

# 纤维束增强复合材料细观统计破坏理论<sup>1)</sup>

邓梁波 范赋群

(华南理工大学工程力学系, 广州 510641)

**摘要** 本文分别用剪滞模型<sup>[1]</sup>和载荷几何局部分配法则<sup>[2]</sup>分析了纤维束和束中纤维的载荷集中. 在此基础上, 利用裂纹临界核模型的统计方法<sup>[1,3,4]</sup>, 建立了小纤维束(须考虑纤维束的边界影响)和大纤维束增强复合材料的细观统计破坏准则, 并用这两个准则研究了纤维束增强复合材料的断裂强度问题, 所算得的强度和裂纹临界长度的合理性表明了这两个准则的正确性.

**关键词** 纤维束增强, 破坏准则, 裂纹, 强度, 统计方法

## 一、引 言

由于纤维一般都非常细微, 以  $\mu\text{m}$  计, 在制作纤维复合材料时, 很难将一根根纤维分离开, 通常是把一束束纤维排列在基体中, 从而制成纤维束增强复合材料. 因此, 工程中实际应用的一般都是纤维束增强复合材料. 所以, 研究其断裂破坏问题具有理论和实际意义.

Pitt 和 Phoenix<sup>[2]</sup>, Smith<sup>[5]</sup> 等以及 Phoenix<sup>[6]</sup> 等都用了统计方法研究了单束纤维的破坏问题, 据笔者所知, 还没有文献研究过纤维束增强复合材料(多束纤维)的破坏问题. 鉴于上述情况, 本文用统计方法从细观的角度研究了纤维束增强复合材料的断裂破坏问题. 在研究中, 裂纹尖端纤维束的载荷集中因子在将其等效于单根纤维后用剪滞模型<sup>[3]</sup>计算, 而每一束中各纤维的载荷集中因子用载荷几何局部分配法则<sup>[2]</sup>计算. 其次, 采用裂纹临界核模型的方法(其先进性在于能够考虑裂纹扩展过程中纵向影响范围的随机扩大的变化, 克服了传统“链式”模型的一些缺点), 建立了小纤维束和大纤维束增强复合材料的细观统计破坏准则. 作为数值算例, 文中计算了 T300/5208 纤维束增强复合材料的强度和裂纹临界长度(即裂纹中所包含的断纤维束的数量), 并在纤维体积分数和复合材料尺寸相同的情况下, 与单根纤维均匀增强复合材料的计算结果以及现有的强度试验值进行了比较, 说明了准则的正确性.

1) 广东省科学基金资助项目.

本文于 1992 年 3 月 7 日收到第一稿, 1992 年 10 月 21 日收到修改稿.

## 二、纤维束的载荷集中分析

为求纤维束的载荷集中因子, 可先将其按面积等效于一单根纤维, 这根纤维被称为等效纤维. 设纤维的直径为  $d_f$ , 等效纤维的直径为  $d_e$ , 则有

$$d_e = \sqrt{m}d_f \quad (1)$$

式中  $m$  是一束纤维中所含纤维数量.

按文献 [1] 的方法, 纤维束的等效 (平均) 载荷集中因子  $\bar{K}_r$  可求得为

$$\bar{K}_r = \left[ \frac{1}{\xi_p} \int_0^{\xi_p} K_r^\beta(\xi) d\xi \right]^{1/\beta} \quad (2)$$

$$1 + aI_1D_2e^{-a\xi} + bJ_1D_4e^{-b\xi} + cL_1D_6e^{-c\xi} = K_p \quad (3)$$

式中  $\beta$  是 Weibull 概率函数的形状参数,  $r$  是裂纹长度,  $\xi_p$  是由 (3) 式决定的无量纲影响长度,  $K_p$  是反映在  $\xi = \xi_p$  处载荷集中程度的因子, 通常取  $K_p = 1.001$ .  $a, b, c, I_1, J_1, L_1, D_2, D_4, D_6$  只与断纤维束数  $r$  有关, 由于篇幅所限, 这里不写出其计算公式, 具体见文献 [1].

裂纹尖端纤维束的影响长度  $\delta_r$  按其定义算得为 [1]

$$\delta_r = 2\xi_p \sqrt{E_f d_e d_m / G_m} \quad (4)$$

式中  $E_f, G_m$  和  $d_m$  分别是纤维的拉伸模量, 基体的剪切模量和两纤维束之间的距离. 影响长度和拔出长度 [3,4] 分别反映了纤维 (或纤维束) 的载荷集中区域和它的断裂与裂纹的关系. 前者适用于纤维与基体粘合较好及纤维和基体是脆性的情况, 后者适用于纤维与基体粘合较差及纤维和基体韧性较好的情况.

## 三、小纤维束的破坏分析

单根纤维的强度服从 Weibull 概率分布函数, 即长为  $\delta$  的纤维在应力  $\sigma_f$  作用下的破坏概率为

$$f(\sigma_f) = \begin{cases} 1 - \exp[-(\sigma_f/\sigma_\delta)^\beta], & 0 \leq \sigma_f < \sigma_\delta \\ 1, & \sigma_f \geq \sigma_\delta \end{cases} \quad (5)$$

$$\sigma_\delta = \sigma_L (\delta/L)^{-1/\beta} \quad (6)$$

式中  $\beta$  和  $\sigma_\delta$  分别是形状参数和尺度参数,  $\sigma_L$  是长为  $L$  的纤维的平均强度. 在  $r-1$  束纤维断裂后, 裂纹尖端纤维束中每根纤维的载荷为

$$\sigma_f = \bar{K}_{r-1} \sigma \quad (7)$$

式中  $\sigma$  是纤维的公称载荷 (即复合材料中无任何纤维断裂时纤维所承受的均匀载荷).

对于小纤维束，由于边界上的纤维较多，必须考虑边界影响。随着  $m$  的不同，其破坏概率的计算公式也不一样。因此，分析其破坏没有统一的公式。不失一般性，假设每束纤维均由 7 根纤维按六角形排列组成（见图 1），其他情况可用同样方法进行研究。其次，认为纤维束中所有纤维都具有与其等效纤维相同的影响长度。

现在，我们考虑纤维束中断一根纤维的情况。按照载荷几何局部分配法则（其主要内容是一根纤维所承受的载荷在其断裂后将均匀地分配给离其最近一环中所有未断纤维，而此环中至少要有一根未断纤维，这些未断纤维的载荷集中因子等于其实际所承受的载荷与其公称载荷的比值），若中心纤维发生断裂，则其载荷均匀地分配给它临近环中的 6 根纤维，这 6 根纤维的载荷集中因子为  $7/6$ 。若周边的一根纤维发生断裂，则其载荷均匀地分配给它临近环中的 3 根纤维，这 3 根纤维的载荷集中因子为  $4/3$ （见图 1a）。当  $6\sigma_{\delta_{r-1}}/7 < \sigma_f < \sigma_{\delta_{r-1}}$  时，一根纤维断裂将导致整束纤维的断裂，因为其它 6 根纤维所承受的载荷超过了  $\sigma_{\delta_{r-1}}$ 。当  $3\sigma_{\delta_{r-1}}/4 < \sigma < 6\sigma_{\delta_{r-1}}/7$  时，若周边的纤维发生断裂，将导致整束纤维的破坏。若中心纤维发生断裂，也可能不会导致整束纤维的破坏。但是，周边纤维发生断裂的概率是中心纤维的 6 倍，因此，这种影响可以忽略。周边纤维发生断裂有 6 种可能性，中心纤维发生断裂有一种可能性，因此，纤维束的破坏概率为

$$G_r^{(1)}(\bar{K}_{r-1}\sigma, \delta_{r-1}) = 6F(\sigma_f) + F(\sigma_f) = 7F(\sigma_f), 3\sigma_{\delta_{r-1}}/4 \leq \sigma_f < \sigma_{\delta_{r-1}} \quad (8)$$

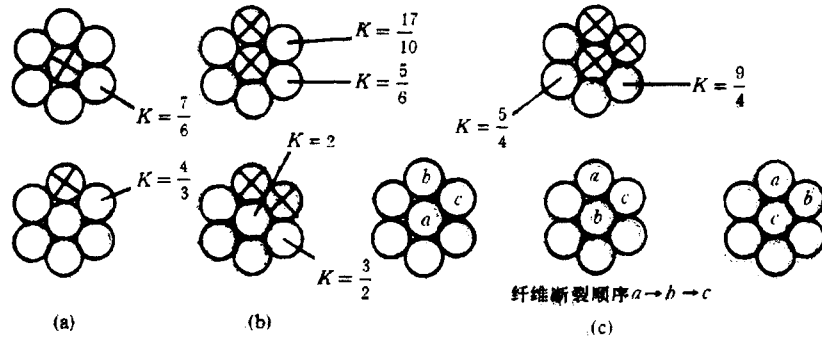


图 1 纤维束失效构形

Fig. 1 Failure modes for fibre bundles  
The order of fibre fracture:  $a \rightarrow b \rightarrow c$

对于断 2 根纤维的情况，未断纤维的载荷集中因子可类似地求得（如图 1(b) 所示）。如果中心纤维先断裂，则发生第 2 根纤维断裂有 6 种可能性。如果周边一纤维先断裂（有 6 种可能性），则发生第 2 根纤维断裂有三种可能性。因此，这种情况下纤维束的破坏概率为

$$G_r^{(2)}(\bar{K}_{r-1}\sigma, \delta_{r-1}) = 6F(\sigma_f)F(7\sigma_f/6) + 18F(\sigma_f)F(4\sigma_f/3), \sigma_{\delta_{r-1}}/2 \leq \sigma_f < 3\sigma_{\delta_{r-1}}/4 \quad (9)$$

对于断 3 根纤维情况，未断纤维的载荷集中因子列在图 1(c) 上。按照主失效构形的概念<sup>[5]</sup>，只需考虑载荷集中因子为  $S = 2$  和  $S = 17/10$  的纤维的断裂。由此得出纤维束的破坏概率为

$$G_r^{(3)}(\bar{K}_{r-1}\sigma, \delta_{r-1}) = 6F(\sigma_f)[2F(17\sigma_f/10) + 3F(6\sigma_f/5)][F(4\sigma_f/3)]$$

$$+F(7\sigma_f/6)] + 12F(\sigma_f)F(4\sigma_f/3)[F(2\sigma_f) + 2F(3\sigma_f/2)], 4\sigma_{\delta_{r-1}}/9 \leq \sigma_f < \sigma_{\delta_{r-1}}/2 \quad (10)$$

类似地, 可列出 4 根、5 根、6 根、7 根纤维断裂时, 纤维束破坏概率的计算公式. 为节省篇幅, 这里不列出.

#### 四、大纤维束失效分析

对于大纤维束, 由于边界纤维的数量  $m_b$  与总纤维数量  $m$  的比值  $R = m_b/m$  较小 (一般应  $R < 0.3$ , 视精度要求而定), 因此, 边界影响可以忽略. 按载荷几何局部分配法则, 所算得的大纤维束中断 1 根到 8 根纤维的最大载荷集中因子  $S_i$  及承受此因子的未断纤维数  $q_i$  分别标注在图 2 上; 断 9 根到 13 根纤维的最大载荷集中因子  $S_i$  及承受此因子的未断纤维数  $q_i$  分别如下:

$$\begin{aligned} s_9 &= 2.600, & q_9 &= 1; & s_{10} &= 2.056, & q_{10} &= 4 \\ s_{11} &= 2.833, & q_{11} &= 1; & s_{12} &= 2.119, & q_{12} &= 6 \\ s_{13} &= 2.917, & q_{13} &= 1 \end{aligned}$$

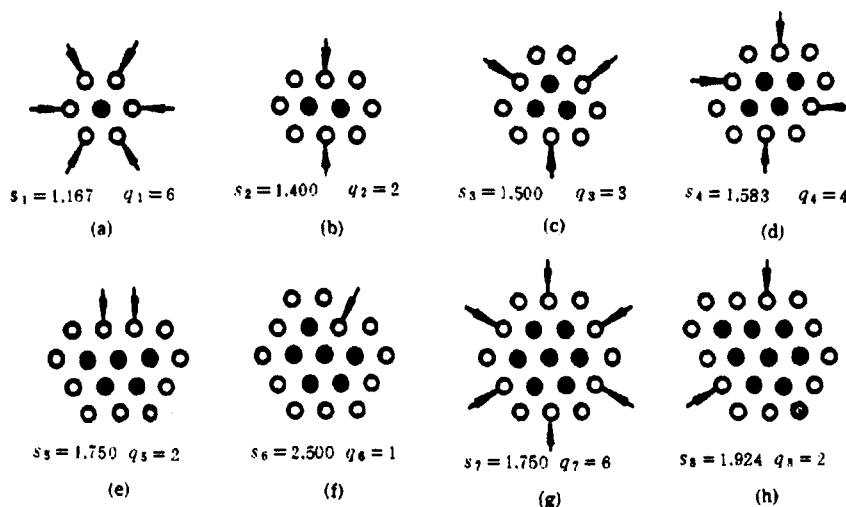


图 2 主失效构形及载荷集中因子

Fig. 2 Principal failure modes and load concentration factors

在  $r-1$  束纤维断裂后, 裂纹尖端纤维束的破坏概率可近似由下式计算<sup>[6]</sup>

$$G_r^{(k)}(\bar{K}_{r-1}\sigma, \delta_{r-1}) = 1 - \exp[-(\sigma_f/\sigma_r^{(k)})^{k\beta}], \quad \sigma_f \geq 0 \quad (11)$$

式中  $\delta_{r-1}$  是该束纤维的影响长度,  $k\beta$  是形状参数, 尺度参数  $\sigma_r^{(k)}$  为

$$\sigma_r^{(k)} = m^{-1/k\beta} \sigma_{\delta_{r-1}} d_k^{-1/k\beta} \quad (12)$$

式中  $K$  表示该纤维束中已断纤维数,  $d_k$  是一个常数, 只取决于  $\beta$  和断裂模式, 与  $m$  无关.

由 (11) 和 (12) 两式可见,  $G_r^{(k)}(\bar{K}_{r-1}\sigma, \delta_{r-1})$  的计算需已知  $d_k$  的值. 计算  $d_k$  需计及  $k$  根纤维断裂的所有模式, 而模式的数量随着  $k$  的增加而迅速增加, 精确计算  $d_k$  的值是相当困难的. 但是, 当  $\beta$  比较大时, 可以只考虑到达  $k$  根纤维断裂的主失效路径, 其近似值记为  $\tilde{d}_k$ . 对于每一个  $k$ , 在已知  $S_k$  和  $q_k$  后, 则有

$$\tilde{d}_k = \prod_{j=0}^{\rho-1} (q_j S_j^\beta), \quad \rho = 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

其中  $\tilde{d}_0=1, q_0 = S_0=1$ ,  $\delta$  是相应于  $k$  的主临界失效构形 [5] 的序号.

从图 2 上可以看到,  $S_7 < S_6$ , 因此, 图 2(f) 的主失效构形不是主临界失效构形. 对于图 2(h) 的主临界失效构形, 有  $k=8, \rho=7$ . 在三维情况下,  $\rho$  一般不等于断纤维数  $k$ , 而是  $\rho < k$ . 在二维情况下, 总有  $\rho=k$ . 在表 1 中, 列出了不同纤维应力  $\sigma_f$  下相应的  $\tilde{d}_k$  和  $u(\sigma_f)$  的值, 这里的  $u(\sigma_f) = \prod_{j=0}^{\rho-1} (S_j \sigma_f)$ .

表 1 用载荷几何局部分配法则计算的  $\tilde{d}_k$  和  $u(\sigma_f)$  值  
Table 1  $\tilde{d}_k$  and  $u(\sigma_f)$  values calculated according to load geometry local distribution rule

$\sigma_f/\sigma_{\delta_{r-1}}$	构形	$k$	$\rho$	$u(\sigma_f)$	$\tilde{d}_k$
0.8571-1.0000	2(a)	1	1	$1.000\sigma_f$	1.000
0.7143-0.8571	2(b)	2	2	$1.167\sigma_f^2$	$6(1.167)^\beta$
0.6667-0.7143	2(c)	3	3	$1.634\sigma_f^3$	$12(1.634)^\beta$
0.6315-0.6667	2(d)	4	4	$2.451\sigma_f^4$	$36(2.451)^\beta$
0.5714-0.6315	2(e)	5	5	$3.879\sigma_f^5$	$144(3.879)^\beta$
0.5714-0.6315	2(g)	7	6	$6.789\sigma_f^6$	$288(6.789)^\beta$
0.5197-0.5714	2(h)	8	7	$11.880\sigma_f^7$	$1728(11.880)^\beta$
0.4865-0.5197	-	10	8	$22.859\sigma_f^8$	$3456(22.859)^\beta$
0.4719-0.4865	-	12	9	$46.998\sigma_f^9$	$13824(46.998)^\beta$

### 五、纤维束增强复合材料破坏准则

由于影响长度 (或无效长度 [7]) 是随着已断纤维 (束) 的数量增加 (裂纹扩展) 而随机迅速地增大着, 分析时应计及这种变化, 为此, 使用裂纹临界核模型的方法. 当裂纹扩展到临界长度  $r$  时, 即形成了一个裂纹临界核, 其面积为

$$A_{core} = r d_e \delta_{r-1} / V_f \quad (14)$$

式中  $V_f$  是纤维体积分数,  $\delta_{r-1}$  是尺寸为  $r-1$  的裂纹的影响长度. 在至少形成一个裂纹临界核以后, 裂纹便开始不稳定扩展, 直至整个复合材料破坏. 在整个复合材料中, 至多能够形成临界核的数量为

$$n = \text{int}\left(\frac{A_{comp}}{A_{core}}\right) = \text{int}\left(\frac{N d_e}{V_f} L_c / \frac{r d_e}{V_f} \delta_{r-1}\right) = \text{int}\left(\frac{L_c N}{r \delta_{r-1}}\right) \quad (15)$$

式中 int 表示取整数,  $L_c$  和  $N$  分别是复合材料的长度和总纤维束数.

形成一个长度为  $r$  的裂纹临界核的破坏概率为<sup>[1]</sup>

$$P_r = \prod_{i=0}^{r-1} 2^i G_i(\bar{K}_i \sigma, \delta_i) \quad (16)$$

式中  $\bar{K}_0 = 1, \delta_0 = \delta_1$ . 对于前者 (小纤维束),  $G_i(\bar{K}_i \sigma, \delta_i)$  是根据纤维束中每根纤维所承受的载荷  $\sigma_f$  的大小由第三节诸式中的一式确定. 对于后者 (大纤维束),  $G_i(\bar{K}_i \sigma, \delta_i)$  由 (11) 式确定.

复合材料的破坏概率为

$$P_c = 1 - (1 - P_r)^n \quad (17)$$

式中  $n$  由 (15) 式确定.

下面, 我们来确定裂纹临界长度  $r$ . 假定在  $r-1$  束纤维断裂之后, 对于前者, 若裂纹尖端纤维束中每一根纤维所承受的载荷  $\sigma_f$  是

$$\frac{3}{4} \sigma_{\delta_{r-1}} \leq \sigma_f = \bar{K}_{r-1} \sigma < \sigma_{\delta_{r-1}} \quad \text{或} \quad \frac{3}{4} \frac{\sigma_{\delta_{r-1}}}{\bar{K}_{r-1}} \leq \sigma < \frac{\sigma_{\delta_{r-1}}}{\bar{K}_{r-1}} \quad (18)$$

对于后者, 若

$$\frac{6}{7} \sigma_{\delta_{r-1}} \leq \sigma_f = \bar{K}_{r-1} \sigma < \sigma_{\delta_{r-1}} \quad \text{或} \quad \frac{6}{7} \frac{\sigma_{\delta_{r-1}}}{\bar{K}_{r-1}} \leq \sigma < \frac{\sigma_{\delta_{r-1}}}{\bar{K}_{r-1}} \quad (19)$$

则该纤维束中只要有一根纤维断裂, 整个纤维束就会破坏. 这束, 即第  $r$  束纤维断裂后, 对于两种情况, 若裂纹尖端纤维束中每一根纤维所承受的载荷

$$\sigma_f = \bar{K}_r \sigma \geq \sigma_{\delta_r} \quad \text{或} \quad \sigma \geq \sigma_{\delta_r} / \bar{K}_r \quad (20)$$

根据 (5) 式, 则该束纤维就会立即破坏, 裂纹将迅速扩展, 直至整个复合材料破坏. 因此, 由 (18) 和 (20) 两式以及 (19) 和 (20) 两式所确定的  $r$  就是裂纹临界长度, 也即裂纹临界核的长度.

纤维在应力  $\sigma$  下的复合材料破坏准则, 对于前者, 可表为

$$1 - [1 - \prod_{i=0}^{r-1} 2^i G_i(\bar{K}_i \sigma, \delta_i)]^n = P_0 \quad (21)$$

$$\frac{3}{4} \frac{\sigma_{\delta_{r-1}}}{\bar{K}_{r-1}} \leq \sigma < \frac{\sigma_{\delta_{r-1}}}{\bar{K}_{r-1}}, \quad \sigma \geq \frac{\sigma_{\delta_r}}{\bar{K}_r} \quad (22)$$

对于后者, 可表为

$$1 - [1 - \prod_{i=0}^{r-1} 2^i G_i(\bar{K}_i \sigma, \delta_i)]^n = P_0 \quad (23)$$

$$\frac{6}{7} \frac{\sigma_{\delta_{r-1}}}{\bar{K}_{r-1}} \leq \sigma < \frac{\sigma_{\delta_{r-1}}}{\bar{K}_{r-1}}, \quad \sigma \geq \frac{\sigma_{\delta_r}}{\bar{K}_r} \quad (24)$$

其中  $P_0 \in (0,1)$  是复合材料的破坏概率, 根据试验或需要选定. (21) 式中的  $G_i(\bar{K}_i \sigma, \delta_i)$  根据纤维应力大小由第三节诸式中的一式确定, (23) 式中的  $G_i$  由 (11) 式确定. 已知复合材料中纤维应力  $\sigma$ , 可由破坏准则计算其破坏概率和裂纹临界长度  $r$ . 反之, 给定破坏概率  $P_0$ , 可求其强度  $\sigma_c$  和裂纹临界长度  $r$ .

## 六、数值结果

T300/5208 复合材料的性能和尺寸数据为<sup>[8]</sup>: 纤维直径  $d_f = 7 \times 10^{-6}(\text{m})$ , 体积分数  $V_f=0.5$ , 拉伸模量  $E_f=230\text{Gpa}$ , 基体拉伸模量  $E_m=3.45\text{Gpa}$ , 剪切模量  $G_m=1.28\text{Gpa}$ , 纤维之间基体的距离为  $d_m = d_e/V_f - d_e$ . Weibull 形状参数  $\beta = 7.68$ , 长  $L=25\text{mm}$  的纤维的平均强度  $\sigma_L = 2.80\text{Gpa}$ , 纤维均匀增强复合材料的试验强度  $\sigma_b \leq 1.5\text{Gpa}$ . 用于计算的试样的尺寸从  $A_{\text{comp}}=3.5\text{cm}^2$  到  $3.5 \times 10^7\text{cm}^2$  变化, 破坏概率分别取为  $P_0 = 0.1, 0.5, 0.9$ . 复合材料的强度值由混合律  $\sigma_c = \sigma(V_f + \frac{E_m}{E_f}V_m)$  算得, 其中  $V_m = 1 - V_f$  是基体体积分数.

表 2 不同情况的  $r, \sigma, \sigma_c$  值 (应力单位: GPa)Table 2  $r, \sigma$  and  $\sigma_c$  values under various cases

$A_{\text{comp}}$ $\text{cm}^2$	$m$	$P_0=0.1$			$P_0=0.5$			$P_0=0.9$		
		$r$	$\sigma$	$\sigma_c$	$r$	$\sigma$	$\sigma_c$	$r$	$\sigma$	$\sigma_c$
3.5	1	5	2.795	1.418	4	2.941	1.493	4	3.070	1.558
	7	5	2.209	1.121	5	2.266	1.150	4	2.370	1.203
	150	5	1.665	0.845	4	1.754	0.890	4	1.787	0.907
	300	5	1.580	0.802	4	1.668	0.847	4	1.696	0.861
35	1	6	2.627	1.333	5	2.761	1.401	5	2.860	1.451
	7	6	2.077	1.054	5	2.194	1.114	5	2.236	1.135
	150	5	1.638	0.831	5	1.660	0.842	4	1.700	0.863
	300	5	1.548	0.786	5	1.571	0.797	5	1.604	0.814
350	1	6	2.483	1.260	6	2.600	1.319	5	2.675	1.358
	7	6	2.016	1.023	6	2.065	1.048	5	2.137	1.085
	150	5	1.594	0.809	5	1.631	0.828	5	1.646	0.835
	300	5	1.510	0.766	5	1.542	0.783	5	1.556	0.790
3500	1	7	2.370	1.203	6	2.461	1.249	6	2.530	1.284
	7	6	1.966	0.998	6	2.005	1.018	6	2.036	1.033
	150	5	1.573	0.798	5	1.590	0.807	5	1.595	0.809
	300	5	1.486	0.754	5	1.507	0.765	5	1.510	0.766
$35 \times 10^3$	1	7	2.370	1.203	7	2.370	1.203	7	2.398	1.217
	7	7	1.866	0.957	7	1.916	0.972	6	1.980	1.005
	150	5	1.549	0.786	5	1.566	0.795	5	1.581	0.802
	300	5	1.465	0.743	5	1.482	0.752	5	1.493	0.758
$35 \times 10^4$	1	7	2.370	1.203	7	2.370	1.203	7	2.370	1.203
	7	7	1.866	0.947	7	1.866	0.947	7	1.895	0.962
	150	6	1.516	0.769	5	1.548	0.786	5	1.557	0.790
	300	6	1.437	0.729	6	1.452	0.737	5	1.473	0.748
$35 \times 10^5$	7	7	1.866	0.947	7	1.866	0.947	7	1.866	0.947
	150	6	1.493	0.758	6	1.516	0.769	6	1.528	0.775
	300	6	1.409	0.715	6	1.420	0.721	6	1.444	0.733
$35 \times 10^6$	150	6	1.493	0.758	6	1.493	0.758	6	1.493	0.758
	300	6	1.409	0.715	6	1.409	0.715	6	1.409	0.715

在表 2 中分别列出了不同情况下的复合材料强度, 纤维强度和裂纹临界长度.  $m = 1$  的结果取自文 [1]. 表中结果表明, 当复合材料尺寸较小时,  $P_0$  的影响较大, 裂纹临界长度较小, 强度较高. 随着尺寸的增大,  $P_0$  影响减小, 裂纹临界长度增大, 强度降低. 当尺寸增大到某一值 (被称为临界面积  $A_{cr}$ ) 时,  $P_0$  对强度、裂纹临界长度几乎没有影响, 而强度和裂纹临界长度保持其固定值, 与复合材料尺寸无关. 其次, 在纤维体积分数和复合材料尺寸都相同的情况下, 随着纤维束的增大, 即  $m$  的增大, 复合材料的强度降低, 这是合

理的, 这也可以从与纤维均匀增强复合材料的试验强度值  $\sigma_c^b \leq 1.5\text{Gpa}$  的比较中看到这一点, 其原因是随着  $m$  的增大, 裂纹的影响范围变大, 即影响长度  $\sigma_r$  变大. 另一个原因是  $m$  大的纤维束中纤维的载荷集中较大, 承受的载荷较大. 另外, 随着  $m$  的增大, 裂纹临界长度  $r$  变小, 复合材料的临界面积变大. 从表中还可看到, 尺寸和  $P_0$  的变化对  $m$  较大的复合材料的强度影响较小, 对  $m$  较小的复合材料的强度影响较大.

从以上的讨论分析中以及计算结果的比较中, 可以看到本文给出的两个破坏准则的合理性和正确性.

## 七、结 论

随着复合材料尺寸的增大, 强度降低, 裂纹临界长度增大,  $P_0$  的影响减小. 当尺寸增大到临界面积后,  $P_0$  和尺寸对强度和裂纹临界长度几乎没有影响. 在纤维体积分数和尺寸都相同的情况下, 随着  $m$  的增大, 裂纹的影响范围增大, 复合材料的强度降低, 裂纹临界长度  $r$  变小, 复合材料的临界面积增大.

## 参 考 文 献

- [1] 邓梁波, 范赋群, 周红玲. 复合材料学报, 1992, 9(3):93-103
- [2] Pitt R E and Phoenix S L. *Int. J. Fract.*, 1982, 20:291-311
- [3] 范赋群. 固体力学学报, 1981, 3:287-294
- [4] Fan F Q(范赋群) and Zeng Q D(曾庆敦). *Proc. of Int. Symp. on Comp. Mater. Struc.*, 1986, 465-470
- [5] Smith R L et al. *Proc. Royal Soc. London*: 1983, A388: 353-391
- [6] Phoenix S L et al. *Comp. Sci. Tech.*, 1988, 32:81-120
- [7] Garg S K et al. *Analysis of Structural Composite Materials*. Marcel Dekker, Inc. New York: 1973
- [8] Tsai S W and Hahn H T. *Introduction to Composite Materials*. TECHNOMIC Publishing Co., Inc. 1980

# STATISTICAL FAILURE THEORY OF BUNDLE-REINFORCED COMPOSITES

Deng Liangbo and Fan Fuqun

(Dept. of Engineering Mechanics, South China University of Technology,  
Guangzhou 510641, China)

**Abstract** The shear-lag model<sup>[1]</sup> and the geometrical local load-sharing rule<sup>[2]</sup> are applied for analysis of load concentrations of bundles and fibers in the paper. Based on these studies, the statistical microscopic criteria of failure of small-bundle-(the boundary effects of bundles must be taken into account in this case) and large-bundle-reinforced composites are established by using the method of the critical crack core model<sup>[1,3,4]</sup>, and used for investigation of failure and fracture of bundle-reinforced composites. The results of strengths and critical crack lengths are reasonable and correct, which shows correctness of the criteria.

**Key words** bundle-reinforced, failure criterion, crack, strength, statistical method