取定的 τ_M 由计算机根据 $m_{i,j}^n$ 的值自动划分区域: $D_1 = \{j | m_{i,j}^n \neq 0\}$, $D_2 = \{j | m_{i,j}^n = 0\}$.

3 检验和讨论

为了检验新区域分离法的实用性和省时性, 我们对北半球用理想的 Rossby-Haurwitz 波作数值试验. 取 80×20 网格, 并用人为分区法把 (16) 中的 j_0 取为 5. 用显式完全平方守恒差分方案 (12) 计算时, 若取 B 为二阶协调耗散算子^[5], 则时间步长可增大到 1080 秒, 计算一天所花时间大约 6 秒, 比全区域特征方向法^[1] 省时近一倍, 而比原显式完全平方守恒差分格式^[5] 省时两倍多; 若选用三阶协调耗散算子^[5], 则时间步长可取 1440 秒, 计算一天费时 4.5 秒左右, 比全区域特征方向法^[1] 省时一倍多, 而比原显式完全平方守恒差分格式^[5] 省时三倍. 而且计算效果良好, 积分 100 天, 其波形基本不变 (见图 1,2).

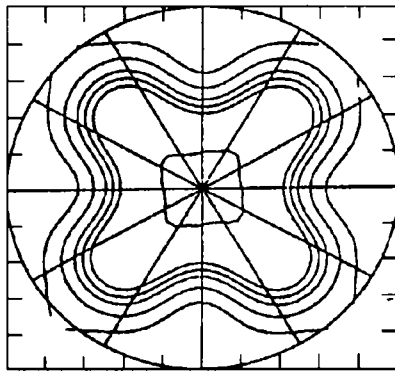


图 1 计算 R-H 波 50 天 (区域分离法)
Fig.1 050-day evolutions of R-H waves
(Region-Split Method)

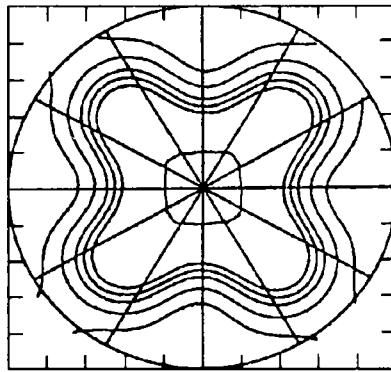


图 2 计算 R-H 波 100 天 (区域分离法)
Fig.2 100-day evolutions of R-H waves
(Region-Split Method)

在数值试验中还发现, 全区域特征方向法^[1] 不能随 B 算子协调度的增加而增大时间步长, 总限定在 900 秒以内, 而该区域分离法则不然, 其时间步长可随 B 算

子协调度的增加而增大(从上面的讨论即可看到),这是该方法的优点之一.另外,经典的区域分离法都存在着两个区域交界处怎样衔接好的问题,而这里介绍的方法却不存在这个问题.由于在 $j = j_0 + 1$ 处, $m_{i,j}^n = 0$, 这样 $h' = h$, $U^\lambda = U$, $\varphi^\lambda = \varphi$, 自然把两个区域衔接在一块,这是它的另一优点.最后,该方法的主体计算是求解(19),是在整个区域进行的,这与求解(2)没有什么区别,因此编程计算比较灵活方便.然而,它们又有本质的不同,这就是前者的计算稳定性大大优于后者,其时间步长是后者的 4—5 倍,所以可节省大量计算时间.由此可见,新的区域分离法是十分有实用价值的,值得推广应用.

参 考 文 献

- 1 王斌,季仲贞,曾庆存.科学通报,1992,37(10):2247-2250
- 2 王斌,季仲贞.科学通报,1990,35(10):766-768
- 3 季仲贞,王斌.大气科学,1991,15(2):1-10
- 4 曾庆存.数值天气预报的数学物理基础,第一卷.北京:科学出版社,1979
- 5 王斌,季仲贞.中国科学,1993,23(6):665-672

A NEW REGION-SPLIT METHOD

Wang Bin Ji Zhongzhen* Zeng Qingcun*

(Computing Center, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

*(LASG, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract A new region-split method is established on the basis of the characteristic direction method, which is easy to be implemented on the barotropic shallow water model whose region is the Sphere or Hemisphere. This method has three advantages. First, the boundary conditions on the common boundary of the split regions need no special treatment, because the boundaries of the split regions can tally naturally on the common boundary. Next, using the natural periodic boundary condition along the meridional direction in the new method, CPU time can be greatly reduced due to the increase of the time step near the Poles. Last, though there exist two split regions in this method, the key computations are implemented in the original integration region. Only the treatments of the results in the two split regions are different. Therefore, the calculations are convenient.

Key words the characteristic direction method, region split, computational stability, explicit complete square conservative difference scheme