

# 计算机辅助光弹性应力分析\*

金观昌 赵文忠

(清华大学工程力学系, 北京, 100084)

**摘要** 本文提出一种新的计算机辅助光弹性应力分析方法,它具有全电子记录、全自动应力场分析、光路简单等优点。相位技术的采用使数据精度大大提高。文中给出了几种实验光路以及提高图象质量的方法,用对经受压圆盘光弹实验证明了方法的可行性。

**关键词** 光弹性, 图象处理, 应力分析, 实验应力分析

## 一、引言

全息照相的出现解决了光弹性主应力分离的主应力和的测量<sup>[1]</sup>。近十年来光测力学除了在光学方法上有许多新进展外,更重要地随着电子光学、计算机、图象技术的飞速发展,改变了传统的感光化学照相和人工条纹读数的方法。电子散斑、电子全息、电子错位散斑<sup>[2]</sup>,已在位移场测量方面得到了广泛应用;相位技术的应用为实现高精度的条纹测量提供了先进手段。可以说,一门新兴学科——计算机辅助光测力学已逐渐形成。在实现对全息、散斑、云纹等光学测量的计算机处理的同时,近年内一些学者已提出了应用计算机自动处理光弹性条纹图的方法<sup>[3]</sup>,但大部分仍集中于等差线、等倾线分离,在条纹处理上主要采用条纹跟踪、细化、拟合等方面,限制了处理精度和自动化程度。

1990年 G. M. Brown 和 J. L. Sullivan 提出了计算机辅助全息光弹性法(CAHPM),文献[4]将相位测量技术应用于光弹性条纹处理,解决了平面应力大小和方向的计算机自动测量,但它仍然需要用全息干版记录,带来工作不便且对复杂的光路难以普遍应用。本文的工作改进了光路结构,采用全电子记录,即用电子散斑干涉替代全息光弹以实现等和线的测量。几种光路可供选择。并做了对经受压圆盘的检验测试,进而与理论分析做了比较。证明方法的可行性。

## 二、方法原理

光弹性应力分析是通过一个用应力光学材料制成的模型根据应力光学定律求出平面应力分量 $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 和主方向来完成的。琼斯向量和传递矩阵是一种极简便的偏振光学表示方法,光波可以用光矢量表示,光波通过一个光学器件其光矢量要改变,前后光波相差一个传递矩阵(即该器件的传递矩阵)。例如一个检偏器的传递矩阵为[A]

$$[A] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta \sin\theta \\ \cos\theta \sin\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad (1)$$

\* 本文得到国家自然科学基金的资助

本文于 1991 年 12 月 13 日收到, 1992 年 5 月 20 日收到修改稿

其中  $\theta$  为检偏器的偏振轴与水平轴的夹角。光弹性模型的传递矩阵为  $[M]$ :

$$[M] = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha e^{i\pi\delta} + \sin^2 \alpha e^{-i\pi\delta} & 2i \cos \alpha \sin \alpha \sin \pi\delta \\ 2i \cos \alpha \sin \alpha \cdot \sin \pi\delta & \sin^{-2} \alpha e^{i\pi\delta} + \cos^2 \alpha e^{-i\pi\delta} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

其中  $\alpha$  为最大主应力  $\sigma$  同水平方向之间的夹角,  $\delta$  为光波通过光弹模型后产生的相对滞后。圆偏振场所用的波片的传递矩阵  $[W]$

$$[W] = \begin{bmatrix} \cos \pi\delta_a & i \sin \pi\delta_a \\ i \sin \pi\delta_a & \cos \pi\delta_a \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中  $\delta_a$  为光波通过波片后产生的相对滞后, 当波片为  $1/4$  波片时

$$[W_{1/4}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & i \frac{1}{\sqrt{2}} \\ i \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (4)$$

对于正交平面偏振光场(起偏镜与水平方向一致时), 光波的传递方程为

$$\{C\} = [A][M][E] \quad (5)$$

把(1)(2)式代入(5),  $\theta = \frac{\pi}{2}$  得到

$$\{C\} = E_0 \begin{Bmatrix} 0 \\ 2i \cos \alpha \sin \alpha \sin \pi\delta \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$I = C_y \cdot C_y^* = E_0^2 \sin^2 2\alpha \sin^2 \pi\delta = \frac{1}{2} I_0 \sin^2 \pi\delta [1 - \cos 4\alpha] \quad (7)$$

如果起偏镜与水平方向夹角为  $\eta$ , 正交偏振光场的光强为

$$I = \frac{1}{2} I_0 \sin^2 \pi\delta [1 - \cos 4(\alpha - \eta)] \quad (8)$$

如用摄像机记录这个光场时

$$I = \frac{1}{2} I_0 \sin^2 \pi\delta [1 - \cos 4(\alpha - \eta)] + I_N \quad (9)$$

其中  $I_N$  为摄像机的背景光强电子噪声。

同理, 对圆偏振光场, 光波的传递方程为

$$\{C\} = [A][W_{1/4}][M][W_{-1/4}]\{E\} \quad (10)$$

将(1)~(4)代入得到

$$\{C\} = E_0 \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \pi\delta \\ \sin \pi\delta [-\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 2i \cos \alpha \sin \alpha] \end{Bmatrix} \quad (11)$$

亮场时  $\theta = 0$

$$I = C_x \cdot C_x^* = E_0^2 \cos^2 \pi\delta = I_0 \cos^2 \pi\delta$$

用摄像机记录时

$$I = I_0 \cos^2 \pi\delta + I_N \quad (12)$$

暗场时  $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$I = C_y \cdot C_y^* = E_0^2 \sin^2 \pi \delta = I_0 \sin^2 \pi \delta$$

用摄像机记录时

$$I = I_0 \sin^2 \pi \delta + I_N \quad (13)$$

由(12)(13)可见圆偏振光场中只出现与  $\delta$  有关项,即只得到等差线。

### 三、等差线和等倾线的获得

1. 在文献[4]中 Brown 提出一个十分复杂的光路,经过七次记录求得等差线和等倾线。由圆偏振光场亮场、暗场以及暗场无模型时直接得到的  $I_N$  三次记录

$$\begin{aligned} I_1 &= I_N \\ I_2 &= I_0 \sin^2 \pi \delta + I_N \\ I_3 &= I_0 \cos^2 \pi \delta + I_N \end{aligned}$$

经下式处理可获得等差线

$$\delta = \frac{1}{2\pi} \cos^{-1} \frac{I_3 - I_2}{I_3 + I_2 - 2I_1} \quad (14)$$

由式(8)采用相移技术,依次使起偏镜与检偏镜同步旋转  $0^\circ, 22.5^\circ, 45^\circ, 67.5^\circ$  (即  $4\eta$  为  $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ ) 分别得到四个光强分布  $I_4 - I_7$ 。用下式解出  $\alpha$

$$\alpha = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^{-1} \frac{I_7 - I_5}{I_6 - I_4} \quad (15)$$

由于激光光源本身是一个偏振光,当转动起偏镜时  $I_0(x, y)$  会有变化。Brown 提出用  $I_{ni}/I_{ni}$  修正。

2. 我们建议采用更简单的只用四幅图即可获得等倾线和等差线的方法(见图1),四幅图的光强分布为

$$\begin{aligned} I_1 &= I_N, \quad I_2 = I_0 \sin^2 \pi \delta + I_N, \quad I_3 = I_0 \cos^2 \pi \delta + I_N, \\ I_4 &= \frac{1}{2} I_0 \sin^2 \pi \delta [1 - \cos 4\alpha] + I_N \end{aligned} \quad (16)$$

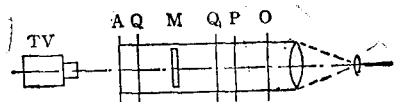


图1 一种简单的获取等差线、等倾线光路

Fig 1. A simple optical schematic for obtaining isochromat and isocline

P 起偏镜 polarizer A 检偏镜 analyzer Q 1/4 波片 quarter-wave plate D 毛玻璃 diffuser M 光弹模型 model

前三个光强是由圆偏振光场得到,  $I_4$  由正交平面偏振光场得到。等差线由式(14)解得, 而等倾线则不用旋转偏振片,可直接由  $I_1, I_2, I_4$  解得:

$$\alpha = \frac{1}{4} \cos^{-1} [(I_2 + I_1 - 2I_4)/(I_2 - I_1)] \quad (17)$$

需要提出由于  $I_2, I_4$  中  $I_0$  是不同的,圆偏振光路中多加了二个 1/4 波片,光有些损

失,可用适当提高照明光强进行补偿。图中毛玻璃漫射器  $D$  在记录时晃动以消除散斑。在解得  $\delta$  后根据应力光学定律求主应力差。

#### 四、等和线的获得

众所周知,全息照相是获得等和线的一种方法,但通常等和线和等差线一起存在,即再现光强为

$$I_i = A \cos \pi \delta \cos \pi(\delta_1 + \delta_2 + 2\nu_i) + I_N \quad (18)$$

其中  $\delta_1, \delta_2$  是由主应力产生的绝对滞后,  $\nu_i$  是在参考臂引入的滞后。Brown<sup>[4]</sup> 采用在参考相移的方法使  $\nu_i = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ 。从而消去等差线影响而得到

$$\delta_1 + \delta_2 = \frac{1}{\pi} \operatorname{tg}^{-1} [(I_4 - I_2)/(I_1 - I_3)] \quad (19)$$

$$(\sigma_1 + \sigma_2) = \lambda(\delta_1 + \delta_2)/c't \quad (20)$$

这种方法要求拍摄一张实时全息图,并在参考臂中引入相移,它要在暗室中操作,光路十分复杂。因此寻找一种无需照相操作的全电子计算机辅助光弹性分析将对进一步推广应用具有重要意义。

为此,我们研究并提出了几种新的无需照相而用摄象机记录的获取等和线的方法。电子散斑干涉(有些人称电视全息照相)是一种测量光程变化的计量技术。对透明的光弹模型在平面应力状态下加载前后的厚度变化存在如下关系。

$$\Delta h = h' - h = -\frac{\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2)h \quad (21)$$

$h, h'$  分别为加载前后模型厚度。由式(21)可见当模型受载产生厚度变化与主应力和有关。原理上采用常用的透射电子散斑干涉可以给出透明模型的厚度变化的条纹图,但实际上由于激光照射将使等和线难以单独引出。在光弹性中常采用对光学不灵敏材料(如有机玻璃)使其应力光性常数  $A, B$  近似相等。则有  $C = A' - B' = 0$ 。对双曝光全息再现时得到

$$I = I_0 \left[ 1 + \cos \frac{\pi d}{\lambda} (A' + B')(\sigma_1 + \sigma_2) \right] \quad (22)$$

此时等差线不再存在。但这种方法的缺点是在光弹应力分析需用二种模型。

采用在摄象机前放置毛玻璃可以实现用光弹模型得到等和线。其光路布置见图 2。

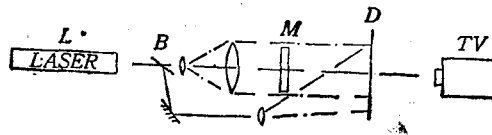


图 2 测量等和线的电子散斑干涉光路

Fig 2. Schematic of the absolute retardation using ESPI.

L 激光器 laser B 分光镜 beamsplitter M 光弹性模型 model

在图 2 的光路中物光  $u_0$ , 参考光  $u_r$  分别为

$$\begin{aligned}
 u_0 &= a_0 e^{i\phi_0} & u_r &= a_r e^{i\phi_r} \\
 \text{合成光波} & & u &= u_0 + u_r = a_0 e^{i\phi_0} + a_r e^{i\phi_r}, \\
 \text{其光强} & & I &= u \cdot u^* = a_0^2 + a_r^2 + 2a_0 a_r \cos(\phi_0 - \phi_r) \quad (23)
 \end{aligned}$$

当模型受载后,透射模型物光波将发生变化,使加载后的光强分布 ( $I'$ ):

$$I' = a_0^2 + a_r^2 + 2a_0 a_r \cos(\phi_0 - \phi_r + \Delta\phi) \quad (24)$$

计算机图象系统对加载前后二光强相减得到

$$I' - I = 4a_0 a_r \sin\left[\left(\phi_0 - \phi_r\right) + \frac{\Delta\phi}{2}\right] \sin \frac{\Delta\phi}{2}$$

上式取模平方后得到

$$I = \langle I \rangle \sin^2 \frac{\Delta\phi}{2} \quad \text{其中 } \langle I \rangle = 16a_0^2 a_r^2 \sin^2\left[\left(\phi_0 - \phi_r\right) + \frac{\Delta\phi}{2}\right] \quad (25)$$

其中  $\langle I \rangle$  是高频散斑图,当  $\Delta\phi = 2n\pi$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ , 即  $I = 0$ , 产生暗条纹. 对  $\Delta\phi$  有:

$$\begin{aligned}
 \Delta\phi &= \phi_1 - \phi_0 & \phi_0 &= \frac{2\pi}{\lambda} n_0 h \\
 \phi_1 &= \frac{2\pi}{\lambda} [n_0 h' + n(h - h')] \\
 \Delta\phi &= \frac{2\pi}{\lambda} [n_0(h' - h) - n(h' - h)] = \frac{2\pi}{\lambda} (h' - h)(n_0 - n) \\
 &= \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\mu h}{E} (n_0 - n)(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (26)
 \end{aligned}$$

其中  $n_0$  为模型材料折射率;  $n$  为空气折射率;  $\lambda$  为激光波长.

将 (26) 代入 (25) 得

$$I = \langle I \rangle \sin^2 \left[ -\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\mu h}{E} (n_0 - n)(\sigma_1 + \sigma_2) \right] \quad (27)$$

由式 (27) 可见,由电子散斑干涉可得到表示光弹模型主应力和  $(\sigma_1 + \sigma_2)$  的条纹等值线图. 此处  $(\sigma_1 + \sigma_2)$  可以有正负值,因而条纹级数也有正负之分.

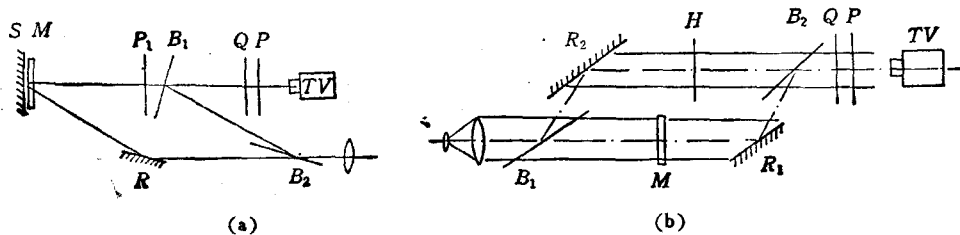


图 3 有机玻璃模型等和线光路

Fig 3. Schematic of the absolute retardation of polymethylmethacrylate

P 偏振片 polarizer Q 1/4 波片 quarter-wave plate H 半波片 half-wave plate M 光弹模型 model B 分光镜 beamsplitter R 反射镜 reflective mirror

对于使用有机玻璃模型获得等和线,我们设计了几种光路(见图 3)。这些光路有透射和反射二种类型,它与环氧或聚碳酸脂模型不同之处是不用毛玻璃.光的利用率较高,二束光夹角较小,近乎平行.

不难看出,采用电子散斑干涉得到的等和线条纹质量由于散斑项  $\langle I \rangle$  的存在而显得

较差。相位技术以及条纹光强的局部平均会得到改善，有关相位技术的综合叙述可参考文献 [5]。在本文的研究工作中主要采用易于实现的偏振相移技术，即用半波片使参考光与物光形成  $90^\circ$  偏振方向，然后经  $45^\circ$  放置的  $1/4$  波片和可调检偏器进入摄像机，通过旋转检偏器每次  $45^\circ$  改变干涉光场的相位。采用公式 (28) 得到相位

$$\Delta\phi = \text{tg}^{-1} \frac{I_4 - I_2}{I_3 - I_1} \quad (28)$$

其中  $I_1 - I_4$  分别为旋转检偏器后的光强。

### 五、实验验证

用于实验的图象系统是配有 P1P 1024 × 1024 图象卡的 286 微机 和 CCD 摄像

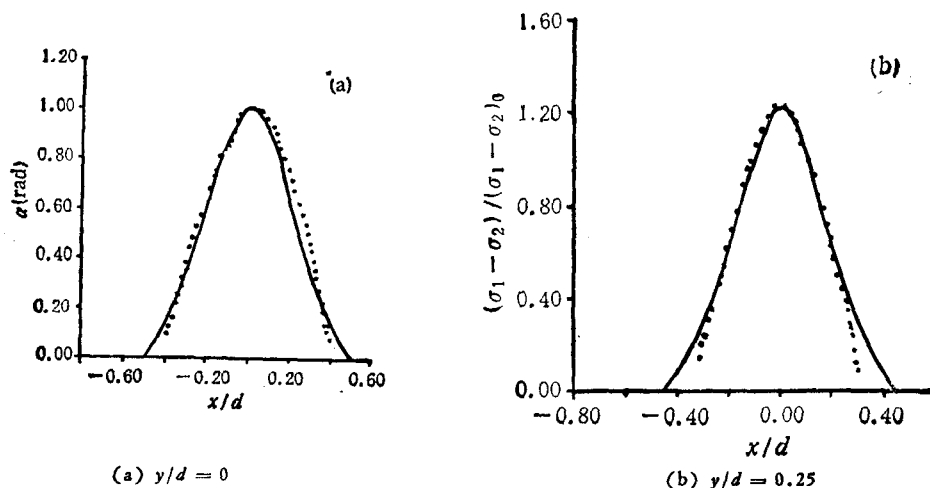


图 4 主应力差理论与实验结果比较(水平方向)

Fig 4. A comparison of theoretical and experimental results of  $\sigma_1 - \sigma_2$  (horizontal direction)

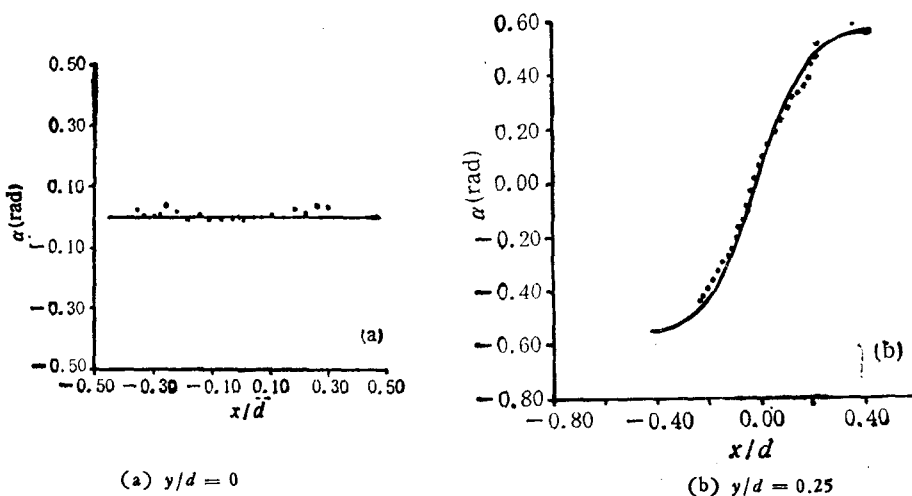


图 5 主应力方向理论与实验结果比较(水平方向)

Fig 5. A comparison of theoretical and experimental results of isoclinic angle (horizontal direction)

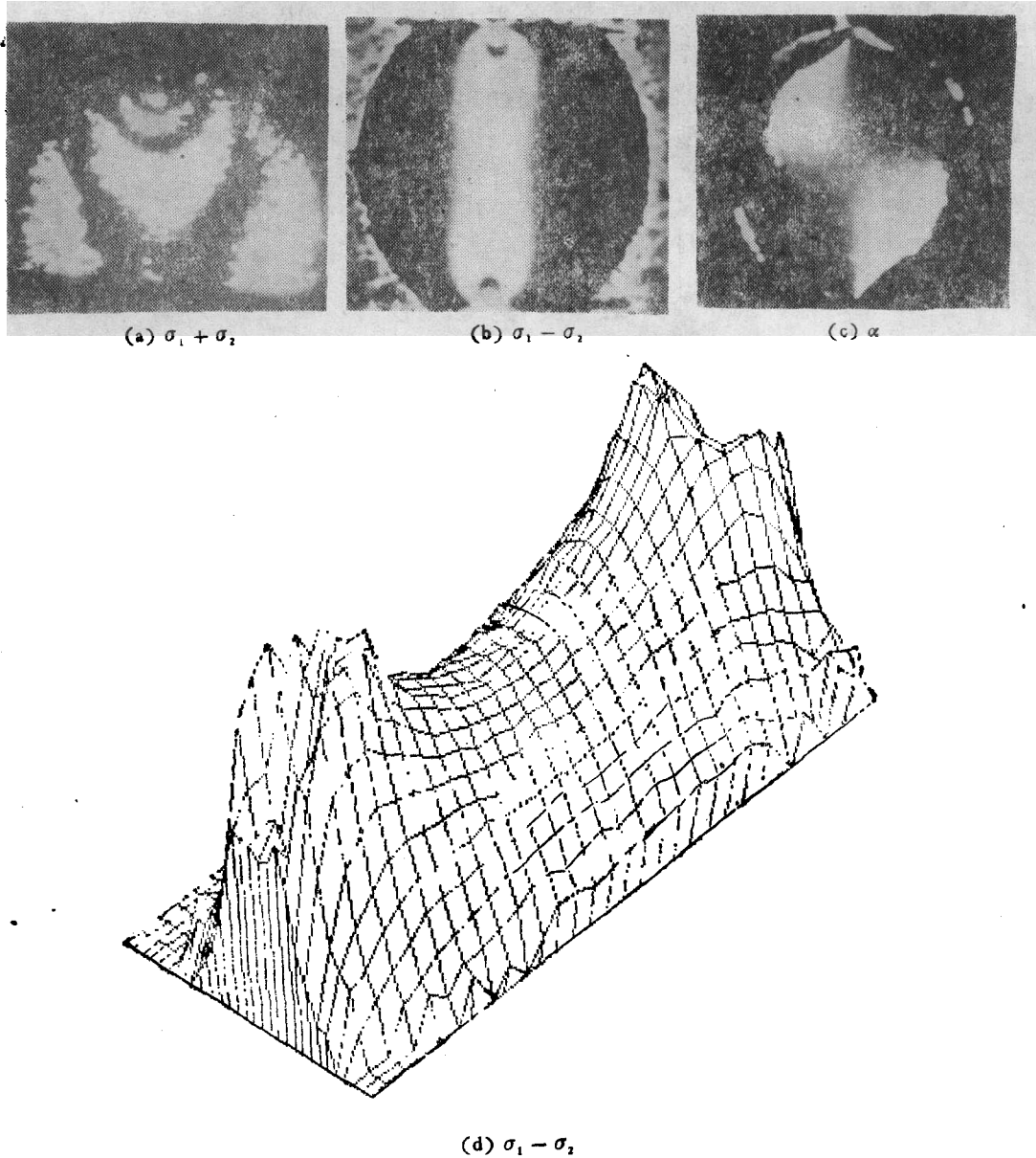


图 6 用灰度表示的主应力和、差、方向及其三维显示图

Fig 6. The grey level diagram of principal-stress and 3D plot

机、图象处理软件用 C 语言编写,以汇编语言进行优化处理。

实验验证是在直径 50mm、厚度 6mm 的对径受压圆盘进行的,其理论解可由弹性力学中半无限平面受集中力的应力分布公式用叠加法得到。在圆盘中心点有:( $d$ , 圆盘直径,  $h$  圆盘厚度)

$$\sigma_1 = \frac{2P}{\pi dh} \quad \sigma_2 = \frac{-6P}{\pi dh} \quad \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{8P}{\pi dh}$$

按照式(14)、(16)、(28)分别测量等差线,等倾线和等和线条纹。在实验中,为了提

高条纹质量采取了一些措施。

- (1) 在等差线, 等倾线测量中, 快速晃动毛玻璃以减少散斑效应;
- (2) 尽量加大光圈, 提高条纹信息;
- (3) 对散斑干涉图采用  $11 \times 11$  像素的平均滤波, 以减小散斑颗粒的影响。

测试所得到的数据等差线  $\sigma_1 - \sigma_2$ , 等倾线  $\alpha$  分别沿  $y = 0$  和  $y/d = 0.25$  二个截面与理论值进行比较, 结果见图 4 和图 5。所编的软件还具有三维显示和伪彩色功能, 等差线、等倾线和等和线以灰度表示分别示在图 6。

实验测试结果表明与理论分析符合较好。在远离边界地区, 误差的引入是多方面的, 文献 [4] 已作了较详细的分析。本文所作的圆盘等和线的测量与理论计算也相符合, 虽然由于散斑存在误差略大些。

本实验所得结果, 等差线在 7% 误差以内, 等倾线在 2% 以内, 这在工程上是可以接受的。

## 六、结 论

本文首次提出全自动计算机辅助光弹性应力分析方法。为快速、自动分析光弹性应力提出了一个新途径。采用了相位技术大大提高了条纹分析的精度, 电子散斑干涉替代全息干涉获得等和线大大方便了使用, 整个光路简单、易于操作。

## 参 考 文 献

- [1] Sciammarella C A and Quintanilla G. Techniques for the determination of absolute retardation in photoelasticity. *Exp Mech* 1972, 12
- [2] 金观昌, 唐寿鸿. 偏振相位偏移电子散斑干涉术及其应用于变形测量. *光学学报*. 1990, (10): 161—164.
- [3] Yao J Y. Digital image processing and isoclinics. *Exp Mech*, 1990, (30):264—269.
- [4] Brown G M and Sullivan J L. The computeraided holophotoelastic method. *Exp Mech* 1990, (30):135—144.
- [5] 金观昌, 唐寿鸿. 相位测量技术应用于光测力学. 第六届全国实验力学学术会议论文集, 北京大学出版社 1989.

## COMPUTER-AIDED PHOTOELASTIC STRESS ANALYSIS

Jin Guanchang and Zhao Wenzhong

(Dept of Eng Mech, Tsinghua University, Beijing 100089)

**Abstract** A new method of computer aided photoelastic stress analysis is presented. It has such advantages as full electronic recording, automatic stress analysis and simple optical setup. The precision is greatly enhanced by phase measuring technique. Several experimental scheme and the methods of improving the image quality are also provided. An example of diametrically loaded disk proves the validity of the method.

**Key words** photoelasticity, image processing, stress analysis.