第25卷 第2期
1993年3月

力 学 学 报
ACTA MECHANICA SINICA

Vol. 25, No. 2
Mar., 1993

关于 Boussinesq–Galerkin 解和胡海昌解的等价性

徐新生　　王敏中
(北京大学力学系，北京 100871)

提要　本文讨论了弹性力学中著名的 Boussinesq-Galerkin 势函数的限制问题．在 Z-向凸区域的条件下，Boussinesq-Galerkin 解和胡海昌解是等价的．

关键词　Boussinesq-Galerkin 解，胡海昌解，双调和函数，势函数，完备性

1. 引言

各向同性弹性力学中著名的 Boussinesq-Galerkin 通解是以双调和函数表示的完备解．其势函数具有不唯一性，作者在文[1]中已有讨论．胡海昌[2]曾导出一种弹性通解，其形式上简单且使用较为方便．我们在文[3]证明了在 Z-向凸的条件下胡海昌解的完备性．本文通过讨论调和函数和双调和函数的某些性质和 Boussinesq-Galerkin 势函数的限制问题，揭示了这两种解之间的关系．即，在 Z-向凸的条件下 Boussinesq-Galerkin 解和胡海昌解是等价的．

2. 调和函数和双调和函数

由文献[1,4]，我们有关于调和函数的引理：

引理 1:[1,4] 如果区域 D 是 Z-向凸的，且 $P(x,y,z)$ 是 D 上的调和函数，则问题

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2\phi(x,y,z)=0\\&\frac{\partial\phi}{\partial z}=P(x,y,z)\end{aligned}\quad(\text{在}\,D\,\text{内})\right\}\tag{1}$$

有解存在．

重复引理 1，可以证明下面引理：

引理 2: 若区域 D 是 Z-向凸的，且 $P(x,y,z)$ 是 D 内的调和函数，则问题

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2\phi(x,y,z)=0\\&\frac{\partial^3\phi}{\partial z^3}=P(x,y,z)\end{aligned}\quad(\text{在}\,D\,\text{内})\right\}\tag{2}$$

有解存在．

下面我们证明对于双调和函数类似的引理：

引理 3: 设 $P(x,y,z)$ 是 Z-向凸区域 D 上的双调和函数，则 i) 问题

本文于1992年4月6日收到．

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^4\phi(x,y,z)=0 \\ &\frac{\partial\phi}{\partial z}=P(x,y,z) \end{aligned}\right\}\text{(在}D\text{内)} \tag{3}$$

的解存在；ii）方程组

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^4\varphi(x,y,z)=0 \\ &\frac{\partial^3\varphi}{\partial z^3}=P(x,y,z) \end{aligned}\right\}\text{(在}D\text{内)} \tag{4}$$

的解存在。

证明： i）设 $q=\nabla^2P$，就有 $\nabla^2 q=0$。由引理 1 知存在函数 $\varphi_0(x,y,z)$ 满足：

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2\varphi_0=0 \\ &\frac{\partial\varphi_0}{\partial z}=q. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

取 $\varphi_1(x,y,z)=-\dfrac{1}{4\pi}\iiint_D\dfrac{\varphi_0}{\rho}\,d\xi d\eta d\zeta$，其中 $\rho=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$.

于是有 $\nabla^2\varphi_1=\varphi_0$。利用(5)可以得到 $\nabla^2\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z}=\nabla^2P$。或者 $\nabla^2\left(\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z}-P\right)=0$，于是

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}=P+\varphi_2 \tag{6}$$

其中 φ_2 是某个调和函数。根据引理 1 存在调和函数 φ_3 且 $\dfrac{\partial\varphi_3}{\partial z}=\varphi_2$。令

$$\phi(x,y,z)=\varphi_1(x,y,z)-\varphi_3(x,y,z) \tag{7}$$

即满足(3)式。第一部分证毕。ii）可以类似证明。

3. Boussinesq-Galerkin 势函数的限制问题 Boussinesq-Galerkin 解的形式为：

$$\boldsymbol{u}=\nabla^2\boldsymbol{B}-\frac{1}{2(1-\nu)}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) \tag{8}$$

其中 ν 为泊松比，$\boldsymbol{B}(x,y,z)=(B_1,B_2,B_3)^T$ 且

$$\nabla^4\boldsymbol{B}=0. \tag{9}$$

现在我们来证明下列定理：

定理： 设弹性区域 D 是 Z-向凸的，那么 Boussinesq-Galerkin 解中的势函数满足条件

$$\frac{\partial B_1}{\partial x}+\frac{\partial B_2}{\partial y}=0, \tag{10}$$

解(8)并不失一般性，即解(8)仍然是完备的。

证明： 设 $\boldsymbol{u}$ 已表为(8)的形式。由文[1]我们知道，解(8)中的势函数 $\boldsymbol{B}$ 是不唯一的。如果将 $\boldsymbol{B}$ 换为

$$\boldsymbol{B}^*=\boldsymbol{B}+\nabla^2\boldsymbol{A}+\frac{1}{1-2\nu}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) \tag{11}$$

（其中 $\boldsymbol{A}$ 为双调和向量函数），那么(8)式依然成立。

今取 $\boldsymbol{A}=(0,0,A_3)^T$，对于 $\boldsymbol{B}^*$ 的条件(10)为

$$\frac{\partial B_1^*}{\partial x}+\frac{\partial B_2^*}{\partial y}=\frac{\partial B_1}{\partial x}+\frac{\partial B_2}{\partial y}+\frac{1}{1-2\nu}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{\partial A_3}{\partial z}=0 \tag{12}$$

现在来证明，满足(12)式的双调和函数 A_3 是存在的。这时 B_1 和 B_2 假定是已知的。

由引理 3，下述问题有解：

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^4\phi_1=0\\&\frac{\partial\phi_1}{\partial z}=-(1-2\nu)\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}+\frac{\partial B_2}{\partial y}\right)\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

对于调和函数 $\nabla^2\phi_1$，从引理 2 得知，存在调和函数 $\nabla^2\phi_2$ 满足

$$\begin{aligned}&\nabla^2(\nabla^2\phi_2)=0\\&\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial}{\partial z}\nabla^2\phi_2\right)=-\frac{\partial}{\partial z}\nabla^2\phi_1\end{aligned} \tag{14}$$

由(14)的两式知

$$\nabla^2\left(\frac{\partial}{\partial z}\nabla^2\phi_2-\frac{\partial^3\phi_2}{\partial z^3}-\frac{\partial\phi_1}{\partial z}\right)=0 \tag{15}$$

于是

$$\frac{\partial}{\partial z}\nabla^2\phi_2=\frac{\partial^3\phi_2}{\partial z^3}+\frac{\partial\phi_1}{\partial z}+\phi_3 \tag{16}$$

其中 ϕ_3 为调和函数。由引理1，下述问题有解：

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2\phi_4=0\\&\frac{\partial\phi_4}{\partial z}=\phi_3\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

这样，我们令

$$A_3=\phi_2+\phi_4 \tag{18}$$

A_3 即合所求，事实上

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{\partial}{\partial z}A_3=\nabla^2\frac{\partial A_3}{\partial z}-\frac{\partial^3 A_3}{\partial z^3} \tag{19}$$

逐步将(18)、(17)、(16)和(13-2)代入(19)的右端可得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{\partial}{\partial z}A_3=-(1-2\nu)\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}+\frac{\partial B_2}{\partial y}\right). \tag{20}$$

于是(12)式成立，而且从(14)和(17)可知 A_3 为双调和函数。定理证毕。

4. Boussinesq-Galerkin 解和胡海昌解的等价性

从上节可知，当弹性区域D为 Z-向凸时，下述解是完备的：

$$\left.\begin{aligned}u&=\nabla^2B_1-\frac{1}{2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial B_3}{\partial z}\\v&=\nabla^2B_2-\frac{1}{2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial B_3}{\partial z}\\w&=\nabla^2B_3-\frac{1}{2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial B_3}{\partial z}\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

其中 $B_i(i=1,2,3)$ 是双调和函数,且 B_1 和 B_2 满足限制条件

$$\frac{\partial B_1}{\partial x}+\frac{\partial B_2}{\partial y}=0 \tag{22}$$

在各向同性情况下,胡海昌[2]所导出的弹性通解其形式为

$$\left.\begin{aligned} u&=-\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\\ v&=-\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\\ w&=-\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}+2(1-\nu)\nabla^2 F \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

其中

$$\nabla^4 F(x,y,z)=0,\quad \nabla^2\varphi(x,y,z)=0 \tag{24}$$

我们现在指出解(21)与解(23)是等价的. 先从解(21)导出解(23). 事实上,如果令

$$F(x,y,z)=2(1-\nu)B_3 \tag{25}$$

而 $\varphi(x,y,z)$ 由下述线积分给定

$$\varphi=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}\nabla^2 B_2\mathrm{d}x-\nabla^2 B_1\mathrm{d}y+g(x,y,z)\mathrm{d}z \tag{26}$$

其中 $g(x,y,z)$ 是由下面线积分所确定

$$\begin{aligned} g=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}&\frac{\partial}{\partial z}\nabla^2 B_2\mathrm{d}x-\frac{\partial}{\partial z}\nabla^2 B_1\mathrm{d}y\\ &+\left(-\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 B_2+\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 B_1\right)\mathrm{d}z \end{aligned} \tag{27}$$

在以上两个线积分中 (x_0,y_0,z_0) 是区域 D 中的一固定点. 从条件(22)以及 B_1 和 B_2 的双调和函数性质,不难验证(26)和(27)中的线积分均与路径无关,且 F 是双调和函数和 φ 是调和函数. 由(26)可以得到

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 B_1&=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\\ \nabla^2 B_2&=\frac{\partial\varphi}{\partial x} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

将(25)和(28)代入(21)式,我们就证明了从具有限制条件(22)的 Boussinesq-Galerkin 解得到了胡海昌解. 由于 Boussinesq-Galerkin 解的完备性,于是当弹性区域是 Z-向凸时,胡海昌解也是完备的.

当然,如果弹性区域是多连通区域,则 $\varphi(x,y,z)$ 可能为多值函数.

如果我们已经知道了解(23)是完备的,现在来证明解(21)也是完备的. 只须令

$$\left.\begin{aligned} B_3(x,y,z)&=\frac{1}{2(1-\nu)}F(x,y,z)\\ B_1(x,y,z)&=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\iiint_D\frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{\rho}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta\\ B_2(x,y,z)&=-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\iiint_D\frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{\rho}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

由牛顿位势并将(29)代入(23)，就可以得到解(21)和限制条件(22). 这样我们就由解(23)的完备性证明了解(21)的完备性.

从以上的证明可以得出结论，在弹性区域为 Z-向凸时，Boussinesq-Galerkin 解与胡海昌解是等价的.

参　考　文　献

[1] 王敏中，徐新生，关于弹性 Boussinesq-Galerkin 通解的不唯一性问题. 应用力学学报，1990,7(2): 97—100

[2] 胡海昌，横观各向同性体的弹性力学的空间问题. 物理学报，1953,9(3): 130—147

[3] 王敏中，关于胡海昌解的完备性. 应用数学与力学，1981,2: 243—250

[4] Eubanks R A and Sternberg, E. On the Completeness of the Boussinesq-Papkovich Stress Function, *J. Rat. Mech. Anal.* 1956, 5: 735—746

THE EQUIVALENCE BETWEEN BOUSSINESQ-GALERKIN SOLUTION AND HU HAICHANG SOLUTION IN ELASTICITY

Xu Xinsheng　and　Wang Minzhong

(Department of Mechanics, Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract　The purpose of this paper is to discuss the restriction of the potential functions of Boussinesq-Galerkin. We have proved that Boussinesq-Galerkin solution and Hu Haichang solution are equivalent if the elastic region is convex in the z-direction.

Key words　Boussinesq-Galerkin solution, Hu Haichang solution, biharmonic function, potential function, completeness