

# 求解脉动速度关联函数的新方法 及其在平面湍尾流中的应用<sup>1)</sup>

林建忠

黄永念 周培源

(浙江大学力学系, 杭州 310072) (北京大学力学系, 湍流国家重点实验室, 北京 100871)

**提要** 将周培源给出的平面湍尾流的一级近似解<sup>[1]</sup>作为已知量, 代入湍流脉动速度方程中, 在微尺度范围内, 采用谱方法对方程进行数值求解, 得到了和实验结果符合的二阶、三阶、四阶脉动速度关联函数的计算结果.

**关键词** 高阶关联, 自模拟, 逐级迭代, 平面尾流, 数值计算

## 一、引 言

早在 30 年代末, 周培源就提出严格求解湍流问题应当以 Reynolds 平均运动方程和湍流脉动速度方程为出发点, 并且导出了二阶和三阶脉动速度关联方程<sup>[2]</sup>. 由于 N-S 方程的非线性, 所导出的给定阶数的脉动速度方程中包含压力梯度与脉动速度关联项、粘性耗散项和高一阶的脉动速度关联项等三项未知项, 它们使方程组不封闭. 对于前两项, 周培源<sup>[3]</sup>给了处理方法, 对于第三项, 他曾首先提出了截断方法<sup>[3]</sup>, 即在关联方程中将该项略去, 后来接着提出了奇阶截断和逐级逼近迭代方法<sup>[4]</sup>, 即逐级在偶数阶关联方程中略去奇数高阶关联项, 得到封闭方程组后, 再进行级与级之间迭代, 提高计算的精度. 用该方法, 曾经计算了平面湍尾流的三阶脉动速度关联函数<sup>[4]</sup>.

以上逐级逼近法虽能有效地求解脉动速度关联函数, 但计算比较繁琐, 尤其是脉动关联阶数比较高时更是如此. 因此, 周培源在该方法的基础上提出了一种新的方法, 即逐级迭代法. 该方法的思路是, 由准相似性条件出发, 对 Reynolds 平均运动方程和忽略三阶脉动速度关联项的二阶脉动速度关联方程联立求解, 得到湍流平均量和二阶脉动速度关联量, 再将这些量代入湍流脉动速度方程中求解脉动速度, 对该速度取平均得到新的二阶脉动速度关联量, 然后再代入 Reynolds 平均运动方程中去解平均量. 用该方法不仅可以求出满意的湍流平均量和二阶关联函数, 而且可以简捷地计算得到高阶的脉动速度关联函数.

本文用周培源<sup>[1]</sup>联立 Reynolds 平均运动方程和忽略三阶关联的二阶脉动速度关联方程求解得到的平均量和二阶关联量作为一级近似解, 代入湍流脉动速度方程

<sup>1)</sup> 浙江省自然科学基金资助项目.

本文于 1992 年 6 月 29 日收到第一稿, 1992 年 12 月 20 日收到修改稿.

《力学学报》英文版 1993 年 Vol.9, No.2 已刊登此文.

中, 采用谱方法求数值解, 得到了平面尾流的二阶、三阶和四阶脉动速度关联函数, 并和实验结果<sup>[5]</sup>进行了比较.

## 二、湍流脉动速度方程

流体运动所满足的 N-S 方程和连续性方程为

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} = -\frac{1}{\rho} P_{,i} + \nu \nabla^2 u_i, \quad u_{j,j} = 0 \quad (2.1)$$

Reynolds 将湍流运动分成平均流动和脉动两部分

$$u_i = U_i + w_i, \quad P = \bar{P} + \tilde{\omega} \quad (2.2)$$

将式 (2.2) 代入 (2.1) 取平均后得到

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j U_{i,j} = -\frac{1}{\rho} \bar{P}_{,i} + \frac{1}{\rho} \tau_{ij,j} + \nu \nabla^2 U_i, \quad U_{j,j} = 0 \quad (2.3)$$

周培源将式 (2.1) 减去 (2.3) 得到脉动速度方程<sup>[2]</sup>

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w_i}{\partial t} + U_j w_{i,j} + w_j w_{i,j} + w_j U_{i,j} &= -\frac{1}{\rho} \tilde{\omega}_{,i} - \frac{1}{\rho} \tau_{ij,j} + \nu \nabla^2 w_i \\ w_{j,j} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

根据周培源的观点<sup>[6]</sup>, 在充分发展的湍流场中, 有两类物理量, 一类是平均量及其微商, 它们是坐标的慢变函数; 另一类是脉动量, 它们是坐标的快变函数, 两种量在方程同时出现, 需要很大的计算量, 如果将原有固定坐标变换成随平均流动速度  $U_{0i}$  一起运动的坐标系, 取动点  $P_0$  为新的运动坐标原点, 并考虑  $P_0$  附近的脉动速度场, 就可以将两类物理量分开求解. 令

$$X'_i = X_i - X_{0i}, \quad X_{0i} = \int_{t_0}^t U_{0i} dt = \int_{t_0}^t U_i(X_0, t) dt \quad (2.5)$$

式中  $X_i$  为原坐标系,  $X'_i$  为新坐标系,  $X_{0i}$  表示  $P_0$  运动的坐标变化. 将式 (2.5) 代入 (2.4) 后可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w'_i}{\partial t} + w'_j w'_{i,j} + w'_j U_{0i,j} &= -\frac{1}{\rho} \tilde{\omega}'_{,i} - \frac{1}{\rho} \tau_{0ij,j} + \nu \nabla^2 w'_i \\ w'_{j,j} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

上标一撇表示在新坐标下的值, 以后的表述略去该撇, 下标“0”表示该物理量在  $P_0$  处的值.

## 三、湍流脉动速度方程的求解

### 1. 平面湍尾流的一级近似解

考虑一无限长圆柱后的平面尾流, 在直角坐标系中, 令  $X_1, X_2$  和  $X_3$  分别代表流向、横向和展向,  $U_1, U_2, U_3$  和  $w_1, w_2, w_3$  分别为三个方向上的平均速度和脉动

速度。对于本流场有  $U_3 = 0$ ,  $\overline{w_1 w_3} = 0$ ,  $\overline{w_2 w_3} = 0$ 。考虑  $(X_1 + X_0)/D > 400$  的自模拟区域，其中  $D$  是圆柱直径，该区域是充分发展的湍流场，周培源<sup>[1]</sup>将 Reynolds 平均运动方程、忽略三阶关联的二阶脉动速度关联方程和准相似性条件用于该流场的计算，得到了平均速度  $U_i$ 、二阶脉动速度关联  $\overline{w_1 w_2}$ ,  $\overline{w_2^2}$ ,  $\overline{w_3^2}$ ,  $\overline{q^2}$  以及湍流微尺度  $\lambda$  沿横向的分布。本文将这些量作为式 (2.6) 中  $P_0$  点上的值。

### 2. 湍流脉动速度方程的求解域

假设脉动速度  $w_i$  满足准相似性条件是周期性函数，其特征长度尺度为湍流微尺度  $\lambda$ 。将式 (2.6) 用于图 1 正方体内的流体中，中心点为动点  $P_0$ ，正方体边长为  $\lambda$ ，由于平均量是慢变函数， $\lambda$  是微尺度，所以立方体内的  $U_{0i,j}$ ,  $\tau_{0ij}$  可以用  $P_0$  点的值代替。在立方体内用 Fourier 级数作为光滑函数，式 (2.6) 中各量用该函数展开，并有如下周期性边界条件

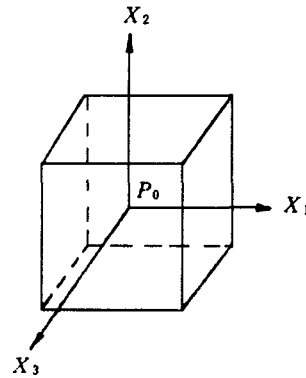


图 1  
Fig.1

$$w_i(X_1 + l\lambda, X_2 + m\lambda, X_3 + n\lambda, t) = w_i(X_1, X_2, X_3, t) \quad (3.1)$$

### 3. 计算方法

将式 (2.6) 重新整理后得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w_i}{\partial t} + \left( \frac{1}{\rho} \tilde{\omega} + \frac{1}{2} w_j w_j \right)_{,i} + \frac{1}{\rho} \tau_{0ij,j} &= w_j [w_{j,i} - (w_{i,j} + U_{0i,j})] + \nu \nabla^2 w_i \\ w_{j,j} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

令

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \tilde{\omega} + \frac{1}{2} w_j w_j &= \Pi(X_\alpha, t) \\ w_j [w_{j,i} - (w_{i,j} + U_{0i,j})] &= F_i(X_\alpha, t) \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

将式 (3.2) 中各量沿  $X_1$ ,  $X_2$  和  $X_3$  三个方向展开成含有限项的 Fourier 级数

$$\left. \begin{aligned} w_i(X_\alpha, t) &= \sum_{|k_1| \leq K_1} \sum_{|k_2| \leq K_2} \sum_{|k_3| \leq K_3} w_i^*(k_\alpha, t) \exp(ik'_j X_j) \\ \Pi(X_\alpha, t) &= \sum_{|k_1| \leq K_1} \sum_{|k_2| \leq K_2} \sum_{|k_3| \leq K_3} \pi(k_\alpha, t) \exp(ik'_j X_j) \\ F_i(X_\alpha, t) &= \sum_{|k_1| \leq K_1} \sum_{|k_2| \leq K_2} \sum_{|k_3| \leq K_3} f_i(k_\alpha, t) \exp(ik'_j X_j) \\ \frac{1}{\rho} \tau_{0ij,j} &= \sum_{|k_1| \leq K_1} \sum_{|k_2| \leq K_2} \sum_{|k_3| \leq K_3} \tau_i^*(k_\alpha, t) \exp(ik'_j X_j) \\ U_{0i,j} &= \sum_{|k_1| \leq K_1} \sum_{|k_2| \leq K_2} \sum_{|k_3| \leq K_3} U_{0i,j}^*(k_\alpha, t) \exp(ik'_j X_j) \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

式中  $k_\alpha$  为整数,  $k'_j$  是波数向量, 为  $(2\pi k_1/\lambda, 2\pi k_2/\lambda, 2\pi k_3/\lambda)$ ,  $i = \sqrt{-1}$ , 将 (3.4) 代入 (3.3) 和 (3.2) 得

$$\frac{\partial w_i^*}{\partial t} + \nu k'_j k'_j w_i^* + \tau_i^* = f_i - ik'_i \pi \quad (3.5)$$

$$k'_i w_i^*(k_\alpha, t) = 0 \quad (3.6)$$

将  $k'_i$  点乘 (3.5) 式, 再利用 (3.6) 式可得

$$k'_i f_i - k'_i \tau_i^* - ik'_i k'_i \pi = 0 \quad (3.7)$$

将式 (3.7) 代入 (3.5) 得

$$\frac{\partial w_i^*}{\partial t} + \nu k'_j k'_j w_i^* + \tau_i^* = f_i - \frac{k'_i k'_j (f_j - \tau_j^*)}{k'_j k'_j} \quad (3.8)$$

上式中的  $f_i$  按伪谱方法求解, 即在物理空间选择配置点

$$X_\alpha = \left( \frac{\alpha_1 \lambda}{2K_1}, \frac{\alpha_2 \lambda}{2K_2}, \frac{\alpha_3 \lambda}{2K_3} \right) \quad (3.9)$$

式中  $\alpha_j = 0, 1, \dots, 2K_j - 1$ ;  $i = 1, 2, 3$ , 对谱空间的  $w_i^*$  和  $[w_{i,k}^* - (w_{k,i}^* + U_{0k,i}^*)]$  进行 Fourier 变换, 求出物理空间配置点上的  $w_i$  和  $[w_{i,k} - (w_{k,i} + U_{0k,i})]$ , 然后将其相乘, 使其满足

$$\sum_{|k_\alpha| \leq K_\alpha} w_i^* \exp(ik'_j X_j) \sum_{|k_\alpha| \leq K_\alpha} [w_{i,k}^* - (w_{k,i}^* + U_{0k,i}^*)] \exp(ik'_j X_j) = F_i \quad (3.10)$$

对  $F_i$  逆变换后得到  $f_i$ . 同理, 式 (3.8) 中的  $\tau_i^*$  经 Fourier 变换到物理空间成为定值的  $\frac{1}{\rho} \tau_{0j,j}$ , 再将其逆变换得到  $\tau_i^*$ , 这样问题就归结为对常微分方程 (3.8) 的求解,

采用对时间  $t$  的差分, 第一时间步用向前差分格式

$$w_i^{*1} = \frac{1}{1 + \nu \Delta t k'_j k'_j} w_i^{*0} + \frac{\Delta t}{1 + \nu \Delta t k'_j k'_j} \left[ f_i^0 - \tau_i^{*0} - \frac{k'_i k'_j (f_j^0 - \tau_j^{*0})}{k'_j k'_j} \right] \quad (3.11)$$

对于其它时间步的处理为, (3.8) 中右端第二项用 Leapfrog 格式, 左端第二项用 Crank-Nicolson 格式, 这样便得到

$$w_i^{*n+1} = \frac{1 - \nu \Delta t k'_j k'_j}{1 + \nu \Delta t k'_j k'_j} w_i^{*n-1} + \frac{2\Delta t}{1 + \nu \Delta t k'_j k'_j} \left[ f_i^n - \tau_i^{*n} - \frac{k'_i k'_j (f_j^n - \tau_j^{*n})}{k'_j k'_j} \right] \quad (3.12)$$

由 (3.12) 求两个分量, 第三个分量由连续性方程得到. 有了每一时刻的  $w_i^*$ , 就可对图 1 中立方体取空间平均, 得到各阶脉动速度关联量.

#### 4. 初始条件

式 (3.11) 的求解要先给出  $w_i^{*0}$  和  $f_i^*$ , 这就必须给出初始条件. 已有研究表明, 取不同的初始脉动条件, 对最终计算结果影响不很大. 本文的初始条件是, 作为随机的初始脉动速度满足连续性方程和以下的能谱条件

$$w_i^{*}(k_\alpha) w_i^*(k_\alpha) = \frac{1}{2\pi k'^2} E(k') \quad k' = |k'| \quad (3.13)$$

式中  $w_i^{**}$  是  $w_i^*$  的共轭， $E$  是三维能谱函数，可表示为

$$E(k') = k'^4 \exp(-Bk'^2) \tag{3.14}$$

$B$  是控制运动尺度的参数。至于满足连续性方程，可设初始速度  $w_i^*(k_\alpha, 0)$  为

$$w_i^*(k_\alpha, 0) = a_i(k_\alpha) \exp i\beta_i(k_\alpha) \quad i = 1, 2, 3 \tag{3.15}$$

将上式代入连续性方程 (3.6)，得到实部和虚部分别为

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^3 k'_i a_i \cos \beta_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^3 k'_i a_i \sin \beta_i &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{3.16}$$

式 (3.13) 和 (3.15) 联立求解，可以求出由  $\beta_i(k_\alpha)$  和  $E(k')$  表示的  $a_i(k_\alpha)$ ，假定  $\beta_i$  是均匀分布的随机变量，由随机发生器给出数值， $E(k')$  由式 (3.14) 给出，再根据式 (3.15) 就可构造出满足连续性方程和能谱条件的  $w_i^*(k_\alpha)$ 。

### 5. 求解步骤

(1) 在  $(X_1 + X_0)/D > 400$  的自模拟区内，沿横向  $X_2$  取  $\eta(X_2/\sqrt{(X_1 + X_0)D})$  为 0.0, 0.05, 0.1, ..., 0.45, 0.5 等 11 个点作为动点  $P_0$  的初始位置，它们满足以上初始条件。

(2) 由文献 [1] 中得到这些动点上的  $U_{01}, U_{02}, \overline{w_1 w_2}, \overline{q^2}, \overline{w_2^2}, \overline{w_3^2}$  和  $\lambda$  值，由此计算出式 (2.6) 中的  $U_{0i,j}$  和  $\frac{1}{\rho} \tau_{0ij}$ 。

(3) 由式 (3.11) 计算经过时间步长  $\Delta t$  后的  $w_i^{*1}$  及其各阶脉动速度关联量，同时计算出  $\Delta t$  后  $P_0$  点达到的新位置  $X_1^1$  和  $X_2^1$ ，它们由下式给出

$$\left. \begin{aligned} X_1^1 &= X_1^0 + \Delta t U_{01}^0(X_1^0, X_2^0) \\ X_2^1 &= X_2^0 + \Delta t U_{02}^0(X_1^0, X_2^0) \end{aligned} \right\} \tag{3.17}$$

(4) 由新坐标确定  $\eta$ ，重复 (2)。

(5) 由式 (3.12) 计算  $t = (n+1)\Delta t$  时的  $w_i^{*n+1}$  及其各阶脉动速度关联量，其中  $t = n\Delta t$  和  $t = (n-1)\Delta t$  时的值已由以前求出，同时还计算  $t = (n+1)\Delta t$  时  $P_0$  点达到的新位置  $X_1^{n+1}$  和  $X_2^{n+1}$ ，它们为

$$\left. \begin{aligned} X_1^{n+1} &= X_1^{n-1} + 2\Delta t U_{01}^n(X_1^n, X_2^n) \\ X_2^{n+1} &= X_2^{n-1} + 2\Delta t U_{02}^n(X_1^n, X_2^n) \end{aligned} \right\} \quad n = 1, 2, \dots \tag{3.18}$$

如此重复下去，就求出初始不同位置的点  $P_0$  随时间推移时，沿程所经过位置对应一定的  $\eta$  处的各阶脉动速度关联量。

## 四、计算结果和讨论

计算时立方体内所取节点数为  $k_1 = 32, k_2 = 17, k_3 = 16$ ，时间步长  $\Delta t$  取定值，它的取值与脉动速度平方平均值  $\overline{q^2}$  和湍流微尺度  $\lambda$  的值有关，本文  $\Delta t$  取 0.001 秒。图 2 至图 10 是二阶、三阶、四阶脉动速度关联的计算结果和实验结果，其中符号如

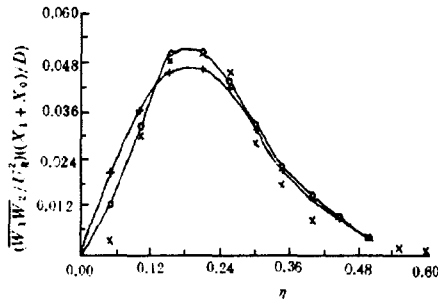


图 2 Fig.2

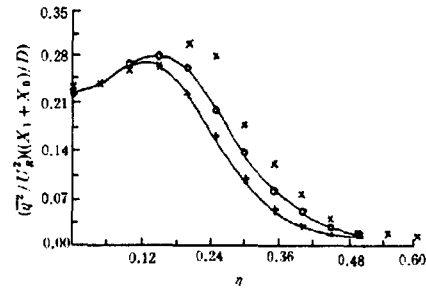


图 3 Fig.3

-- + -- Calculated results<sup>[1]</sup>, -- o -- This paper, x Test results<sup>[5]</sup>

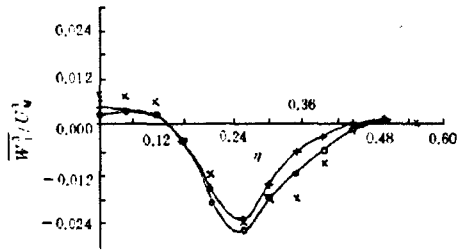


图 4 Fig.4

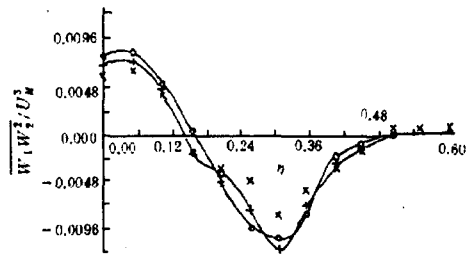


图 5 Fig.5

-- + -- Calculated results<sup>[4]</sup>, -- o -- This paper, x Test results<sup>[5]</sup>

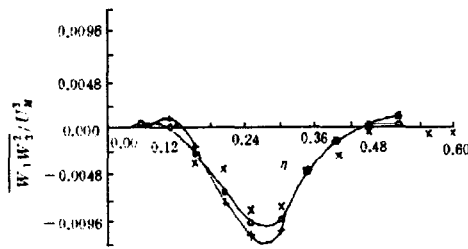


图 6 Fig.6

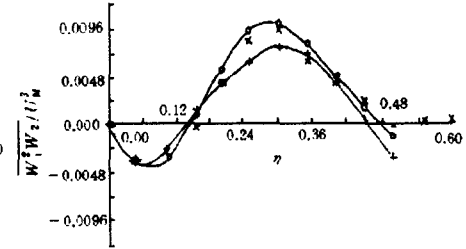


图 7 Fig.7

-- + -- Calculated results<sup>[4]</sup>, -- o -- This paper, x Test results<sup>[5]</sup>

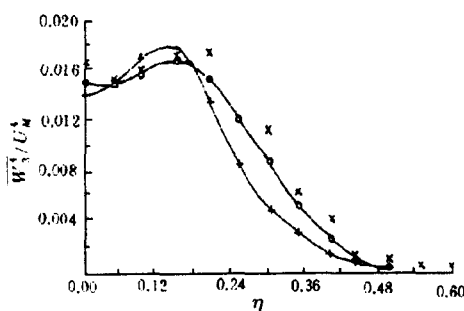


图 8 Fig.8

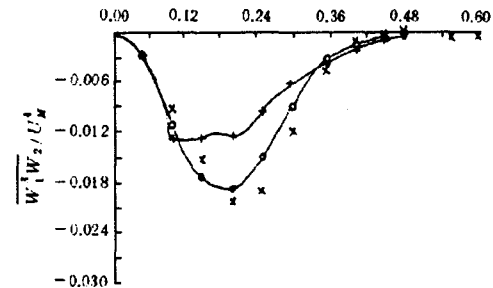


图 9 Fig.9

-- + -- Calculated results<sup>[4]</sup>, -- o -- This paper, x Test results<sup>[5]</sup>

图中所示,  $U_R$  是外流速度,  $U_M^3 = U_R^3[D/(X_1 + X_0)]^{3/2}$ ,  $U_M^4 = U_R^4[D/(X_1 + X_0)]^2$ . 图 8 至图 10 中“+”的计算结果是在二阶脉动速度关联基础上引进准正态分布的假定

后计算得到的。比较图中结果，可以看到不同结果之间的吻合程度是令人满意的。而低阶关联的结果又要比高阶关联的结果吻合得更好些。

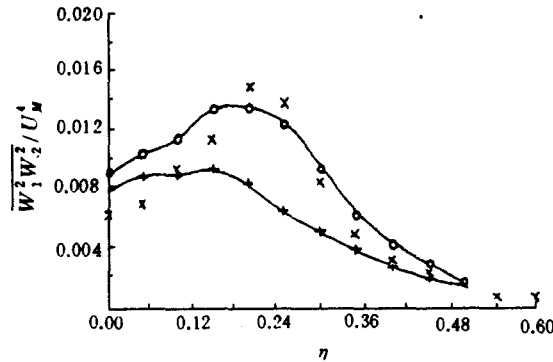


图 10 Fig.10

— + — Calculated results<sup>[4]</sup>, — o — This paper, × Test results<sup>[5]</sup>

由于本文求得的二阶脉动速度关联与其它的计算结果<sup>[1]</sup>以及实验结果已符合得较好，所以没有将它们代入 Reynolds 平均运动方程中迭代求解，这也说明在平面湍尾流中，出现在二阶脉动速度关联方程中的三阶脉动速度关联项的贡献较小。

## 五、结 论

采用逐级迭代法对湍流平均运动方程和脉动速度关联方程进行求解，既能够求出满意的湍流平均量和二阶脉动速度关联函数，又可以较方便地计算出高阶的脉动速度关联函数。这就解决了以往求高阶脉动关联函数时必须联立求解一系列不同阶的脉动速度关联方程时所带来的繁琐而又方程不封闭的问题，为深刻地了解湍流场奠定了基础。

## 参 考 文 献

- [1] Chou Peiyuan. On the condition of pseudo-similarity and the theory of turbulence. *Scientia Sinica* (Series A), 1985, 28(4):405-421
- [2] Chou Peiyuan. On an extension of Reynolds' method of finding apparent stress and the nature of turbulence. *Chinese Journal of Physics*, 1940, 1(4):1-33
- [3] Chou Peiyuan. On velocity correlations and the solutions of the equations of turbulent fluctuation. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1945, 3(1):38-54
- [4] Chou Peiyuan, Chen Shiyi. On the theory of turbulence for incompressible fluids. *Scientia Sinica* (Series A), 1987, 4:369-380
- [5] Chou Peiyuan, Lin Jianzhong, Wei Zhonglei. The experimental results of 2-D free shear turbulent flows and the comparison with the theoretical computation. *Journal of Hydrodynamics* (Series B), 1991, 3:1-9
- [6] Chou Peiyuan. Similarity structure of vorticity fluctuation and the theory of turbulence. *Scientia Sinica*, 1959, 8(10):1059-1119

THE NEW METHOD OF SOLVING VELOCITY  
CORRELATION FUNCTIONS AND ITS  
APPLICATION TO THE PLANE TURBULENT WAKE

Liu Jianzhong

(*Department of Mechanics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China*)

Huang Yongnian and Zhou Peiyuan

(*State Key Laboratory for Turbulence, Department of Mechanics,  
Peking University, Beijing 100871, China*)

**Abstract** In this paper, the results of plane turbulent wake given by Zhou Peiyuan are considered as the first order approximation and put into the equations of turbulent fluctuation. The equations are solved numerically within the range of micro-scale by means of spectrum method. The double, triple and quadruple fluctuating velocity correlations are obtained by computation. They are in a good agreement with experimental results.

**Key words** higher order correlation, self-preservation, successive substitution, plane turbulent wake, numerical computation