

导管周围内外流场的计算

任安禄

(浙江大学力学系, 杭州 310027)

赵 峰 周连第

(中国船舶科学研究中心, 无锡 214082)

摘要 提出了一个适合于水下兵器导管与壳体之间内外流场的计算方法. 应用半交错网格, 可方便地实施导管叶片面上和壳体上的物面边界条件, 使得整个内外流场可以统一求解. 基于连续性方程的提法, 提出了一个类似于人工压缩性法的压力计算公式. 用本方法计算了层流和湍流内外流问题, 湍流计算采用 $k-\epsilon$ 两方程湍流模式, 数值试验和结果比较表明本方法收敛性态良好, 适用性强, 结果置信度高.

关键词 连续性方程提法, 半交错网格, 轴对称内外流动

引 言

黏性不可压缩流动问题的原始变量法一般分为连续性方程提法和泊松方程提法两类. 要计算象图 1 所示的导管轴对称内、外流问题会遇到许多困难. 如 SIMPLE^[1] 方法, 人工压缩性方法^[2] 由于采用交错网格, 在导管叶片上会造成网格系统的混乱, 使得求解区域难以形成统一的曲线坐标系. Abdallah^[3] 和 Mansour^[4] 方法可很好地实现叶片面上的边界条件, 但对复杂流动区域、湍流情况下的流场计算还在进一步研究. 国外一些文章^[5] 介绍, 在处理具有导管内、外流场这类复杂流动情况时, 大都采用分区迭代的办法, 通过导管内区和外区的分区迭代计算来求解. 这种方法由于分区迭代, 计算量增加, 且分区时界面较难确定. 为此, 我们发展了一套新的、有效的, 可广泛应用于各类平面, 轴对称内、外流动问题的计算方法. 采用时间相关 u 、 v 、 p (连续方程) 提法, 通过点松弛将连续性方程化为形式上等同于人工压缩性法的压力计算公式, 它的系数与网格几何参数, 周围节点的速度有关, 使得压力调整量与流场情况相适应, 从而克服了原来的人工压缩性方法由于虚拟压力波传播速度难以与真实的物理情况相一致, 压力及连续性余量收敛缓慢的缺点, 加快了收敛. 采用 H 型贴体网格坐标系统, 导管上下表面网格编号相同, 在计算程序实现上, 使用一种特殊的跳跃处理方法, 使得导管的内、外流场可以整体求解, 大大节约了计算时间. 方程在半交错网格上离散^[7], 既保留了原交错网格的优点, 可有效抑制压力 p 的振荡, 同时对速度 u 、 v 边界条件的实施又具有非交错网格的优点, 容易在导管内、外壁上实施边界条件. 对于高雷诺数流动, 引入 $k-\epsilon$ 两方程湍流模式, 计算中雷诺数可达 10^7 量级.

1993-10-21 收到第一稿, 1994-04-04 收到修改稿.

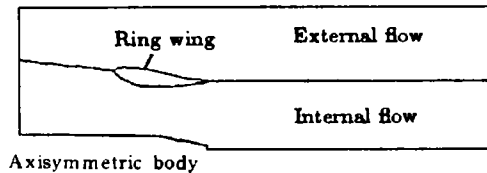


图 1 导管周围内外流场的计算模型
Fig.1 Computational model of internal and external flow near ring wing

1 控制方程与边界条件

轴对称黏性不可压缩湍流流动问题的无量纲基本方程为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial rv}{\partial r} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x} \left[(1 + 2\mu_t) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{1}{Re} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r(1 + \mu_t) \frac{\partial u}{\partial r} \right] \\ &+ \frac{1}{Re} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\mu_t \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} &= \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x} \left[(1 + \mu_t) \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \frac{1}{Re} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r(1 + \mu_t) \frac{\partial v}{\partial r} \right] \\ &+ \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_t \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{Re} (1 + 2\mu_t) \frac{v}{r^2} - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial r} - \frac{\partial p}{\partial r} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + u \frac{\partial k}{\partial x} + v \frac{\partial k}{\partial r} &= \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x} \left(1 + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \\ &+ \frac{1}{Re} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(1 + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial r} \right] + \frac{G}{Re} - \varepsilon \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} &= \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] \\ &+ \frac{1}{Re} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(1 + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right] + \frac{\varepsilon}{k} \left(C_{1\varepsilon} \frac{G}{Re} - C_{2\varepsilon} \varepsilon \right) \end{aligned} \quad (5)$$

$$G = \mu_t \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{v}{r} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\}$$

$$\mu_t = Re C_\mu k^2 / \varepsilon$$

边界条件：以图 1 所示的轴对称内外流问题来给出边界条件：

入口： $u = 1, v = 0, k = 0.00375u^2, \varepsilon = k^{1.5}/0.2, \mu_t = Re C_\mu k^2 / \varepsilon$, 边界层内 u 按 $1/7$ 规律分布；

出口： $\partial u / \partial n = 0, \partial v / \partial n = 0$;

外流： $u = 1, v = 0, \partial k / \partial n = 0, \partial \varepsilon / \partial n = 0$;

固壁、回转面及叶片面： $u = 0, v = 0, \partial u / \partial n = 0, \varepsilon$ 用壁面函数求出近壁网格上的值， $\varepsilon_p = C_\mu^{3/4} k^{3/2} K y_{ps} y_p$ 为近壁第一层网格到壁面的法向距离；

轴对称内外流场尾流中心线： $v = 0, \partial u / \partial n = 0, \partial k / \partial n = 0, \partial \epsilon / \partial n = 0$;

$k-\epsilon$ 模型常数： $C_\mu = 0.09, C_{1\epsilon} = 1.44, C_{2\epsilon} = 1.92, \sigma_k = 1.0, \sigma_\epsilon = 1.3, K = 0.41$.

我们在子午面内用贴体坐标系统，并采用 H 型网格，差分离散在如图 2 所示的半交错网格上进行。H 型网格的优点是在计算平面上网格形状、相对位置及边界段位置与物理平面基本一致，特别适用于内、外流场问题。我们可以借助程序技术，在导管叶面处采用上下表面几何参数跳跃处理，将 H 型网格的上下两块网格（基本对应着导管外、内流场）统一求解。做网格时用到的前缘、后缘的两条人为割线上的流场变量仍作为内点解，导管叶剖面在计算平面上重叠成一条直线，它应该具有双值几何参数，在对上、下表面边界附近内点计算时，要注意采用正确的边界信息。

在半交错网格上， u, k, ϵ 等定义在网格点上， v 和 p 则定义在通常意义的交错网格点上，见图 2。差分离散方程分别对 u, v, p, k, ϵ 格子来建立，从而可保留原交错网格所具有的优点，使求解压力 p 与周围节点产生关联，有效地抑制压力振荡，同时对 u, v 边界条件的实施又具有非交错网格的优点。

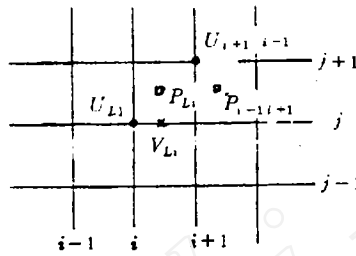


图 2 半交叉网格
Fig.2 Semi-staggered grid system

2 差分方程和压力程计算公式

我们先将控制方程 (1)–(5) 式转化到贴体坐标系下，采用时间相关方法， u, v, k, ϵ 四个方程的离散方法和形式相同，为保证差分格式稳定性我们在对流项中取逆风格式。以 u 方程为例

$$\frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t} + A_u u^{n+1} + B_u p^{n+1} = 0 \quad (6)$$

(6) 式中上角标 $n+1$ 和 $n-1$ 表示 $n+1$ 和 $n-1$ 步时间层值， Δt 为差分的时间间隔， A_u 和 B_u 分别为差分离散后的系数矩阵。

$$\frac{u^* - u^{n-1}}{2\Delta t} + A_u u^* + B_u p^n = 0 \quad (7)$$

式中 u^* 表示 u^{n+1} 的中间层值，我们对 (7) 式采用点松弛的计算方法

$$\begin{aligned} u^{*(k+1)} &= u^{*(k)} + \omega \left[\left(\frac{1}{2\Delta t} \right) I + A_u^0 \right]^{-1} \cdot \left[-A_u^- u^{*(k+1)} - A_u^0 u^{*(k)} \right. \\ &\quad \left. - A_u^+ u^{*(k)} - B_u p^* - \frac{1}{2\Delta t} \cdot (u^{*(k)} - u^{n-1}) \right] \\ &= u^{*(k)} + \omega \left[\left(\frac{1}{2\Delta t} \right) I + A_u^0 \right]^{-1} \cdot \text{rmu} \end{aligned} \quad (8)$$

式中， $u^{*(k)}$ 表示 $n+1$ 中间层第 k 次迭代值， ω 为松弛因子， rmu 为 u 动量方程的差分余量。

$$\text{rmu} = -A_u^- u^{*(k+1)} - A_u^0 u^{*(k)} - A_u^+ u^{*(k)} - B_u p^n - \frac{1}{2\Delta t} \cdot (u^{*(k)} - u^{n-1}) \quad (9)$$

其中, A_u^- 为矩阵 A_u 的对角线以下三角矩阵; A_u^+ 为矩阵 A_u 的对角线以上三角矩阵; A_u^0 为矩阵 A_u 的对角矩阵; I 为单位矩阵.

v 方程的差分离散方法和形式与上述 (6)–(9) 式类同.

$$\frac{v^{n+1} - v^{n-1}}{2\Delta t} + A_v v^{n+1} + B_v p^{n+1} = 0 \quad (10)$$

$$v^{*(k+1)} = v^{*(k)} + \omega \left[\left(\frac{1}{2\Delta t} \right) I + A_v^0 \right]^{-1} \text{rmv} \quad (11)$$

rmv 为 v 动量方程的差分余量

$$\text{rmv} = -A_v^- v^{*(k+1)} - A_v^0 v^{*(k)} - A_v^+ v^{*(k)} - B_v p^n - \left(\frac{1}{2\Delta t} \right) (v^{*(k)} - v^{n-1}) \quad (12)$$

连续方程 (1) 的离散格式为

$$C_u u^{n+1} + C_v v^{n+1} = 0 \quad (13)$$

C_u 和 C_v 为连续方程的差分离散后的系数矩阵, 将 u^{n+1} 和 v^{n+1} 代入可得

$$\begin{aligned} & \omega \left\{ \left[\frac{1}{2\Delta t} I + A_u^0 \right]^{-1} \cdot C_u B_u + \left[\frac{1}{2\Delta t} I + A_v^0 \right]^{-1} \cdot C_v B_v \right\} p^{n+1} \\ & = C_u \left\{ u^{n+1(k)} + \omega \left[\frac{1}{2\Delta t} I + A_u^0 \right]^{-1} \right. \\ & \quad \cdot \left[-A_u^- u^{n+1(k+1)} - A_u^0 u^{n+1(k)} - A_u^+ u^{n+1(k)} - \frac{1}{2\Delta t} (u^{n+1(k)} - u^{n-1}) \right] \left. \right\} \\ & \quad + C_v \left\{ v^{n+1(k)} + \omega \left[\frac{1}{2\Delta t} I + A_v^0 \right]^{-1} \right. \\ & \quad \cdot \left[-A_v^- v^{n+1(k+1)} - A_v^0 v^{n+1(k)} - A_v^+ v^{n+1(k)} - \frac{1}{2\Delta t} (v^{n+1(k)} - v^{n-1}) \right] \left. \right\} \quad (14) \end{aligned}$$

记系数矩阵

$$D = \omega \left\{ \left[\frac{1}{2\Delta t} I + A_u^0 \right]^{-1} \cdot C_u B_u + \left[\frac{1}{2\Delta t} I + A_v^0 \right]^{-1} \cdot C_v B_v \right\} \quad (15)$$

方程 (14) 用点松弛法求解, 取初值为 p^n 以及用 p^n 算得的 u^* , v^* , 则 (14) 可改写为

$$p^{n+1} = p^n - \frac{\tau_p}{D - p} \nabla \cdot v \quad (16)$$

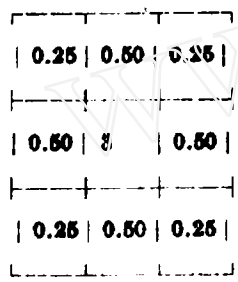
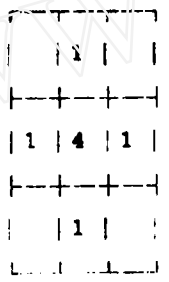
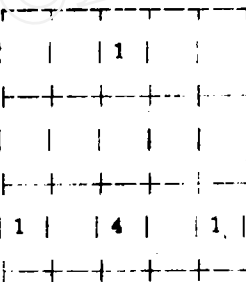
式中, D_p 为系数矩阵 (15) 式的对角线元素, τ_p 为压力方程求解的松弛系数, $D_p = D_{i,j}/(\tau J)_p$.

在曲线坐标下，经详细推导可得

$$\begin{aligned}
 D_{i,j} = & -x_{\eta i+1/2,j+1/2} \left\{ \frac{1}{2}(r_{i+1,j+1} + r_{i+1,j}) \cdot 0.25 \left[\frac{-x_{\eta i+3/2,j+1}}{4a_{ui+1,j+1}} - \frac{x_{\eta i+3/2,j}}{4a_{ui+1,j}} \right. \right. \\
 & + \left. \frac{x_{\xi i+1/2,j+1}}{a_{ui,j+1}} - \frac{x_{\xi i+1/2,j}}{a_{ui,j}} \right] - 0.5(r_{i,j+1} + r_{i,j}) 0.25 \left[\frac{x_{\eta i-1/2,j+1}}{4a_{ui-1,j+1}} + \frac{x_{\eta i-1/2,j}}{4a_{ui-1,j}} \right. \\
 & + \left. \frac{x_{\xi i+1/2,j+1}}{a_{ui,j+1}} - \frac{x_{\xi i+1/2,j}}{a_{ui,j}} \right] \left. \right\} + x_{\xi i+1/2,j+1/2} \left\{ 0.5(r_{i+1,j+1} + r_{i,j+1}) \frac{x_{\xi i+1/2,j+1}}{a_{ui,j+1}} \right. \\
 & + 0.5(r_{i+1,j} + r_{i,j}) \frac{x_{\xi i+1/2,j}}{a_{ui,j}} \left. \right\} + r_{\eta i+1/2,j+1/2} \left\{ 0.25 \left[r_{i+1,j+1} \frac{r_{\eta i+1,j+1} - r_{\xi i+1,j+1}}{a_{ui+1,j+1}} \right. \right. \\
 & + r_{i+1,j} \frac{r_{\eta i+1,j} + r_{\xi i+1,j}}{a_{ui+1,j}} \left. \right] + 0.25 \left[r_{i,j+1} \frac{r_{\eta i,j+1} + r_{\xi i,j+1}}{a_{ui,j+1}} + r_{i,j} \frac{r_{\eta i,j} - r_{\xi i,j}}{a_{ui,j}} \right] \left. \right\} \\
 & - r_{\xi i+1/2,j+1/2} \left\{ 0.25 \left[r_{i+1,j+1} \frac{r_{\eta i+1,j+1} - r_{\xi i+1,j+1}}{a_{ui+1,j+1}} - r_{i,j+1} \frac{r_{\eta i,j+1} + r_{\xi i,j+1}}{a_{ui,j+1}} \right] \right. \\
 & \left. - 0.25 \left[r_{i+1,j} \frac{r_{\eta i+1,j} + r_{\xi i+1,j}}{a_{ui+1,j}} - r_{i,j} \frac{r_{\eta i,j} - r_{\xi i,j}}{a_{ui,j}} \right] \right\} \omega \tag{17}
 \end{aligned}$$

表 1 各种网格下的压力系数 $D_{i,j}$, D_{nb} ($\Delta x = \Delta y = 1$)

Table 1 The coefficients $D_{i,j}$, D_{nb} in different grid systems ($\Delta x = \Delta y = 1$)

| | | |
|--|--|---|
|  |  |  |
| 半交叉网格 semi-staggered grid system | 交叉网格 staggered grid system | 非交叉网格 non-staggered grid system |

(16) 式形式象人工压缩性法，松弛系数 r_p 的选择比较容易，收敛性态良好。由于 D_p 有确定的值，与网格几何参数，周围节点的速度发生关联，使得压力调整量与流场情况相适应，从而克服了原来的人工压缩性法由于虚拟压力波传播速度难以与真实的物理情况相一致，压力及连续性余量收敛慢的缺点，加快了收敛。与 SIMPLE 方法相比，可少解一个泊松方程，计算量减少。在边界附近节点， $D_{i,j}$ 计算中要反映边界条件。

在差分公式 (6)–(16) 中 u, v, p 用一维编码来表述, 实际计算中 u, v, p 均为二维编码.

可模仿 SIMPLE 方法, 针对半交错网格推导各系数, 公式 (16) 也可以对其它网格系统导出. 表 1 中给出在连续方程提法下, 对流项采用中心差分, 且用平面直角坐标时, 半交错网格、交错网格以及非交错网格的压力系数 $D_{i,j}$ 与 D_{nb} 的关系, 从表中可以看出本文所采用的半交错网格, 压力扰动的影响范围较广, 同时又可有效防止压力锯齿形脉动, 有利于压力求解的收敛. 顺便指出, 一般说来连续方程压力求解系数与泊松方程压力求解系数位置或大小有所不同, 只有用交错网格二者才能一致.

3 计算实例

3.1 NACA0020 叶剖面平面绕流场计算

NACA0020 叶剖面平面绕流场常用来考核算法的有效性和可靠性. 我们先对此算例进行了 $Re = 100$ 的数值计算, 从图 4 的速度分量收敛过程中, 可以看出本算法具有良好的快速收敛性, 数值稳定性也较好. 图 3 为流场矢量图, 可以看出叶剖面的上下流场几乎对称, 表明在程序技术上很好地实现了叶剖面上下表面几何参数的跳跃. 图 5 为叶剖面表面无量纲压力计算值与风洞试验值的相应比较, 吻合良好.

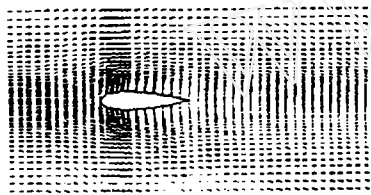


图 3 NACA0020 的流场矢量图

Fig.3 Velocity vector diagram of flow over NACA0020

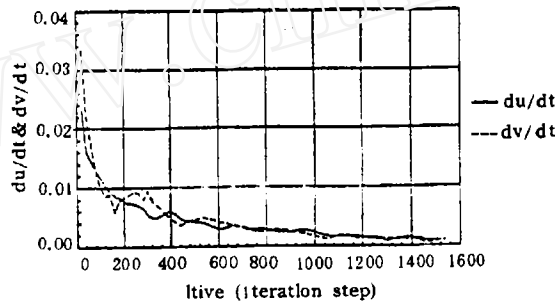


图 4 速度分量的收敛过程

Fig.4 Convergent process of velocity component

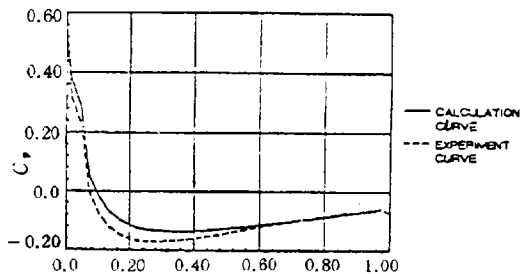


图 5 叶剖面表面无量纲压力

Fig.5 Non-dimensional pressure along the airfoil

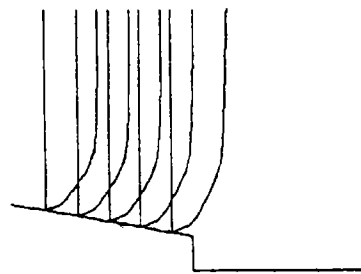


图 6 回转体上的速度剖面图

Fig.6 Velocity profile surrounding the axisymmetric body

3.2 轴对称回转体绕流计算

我们计算了轴对称回转体绕流场及尾部流场. 图 6 给出了回转体上速度剖面图, 其分布是合理的.

3.3 导管内外流场的计算

我们应用本方法对加速导管和减速导管的内、外流场进行了计算. 图 7 为加速导管内外流场速度矢量图, 计算雷诺数为 6.9×10^5 . 图 8 为导管表面的 C_p 曲线. 图 9 为减速导管内流场的流线图, 计算雷诺数为 2.3×10^7 . 图 10 为导管表面的 C_p 曲线.

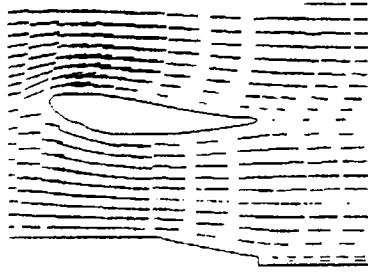


图 7 加速导管流场矢量图

Fig.7 Velocity vector near accelerative ring wing

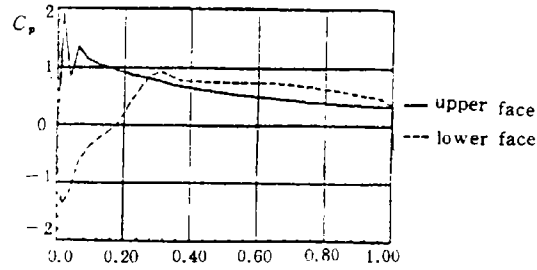


图 8 加速导管导管表面 C_p 曲线
 $Re = 6.9 \times 10^5$

Fig.8 Pressure coefficient C_p on the surface of accelerative ring wing, $Re = 6.9 \times 10^5$

— upper face - - - lower face



图 9 减速导管内流场流线图

Fig.9 Streamline diagram in internal flow of decelerative ring wing

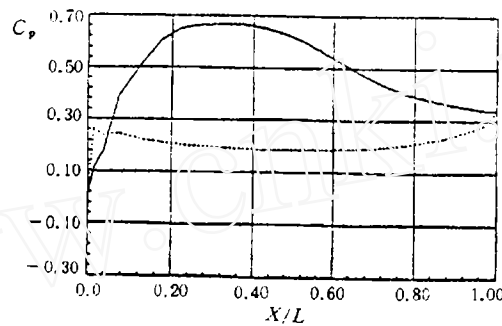


图 10 减速导管表面 C_p 曲线
 $Re = 2.3 \times 10^7$

Fig.10 Pressure coefficient C_p on the surface of decelerative ring wing, $Re = 2.3 \times 10^7$

— upper face - - - lower face

4 结 论

通过本文的工作, 我们认为:

(1) 用 H 型贴体坐标和在半交错网格下离散差分方程特别适用于内、外流场的计算.

(2) 用本文所提出的压力计算公式可成功地求解不可压缩流动问题, 节约计算量, 收敛速度较快.

本文所介绍的计算方法可以在平面或轴对称内、外流场普遍使用, 其收敛性和稳定性良好, 计算结果置信度高, 有着较高的适用价值和推广应用前景.

参 考 文 献

- 1 Patankar SV. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. Washington DC: Hemisphere, 1980
- 2 Chorin AJ. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *J of Computational Physics*, 1967, 2: 12-26

- 3 Abdallah S. Numerical solution for the pressure poisson equation with neumann boundary conditions using a nonstaggered grid 1.2.. *J of Computational Physics*, 1987, 70: 182-202
- 4 Mansour ML, Hamed A. Implicit solution of the incompressible Navier-Stokes equation. *J of Computational Physics*, 1990, 86: 147-167
- 5 Gresho PM. Incompressible fluid dynamics: Some fundamental formulation issues. *Annu Rev Fluid Mech*, 1991, 23: 413-453
- 6 Peyret R, Taylor TD. *Computational Methods for Fluid Flow*. New York: Springer-Verlag, 1983
- 7 Ren AL, Shih TM. Numerical solution of incompressible viscous flow over aerofoil with H-type grid. *J of Hydrodynamics, Ser B*, 1992, 4(2): 27-31
- 8 Williams M. Method for Calculating Incompressible Viscous Flows. *Numerical Heat Transfer, part B*, 1991, 20: 241-253
- 9 Yang CI. A Navier-Stokes Solution of Hull-Ring Wing-Thruster Interaction, 18th ONR

THE CALCULATION OF INTERNAL AND EXTERNAL FLOW FIELD NEAR RING WING

Ren Anlu

(Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Zhao Feng Zhou Liandi

(China Ship Scientific Research Center, Wuxi 214082, China)

Abstract A numerical method is presented here to solve the internal and external flow near/between ring wing and hulls of submerged weapons. The internal and external flow of full domain can be solved together by adopting semi-staggered grid system in which the boundary conditions of foils of the ring wing and hull are convenient to implement. The calculation of pressure is based on a continuity equation formulation which is similar to the artificial compressible method. The internal and external flow are calculated with this method in laminar flow or turbulent flow, the latter adopts $k-\varepsilon$ model to close the governing equations.

The results and numerical simulations compare favorably with the experiment, indicating that the present method is convergent, useful and effective.

Key words continuity equation formulation, semi-staggered grid, axisymmetrical internal and external flow