第 25 卷 第 6 期 力 学 学 报 Vol. 25, No.6
1993 年 11 月 ACTA MECHANICA SINICA Nov., 1993

对"湍流通用物理方程"等两篇文章的意见

郑哲敏 庄逢甘 张涵信 朱如曾 李家春 黄永念 林贞彬
(中国科学院力学研究所非线性连续介质力学开放研究实验室，北京 100080)

提要 本文以均匀不可压情况为例，系统地分析"湍流通用物理方程"[1]和"湍流通用物理方程的推导及讨论"[2]等两篇文章所提出的理论. 指出"第二种平均"("第二次平均")的系综不存在，"湍流力假设"和"有效湍流力假设"不成立，文章采用的封闭手断也不合理，因此所推得的"湍流通用物理方程"及其一维简化，即"规范方程"均不成立；文 [2] 从这些方程出发，对湍流特性所作的一切分析都失去依据；文中还存在大量不应有的其他错误.

关键词 高歌，湍流，通用方程，规范方程，二重平均，湍流力，封闭性

一、引 言

《航空动力学报》1992 年第 3–4 两期连续发表了高歌关于湍流的通用物理方程及其规范形式的两篇文章[1,2]，文章宣称，从 N-S 方程出发，通过"侧偏系综平均"和"速度脉动量的分解"，导出了既含涡粘系数又含色散项，既能描述湍流平均运动又能描述湍流结构运动的，具有二阶精度的，封闭的"湍流通用物理方程"，"从而统一了湍流的统计及结构二大学派"，"使寻找湍流通用方程的历史使命得以完成". 果真如此，当然意义十分重大，因此我们认真地研究了这两篇文章，结果发现，文章在基本假设、物理概念、逻辑推理和处理方法等方面存在大量严重的错误，以致所得到的结果完全不能成立.

本文旨在分析文 [1, 2] 的主要错误，然而在文 [1, 2] 的某些文字论述和数学表达式中存在概念上的含混甚至相互抵触之处，那么其思想究竟以什么为准呢？考虑到文 [1, 2] 的主要结果是以数学方程的形式来表述的，因此在文字与公式之间，我们一般将认定以公式为准，在数学表达式中则以导出"通用方程"并简化为"规范方程"的一条主线客观上所要求的概念为准. 此外，文 [1] 与文 [2] 的某些公式也有不一致之处，凡遇此情况，均以文 [2] 为准. 我们将在这一原则下，以均匀不可压情况为例，抓住文 [1, 2] 通往主要结果的数学推导过程 (主线) 及其表达的物理内容来分析；至于那些与主线所用概念相矛盾的，或者其它含糊不清、似是而非的表达式和说法，以及一些想当然的随便议论，除个别直接影响本文行文者外，一般不加分析评论，以免篇幅过大. 不过，为了清楚和讨论的方便起见，我们将在本文第二节先概述文 [1, 2] 的主线思路和主要步骤，并以主线精神解释和统一文 [1, 2] 的一些公式，然后在第三、四、五节中再进行系统的分析，最后在第六节概括我们的结论.

本文于 1993 年 8 月 20 日收到.

二、原文的主线思路和主要步骤

为了给出封闭的湍流平均运动方程，文 [1, 2] 认为 N–S 方程的系综平均方程（见本文 (2.10) 式）中的附加应力项 $\mathbf{R}_1$（见本文 (2.11) 式）可以用二重平均“有效湍流力” $-<\overline{\mathbf{F}}_{\alpha\beta e}>$（见本文 (2.9)′ 式）来代替，而后者又涉及另一变量 —— 二重平均“脉动速度” $<\overline{\mathbf{v}'}_{\alpha\beta}>$，因此文 [1, 2] 首先必须引进二重平均的概念，给出 $<\overline{\mathbf{v}'}_{\alpha\beta}>$ 的有关方程，于是有下列诸步骤：

1．认为湍流遵从 N–S 方程 (1)**，各态历经假设成立，并且存在快慢两种变化的时间尺度 1).

2．引进两种不同的系综平均概念：

第一种平均 (文 [1, 2] 称之为“普通平均”或“第一次平均”)，以速度为例

$$\overline{\mathbf{V}_\alpha(\mathbf{r},t)} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\mathbf{V}_\alpha(\mathbf{r},t) \tag{2.1}$$

这里 N 是求平均时所取 N–S 方程解的个数 2)，我们把这些解的集合 $\{\mathbf{v}_\alpha(\mathbf{r},t)\}$ 记为系综 B.

第二种平均（文 [3] 称之为“第二次平均”），是对 B 的某真子系综 b 的平均，仍以速度为例

$$<\mathbf{V}_\beta(\mathbf{r},t)> = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\beta=\alpha_1}^{\alpha_n}\mathbf{V}_\beta(\mathbf{r},t) \tag{2.2}$$

$$1\le\alpha_1\le\alpha_2\le\cdots\le\alpha_n\le N,\quad 1\le n<N$$

文 [1]§2.4 和文 [2] 后记第 2 点强调

$$<\mathbf{V}_\beta(\mathbf{r},t)> \neq \overline{\mathbf{V}_\alpha(\mathbf{r},t)} \tag{2.3}$$

需要说明，尽管文 [1]§2 的系综概念，平均公式 (6)* 和 (7)*，文 [2]§2 和后记第 2 点关于第二次平均不计及平均状态 $\bar{s}$ 的说明含义不清，但文 [2] 主线推导部分 (1)**—(6)** 却清楚地要求各时空点的被平均的动力变量遵从 N–S 方程，并且要求两种平均运算与时空求导运算可以交换次序，因此系综 B 应是 N–S 方程解 (流场解) 的某集合．所以本文公式 (2.1) 和 (2.2) 是主线推导实际所用的公式．对 (2.2) 的进一步说明可见本文第三节．

对于任意指定的系综 B 及其任一子系综 b，数学上，总可以按照公式 (2.1) 和 (2.2) 求出对应的平均值，然而它们未必与所研究湍流的实际行为有什么联系，即这些数学的平均值未必具有实际物理意义．文 [1, 2] 要求 B 满足各态历经假设 (满足这一假设的 B 记为 $\mathrm{B_R}$)

$$\overline{\mathbf{V}_\alpha(\mathbf{r},t)} = \overline{\mathbf{V}_\xi(\mathbf{r},t')}^{[\Delta](t)},\quad 当\,\mathbf{V}_\xi(\mathbf{r},t)\in\mathrm{B_R} \tag{2.4}$$

1) 带 * 和 ** 的公式号码分别指文 [1] 和文 [2] 的公式号码.

2) 本文凡提及“N–S 方程”，往往包括不可压条件和边界条件在内.

式中

$$\overline{\mathbf{V}_\xi(\mathbf{r},t')}^{[\Delta](t)} = \frac{1}{\Delta}\int_t^{t+\Delta} \mathbf{V}_\xi(\mathbf{r},t')\mathrm{d}t' \tag{2.5}$$

此处 Δ 为各态历经时间尺度，$[\Delta](t)$ 为时间区间 $[t, t+\Delta]$.(2.4) 是以主线精神准确化了的 $(4)^*$ 式，它使文 [1, 2] 第一种平均的结果具有明确的物理意义. 显然，第一种平均就是与雷诺的时间平均对应的传统的系综平均. 那么，文 [1, 2] 是如何选择系综 b，以使 (2.2) 式具有物理意义的呢？这将在本文第三节中再具体评论，那里将证明，符合文 [1, 2] 条件的系综 b 根本不存在. 这里暂且承认它，并把对涉及到 N-S 方程属于 $\mathrm{B_R}$ 和 b 的二个解的量，如

$$\mathbf{v}'_{\alpha\beta}(\mathbf{r},t) = \mathbf{V}_\alpha(\mathbf{r},t) - \mathbf{V}_\beta(\mathbf{r},t) \tag{2.6}$$

连续进行二种平均称为“二重平均”（文 [2] 称之为“二次平均”）. 由于

$$< \overline{\mathbf{v}'_{\alpha\beta}(\mathbf{r},t)} >= \overline{\mathbf{V}_\alpha(\mathbf{r},t)} - < \mathbf{V}_\beta(\mathbf{r},t) > \neq 0 \tag{2.7}$$

文 [1, 2] 也把对 $\mathbf{v}'_{\alpha\beta}(\mathbf{r},t)$ 一类量的二重平均称为“侧偏系综平均”. 应当注意，对 $\mathbf{v}'_{\alpha\beta}$ 一类量的第一次平均给出的仍是快变化量，故不是完整平均，二重平均才是完整平均.

本文以后一律采用如下记号：下标 α 、β 和 $\alpha\beta$ 分别指对应量只进行第一种、第二种平均和二种平均都进行；$\bar{\cdot}$ 和 $< \cdot >$ 分别表示第一种平均和第二种平均. 以后凡遇到文 [1, 2] 的公式，都作这样的符号更改，而不再说明.

3．在二种平均概念的基础上定义二重平均湍流力 $-<\overline{\mathbf{F}}_{\alpha\beta}>$

$$< \overline{\mathbf{F}}_{\alpha\beta} >= \frac{1}{n}\sum_{\beta=\alpha}^{\alpha_n}\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\mathbf{F}_{\alpha\beta}(\mathbf{r},t)$$

式中 $\mathbf{F}_{\alpha\beta}(\mathbf{r},t)$ 为由下列“牛顿定律”决定的“力”

$$\mathbf{F}_{\alpha\beta}(\mathbf{r},t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}'_{\alpha\beta} + (\overline{\mathbf{V}}_\alpha\cdot\nabla)\mathbf{v}'_{\alpha\beta} \tag{2.8}$$

这里 $\mathbf{v}'_{\alpha\beta}$ 由 (2.6) 式给出，于是

$$< \overline{\mathbf{F}}_{\alpha\beta} >= \frac{\partial}{\partial t} < \overline{\mathbf{v}'}_{\alpha\beta} > + (\overline{\mathbf{V}}_\alpha\cdot\nabla) < \overline{\mathbf{v}'}_{\alpha\beta} > \tag{2.9}$$

文 [1]§2.4 和文 [2]§2 视 $<\overline{\mathbf{F}}_{\alpha\beta}>$ 为“$\bar{s}$ 状态（即平均状态）的流体作用于单位质量脉动流体的平均力”，文 [1] 还认为 $-<\overline{\mathbf{F}}_{\alpha\beta}>$ 为“平均湍流单位质量流体所受的湍流力”，因此 $-<\overline{\mathbf{F}}_{\alpha\beta}>$ 可以取代 N-S 方程的第一种平均方程 (由各态历经假设，此方程也可视为雷诺的时间平均方程)

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{\mathbf{V}}_\alpha + (\overline{\mathbf{V}}_\alpha\cdot\nabla)\overline{\mathbf{V}}_\alpha = -\frac{1}{\rho}\nabla\overline{P}_\alpha + \nu_L\nabla^2\overline{\mathbf{V}}_\alpha + \mathbf{R}_1 \tag{2.10}$$

中的附加应力项 (即雷诺应力项)

$$\mathbf{R}_1 = \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\hat{\tau}_1 = -\nabla\cdot\overline{\mathbf{u}_\alpha\mathbf{u}_\alpha} = \nabla\cdot(\overline{\mathbf{v}'}_{\alpha\beta}\overline{\mathbf{v}'}_{\alpha\beta}) - \nabla\cdot(\overline{\mathbf{v}'_{\alpha\beta}\mathbf{v}'}_{\alpha\beta}) \tag{2.11}$$

得

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{\mathbf{V}}_\alpha + (\overline{\mathbf{V}}_\alpha\cdot\nabla)\overline{\mathbf{V}}_\alpha = -\frac{1}{\rho}\nabla\overline{P}_\alpha + \nu_L\nabla^2\overline{\mathbf{V}}_\alpha - <\overline{\mathbf{F}}_{\alpha\beta}> \tag{9*}$$

这种取代，即认为

$$-<\overline{\mathbf{F}}_{\alpha\beta}>=\mathbf{R}_1 \tag{2.12}$$

其合法性显然是一个假设，我们称之为"湍流力假设"．这是一个关于基本概念，而不是关于近似方法的重要假设．

注意：①利用 (2.9)，(2.11) 和后面的 (2.16) 可知，湍流力假设 (2.12) 等价于假设

$$-\frac{1}{\rho}\nabla<\overline{p'}_{\alpha\beta}> +\nu_L\nabla^2<\overline{\mathbf{v}'}_{\alpha\beta}> -(<\overline{\mathbf{v}'}_{\alpha\beta}>\cdot\nabla)\overline{\mathbf{V}}_\alpha$$
$$-2<\overline{(\mathbf{v}'_{\alpha\beta}\cdot\nabla)\mathbf{v}'}_{\alpha\beta}> +3<(\overline{\mathbf{v}'}_{\alpha\beta}\cdot\nabla)\overline{\mathbf{v}'}_{\alpha\beta}>=0 \tag{2.13}$$

②虽然文 [1] 在 (9)* 中引进的实际上是湍流力假设 (2.12)，但在文 [2] 的具体推导中，当应用这一假设时，却又说要"剔除" $<\overline{\mathbf{F}}_{\alpha\beta}>$ 中"只产生旋转而不做功的力" $<\overline{\mathbf{f}}>$，即引进"有效做功力"

$$<\overline{\mathbf{F}}_{\alpha\beta e}>=<\overline{\mathbf{F}}_{\alpha\beta}>-<\overline{\mathbf{f}}> \tag{2.9$'$}$$

并认为

$$-<\overline{\mathbf{F}}_{\alpha\beta e}>=\mathbf{R}_1 \tag{2.12$'$}$$

我们把 (2.12)$'$ 称为"有效湍流力假设"，它当然也有与 (2.13) 类似的等价形式．

4．从 N-S 方程

$$\frac{\partial\mathbf{V}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{V}_\alpha\cdot\nabla)\mathbf{V}_\alpha = -\frac{1}{\rho}\nabla P_\alpha + \nu_L\nabla^2\mathbf{V}_\alpha \tag{4**}$$

$$\frac{\partial\mathbf{V}_\beta}{\partial t} + (\mathbf{V}_\beta\cdot\nabla)\mathbf{V}_\beta = -\frac{1}{\rho}\nabla P_\beta + \nu_L\nabla^2\mathbf{V}_\beta \tag{3**}$$

出发，推导由 (2.6) 式定义的"脉动速度" $\mathbf{v}'_{\alpha\beta}$ 的一次平均量 $\overline{\mathbf{v}'}_{\alpha\beta}$ 的方程：

将 (4)** 减去 (3)** 得

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}'_{\alpha\beta} + (\mathbf{V}_\beta\cdot\nabla)\mathbf{v}'_{\alpha\beta} + (\mathbf{v}'_{\alpha\beta}\cdot\nabla)\mathbf{V}_\beta$$
$$+(\mathbf{v}'_{\alpha\beta}\cdot\nabla)\mathbf{v}'_{\alpha\beta} = -\frac{1}{\rho}\nabla p'_{\alpha\beta} + \nu_L\nabla^2\mathbf{v}'_{\alpha\beta} \tag{5a**}$$

对 (5a)** 求第一种平均，并利用 (2.7) 式得

$$\frac{\partial\overline{\mathbf{v}'}_{\alpha\beta}}{\partial t} + (\overline{\mathbf{V}}_\alpha\cdot\nabla)\overline{\mathbf{v}'}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{\rho}\nabla\overline{p'}_{\alpha\beta} + \nu_L\nabla^2\overline{\mathbf{v}'}_{\alpha\beta}$$

$$+2\nabla\cdot(\overline{\mathbf{v}}'_{\alpha\beta}\overline{\mathbf{v}}'_{\alpha\beta})-(\overline{\mathbf{v}}'_{\alpha\beta}\cdot\nabla)\overline{\mathbf{V}}_{\alpha}+\left|\begin{array}{c}-\nabla\cdot\overline{(\mathbf{v}'_{\alpha\beta}\mathbf{v}'_{\alpha\beta})}\\ \\ 0\end{array}\right| \qquad \begin{array}{r}(2.14)\\ \\ (5\mathrm{d})^{**}\end{array}$$

此式表示，按推导本应得 (2.14) 式，但文 [2] 为了封闭的目的，将 (2.14) 右边最末一项忽略而得 (5d)**.

5．二重平均脉动量 $<\overline{\mathbf{v}}'_{\alpha\beta}>$ 运动方程的导出：

文 [2] 对 (5d)** 求第二种平均，并为了封闭的目的，用无关联的项 $2(<\overline{\mathbf{v}}'_{\alpha\beta}>\cdot\nabla)<\overline{\mathbf{v}}'_{\alpha\beta}>$ 取代关联项 $2<(\overline{\mathbf{v}}'_{\alpha\beta}\cdot\nabla)\overline{\mathbf{v}}'_{\alpha\beta}>$（本文将称这一类代换为"解除关联"），最后得到 $<\overline{\mathbf{v}}'_{\alpha\beta}>$ 的运动方程

$$\frac{\partial}{\partial t}<\overline{\mathbf{v}}'_{\alpha\beta}>+(\overline{\mathbf{V}}_{\alpha}\cdot\nabla)<\overline{\mathbf{v}}'_{\alpha\beta}>=-\frac{1}{\rho}\nabla<\overline{p}'_{\alpha\beta}>$$

$$+\left|\begin{array}{c}\nu_{L}\\ \nu_{e}\end{array}\right|\nabla^{2}<\overline{\mathbf{v}}'_{\alpha\beta}>-(<\overline{\mathbf{v}}'_{\alpha\beta}>\cdot\nabla)\overline{\mathbf{V}}_{\alpha}+2(<\overline{\mathbf{v}}'_{\alpha\beta}>\cdot\nabla)<\overline{\mathbf{v}}'_{\alpha\beta}> \qquad \begin{array}{r}(2.15)\\ (6)^{**}\end{array}$$

上式表示，按文 [2] 推导，原本应得 (2.15) 式，但文 [2] 将系数 ν_L 改为由 (2.18) 式定义的，所谓的"有效粘性系数" ν_e，从而得出 (6)** 式.

注意：如果从正确的 (2.14) 式出发进行第二种平均，则应得 $<\overline{\mathbf{v}}'_{\alpha\beta}>$ 的运动方程为如下的 (2.16) 式

$$\frac{\partial}{\partial t}<\overline{\mathbf{v}}'_{\alpha\beta}>+(\overline{\mathbf{V}}_{\alpha}\cdot\nabla)<\overline{\mathbf{v}}'_{\alpha\beta}>=-\frac{1}{\rho}\nabla<\overline{p}'_{\alpha\beta}>+\nu_{L}\nabla^{2}<\overline{\mathbf{v}}'_{\alpha\beta}>$$

$$-(<\overline{\mathbf{v}}'_{\alpha\beta}>\cdot\nabla)\overline{\mathbf{V}}_{\alpha}+2(<\overline{\mathbf{v}}'_{\alpha\beta}>\cdot\nabla)<\overline{\mathbf{v}}'_{\alpha\beta}>$$

$$+\left|\begin{array}{c}-<\overline{(\mathbf{v}'_{\alpha\beta}\cdot\nabla)\mathbf{v}'}_{\alpha\beta}>+2<(\overline{\mathbf{v}}'_{\alpha\beta}\cdot\nabla)\overline{\mathbf{v}}'_{\alpha\beta}>-2(<\overline{\mathbf{v}}'_{\alpha\beta}>\cdot\nabla)<\overline{\mathbf{v}}'_{\alpha\beta}>\\ 0\end{array}\right| \qquad \begin{array}{r}(2.16)\\ (2.15)\end{array}$$

竖线之间的上三项是 (2.16) 比 (2.15) 多出的项.

6．文 [1] 引进"脉动速度的分解式"

$$\mathbf{v}'_{\alpha\beta}=\nabla\mathbf{V}_{\beta}\cdot\delta\mathbf{r}_{\alpha\beta}=(\nabla'\phi)_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}\mathbf{\Omega}_{\beta}\times\delta\mathbf{r}_{\alpha\beta} \qquad (11)^{*}$$

这里，第一个等号实际是 $\delta\mathbf{r}_{\alpha\beta}$ 的定义， $\nabla\mathbf{V}_{\beta}$ 中算子 ∇ 作用于 $\mathbf{r}$，而 $\phi(\mathbf{r},t,\delta\mathbf{r}_{\alpha\beta})$ 是 $(\delta x_{\alpha\beta},\delta y_{\alpha\beta},\delta z_{\alpha\beta})$ 的二次齐次式， $(\nabla'\phi)_{\alpha\beta}$ 中的算子 ∇' 作用于 $\delta\mathbf{r}_{\alpha\beta}$，

$$(\nabla'\phi)_{\alpha\beta}=[\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial(\delta x_{\alpha\beta})}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial(\delta y_{\alpha\beta})}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial(\delta z_{\alpha\beta})}]\phi_{\alpha\beta}$$

7．“通用物理方程组”的导出：

将 (11)* 代入 (2.15) 式的右边，对某些项，视 $\overline{\delta\mathbf{r}}_{\alpha\beta}$ 为“局部常数”，去掉与 $\overline{\delta\mathbf{r}}_{\alpha\beta}$ 正交的“无效项”，并解除所有的关联，将所得结果视为 (2.9)′ 式的右边，于是得“平均有效做功力” $<\overline{\mathbf{F}}_{\alpha\beta e}>$

$$<\overline{\mathbf{F}}_{\alpha\beta e}>=-(1/\rho)\nabla<\overline{p'}_{\alpha\beta}>+\nu_L\nabla^2<(\overline{\nabla'\phi})_{\alpha\beta}>-(\nu_L/2)[\nabla(<\overline{\delta\mathbf{r}}_{\alpha\beta}>\cdot\nabla)]\times<\mathbf{\Omega}_\beta>$$
$$-(<\overline{\mathbf{v}'}_{\alpha\beta}>\cdot\nabla)\overline{\mathbf{V}}_\alpha+2(<\overline{\mathbf{v}'}_{\alpha\beta}>\cdot\nabla)<\overline{(\nabla'\phi)}_{\alpha\beta}> \tag{9**}$$

用 (9)** 代替 (2.10) 中的 $\mathbf{R}_1$，即利用有效湍流力假设 (2.12)′ 得

$$\frac{\partial\overline{\mathbf{V}}_\alpha}{\partial t}+(\overline{\mathbf{V}}_\alpha\cdot\nabla)\overline{\mathbf{V}}_\alpha=-\frac{1}{\rho}\nabla(\overline{P}_\alpha-<\overline{p'}_{\alpha\beta}>)+\nu_L\nabla^2(\overline{\mathbf{V}}_\alpha-<(\overline{\nabla'\phi})_{\alpha\beta}>)$$
$$+(<\overline{\mathbf{v}'}_{\alpha\beta}>\cdot\nabla)(\overline{\mathbf{V}}_\alpha-2<\overline{(\nabla'\phi)}_{\alpha\beta}>)+\frac{\nu_L}{2}[\nabla(<\overline{\delta\mathbf{r}}_{\alpha\beta}>\cdot\nabla)]\times<\mathbf{\Omega}_\beta> \tag{2.17}$$

定义“涡粘系数” ν_T 和“有效粘性系数” ν_e

$$\nu_T=-\nu_L[\nabla^2<\overline{(\nabla'\phi)}_{\alpha\beta}>/\nabla^2\overline{\mathbf{V}}_\alpha],\qquad \nu_e=\nu_T+\nu_L \tag{2.18}$$

以所谓“自激正反馈”为由将 (2.17) 式右边 ν_L 改为 ν_e，得 (10)**

$$\frac{\partial\overline{\mathbf{V}}_\alpha}{\partial t}+(\overline{\mathbf{V}}_\alpha\cdot\nabla)\overline{\mathbf{V}}_\alpha=-\frac{1}{\rho}(\overline{P}_\alpha-<\overline{p'}_{\alpha\beta}>)+\nu_e\nabla^2(\overline{\mathbf{V}}_\alpha-<\overline{(\nabla'\phi)}_{\alpha\beta}>)$$
$$+(<\overline{\mathbf{v}'}_{\alpha\beta}>\cdot\nabla)(\overline{\mathbf{V}}_\alpha-2<(\overline{\nabla'\phi})_{\alpha\beta}>)+\frac{\nu_e}{2}[\nabla(<\overline{\delta\mathbf{r}}_{\alpha\beta}>\cdot\nabla)]\times<\mathbf{\Omega}_\beta> \tag{10**}$$

文 [2] 认为 (10)** 、(6)** 和

$$\nabla\cdot\overline{\mathbf{V}}_\alpha=0\qquad\nabla\cdot<\overline{\mathbf{v}'}_{\alpha\beta}>=0 \tag{11**, 12**}$$

构成了无经验系数的，不含相关量的，封闭的，具有二阶精度的，不可压湍流的“通用物理方程组” 1).

8．文 [2] 认为按照文中给出的展开方法，精度还可以进一步提高，并作为示范，给出了“三阶精度”的方程 (6a)** 和 (6b)**.

9．文 [2] 认为在压力梯度可忽略条件下，(10)** 式的一维简化形式就是如下的“规范方程”

$$u_t+uu_x-\nu u_{xx}+\beta u_{xxx}=0 \tag{23**}$$

并对 (23)** 作了稳定性分析，给出了所谓的“湍流转捩判据”，还将这些结果与湍流的间歇性等现象相联系，以强调通用方程及其规范形式的重要性.

10．文 [2] 还对可压缩湍流作了类似的处理.

三、三项基本错误

从上节可见，系综 B 和 b 的概念以及 (有效) 湍流力假设是文 [2] 的理论基础.

1) 文 [3] 默认 $\overline{V}_\alpha,<V_\beta>,\overline{P}_\alpha,<P_\beta>$ 以及有关的时空导数为零阶；$<\overline{p'}_{\alpha\beta}>,<\overline{\mathbf{v}'}_{\alpha\beta}>$ 及有关的时空导数为一阶小量；$p'_{\alpha\beta}$ 和 $\mathbf{v}'_{\alpha\beta}$ 的二阶关联项及有关的空间导数为二阶小量. 这已明显地限制了“通用性”的含义，本文将在姑且承认这些假定的条件下进行讨论.

本节将证明，系综 b 不存在，（有效）湍流力假设不成立，以及封闭手段的不合理是文 [1, 2] 的三项基本错误，它们从根本上否定了文 [1, 2] 的“通用方程组”.

1. 系综 b 不存在

各态历经假设 (2.4) 使公式 (2.1) 具有明确的物理意义. 现在考察文 [2] 是怎样选择系综 b 以使公式 (2.2) 也给出具有物理意义的结果的.

文 [1, 2] 以 (2.3) 为例要求二种平均不恒等. 这一条件对于文 [1, 2] 确属必须，否则

$$<\overline{\mathbf{v}'}_{\alpha\beta}>=\overline{\mathbf{V}}_\alpha-<\mathbf{V}_\beta> \qquad <\overline{p'}_{\alpha\beta}>=\overline{P}_\alpha-<P_\beta> \tag{3.1}$$

便给出 $<\overline{\mathbf{v}'}_{\alpha\beta}>=<\overline{p'}_{\alpha\beta}>=0$，结合 (3.10) — (3.12) 可知， (2.9) 和 (9)** 给出 $<\overline{\mathbf{F}}_{\alpha\beta}>=<\overline{\mathbf{F}}_{\alpha\beta e}>=0$. 这样，方程 (9)* 和 (2.17) 便成为可独立求解的，无雷诺应力项的雷诺方程，而这是明显错误的.

文 [2] 在 §2 和后记中强调，对各 $\mathbf{r}$ 处求第二种平均时，都不计入 $\overline{s_\alpha(\mathbf{r},t)}$ 状态（这里 $s_\alpha(\mathbf{r},t)$ 指 $\mathbf{r}$ 处的速度和压力 ($\mathbf{v}_\alpha(\mathbf{r},t)$)，认为这保证了二种平均不恒等. 这就是说， b 中只包含 $\mathrm{B_R}$ 中被文 [2] 的作者认为能代表“非 $\bar{s}$ 态”的那些成员，从而

$$\mathrm{b}\subset\mathrm{B_R} \tag{3.2}$$

另一方面，结合文 [1]§2.2 所述时间平均与系综平均（在主线推导中，系综应为 b）的相等性，文 [2] 的上述强调表明文 [2] 要求如下的假设 (我们称之为“非 $\bar{s}$ 态历经假设”) 成立

$$<\mathbf{V}_\beta(\mathbf{r},t)>=\overline{\mathbf{V}_\xi(\mathbf{r},t')}^{[\sigma_\xi](\mathbf{r},t)},\quad 当\mathbf{V}_\xi(\mathbf{r},t)\in\mathrm{B_R} \tag{3.3}$$

式中

$$\overline{\mathbf{V}_\xi(\mathbf{r},t')}^{[\sigma_\xi](\mathbf{r},t)}=\frac{1}{\sigma_\xi(\mathbf{r},t)}\int\limits_{[\sigma_\xi](\mathbf{r},t)}\mathbf{V}_\xi(\mathbf{r},t')\mathrm{d}t' \tag{3.4}$$

这里， $[\sigma_\xi](\mathbf{r},t)$ 为 $\mathbf{V}_\xi(\mathbf{r},t)$ 在 $[\Delta](t)$ 内和 $\mathbf{r}$ 处处于非 $\bar{s}$ 态的时间集合，我们称之为 $[\Delta](t)$ 内 $\mathbf{r}$ 处的“局部非 $\bar{s}$ 态时间集”， $\sigma_\xi(\mathbf{r},t)$ 为 $[\sigma_\xi](\mathbf{r},t)$ 的一维勒贝格测度.

(2.3) 、 (3.2) 和 (3.3) 就是文 [2] 对系综 b 提出的三项条件，其中 (3.3) 赋予第二种平均以物理意义. 然而下面即证明，符合三项条件的 b 并不存在.

证明：用反证法. 设存在 b 使三项条件 (2.3) 、 (3.2) 和 (3.3) 都满足. (3.3) 式的右边可改写为

$$\overline{\mathbf{V}_\xi(\mathbf{r},t')}^{[\sigma_\xi](\mathbf{r},t)}=\frac{\Delta}{\sigma_\xi(\mathbf{r},t)}\overline{\mathbf{V}_\xi(\mathbf{r},t')f_\xi(\mathbf{r},t')}^{[\Delta](t)} \tag{3.5}$$

式中

$$f_\xi(\mathbf{r},t)=\begin{cases}1 & 当t\in[\sigma_\xi](\mathbf{r},t)\\ 0 & 当t\bar{\in}[\sigma_\xi](\mathbf{r},t)\end{cases}$$

$$\sigma_\xi(\mathbf{r},t)=(\Delta)\overline{f_\xi(\mathbf{r},t')}^{[\Delta](t)} \tag{3.6}$$

$f_\xi(\mathbf{r},t)$ 和 $\mathbf{V}_\xi(\mathbf{r},t)$ 都是 t 的快变化函数，根据文 [1, 2] 关于二个时间尺度的假定，(3.5) 的右边应为 t 的慢变化函数，故 (3.3) 的右边是 t 的慢变化函数.

对 (3.3) 的两边同时再求一次 $[\Delta](t)$ 上的时间平均，右边应保持不变，故

$$<\overline{\mathbf{V}_\beta(\mathbf{r},t)}^{[\Delta](t)}>=\overline{\mathbf{V}_\xi(\mathbf{r},t')}^{[\sigma_\xi](\mathbf{r},t)},\quad 当\mathbf{V}_\xi(\mathbf{r},t)\in \mathrm{B_R}$$

(3.2) 保证此式左边 $[\Delta](t)$ 上的时间平均可用第一种平均代替，于是左边化为 $<\overline{\mathbf{V}_\alpha(\mathbf{r},t)}>$，它就是 $\overline{\mathbf{V}_\alpha(\mathbf{r},t)}$；右边用 (3.3) 式代换，于是上式化为

$$\overline{\mathbf{V}_\alpha(\mathbf{r},t)}=<\mathbf{V}_\beta(\mathbf{r},t)> \tag{3.7}$$

此式与条件 (2.3) 矛盾. 证毕 1).

非 $\bar{s}$ 态历经假设 (3.3) 与通常所采用的各态历经假设 (2.4)，虽然都是假设，却不能相题并论，原因在于 :(3.3) 式可改写为

$$<\mathbf{V}_\beta(\mathbf{r},t)>=\overline{\left[\frac{(\Delta)\mathbf{V}_\xi(\mathbf{r},t')f_\xi(\mathbf{r},t')}{\sigma_\xi(\mathbf{r},t')}\right]}^{[\Delta](t)}$$

此式右边的被平均量根本不满足 N–S 方程，却要求它在 $[\Delta](t)$ 内正好历经 N–S 方程解集 b 在 t 时刻的速度分布集，这怎么可能呢？

上面的证明表明，根本不存在满足文 [2] 要求的系综 b，因此文 [2] 第二种平均概念不成立，从而文 [2] 失去了进一步推理的基础，致使凡涉及第二种平均概念的变量，如 $<\overline{\mathbf{v}'}_{\alpha\beta}>$、$<\overline{p'}_{\alpha\beta}>$、$-<\overline{\mathbf{F}}_{\alpha\beta}>$ 和 $-<\overline{\mathbf{F}}_{\alpha\beta e}>$ 等均系虚假变量，故不管文 [2] 后面的推导是否还有其他错误，湍流力假设，有效湍流力假设，通用方程组中的 (10)** 、(6)** 和 (12)**，以及一维规范方程 (23)**，均因包含虚假变量而不成立. 若将这些虚假变量当作数学上的辅助变量，那么，辅助变量的初条件将因与湍流的实际情况无法挂钩而具有完全的任意性，从而方程组事实上无意义.

2. 湍流力假设和有效湍流力假设不成立

上面已从系综 b 的不存在推断出这一结论；其实，即使退一步，假定 b 存在，那么两个假设的等价式 (2.13) 等两式的毫无根据，以及下面将要指出的物理概念错误，也独立地表明了两个假设不成立. 显然单单（有效）湍流力假设不成立已足能否定所谓的“通用方程组”.

鉴于系综 b 的存在性和（有效）湍流力假设对于文 [1, 2] 的基本重要性，有必要进一步考察它们的错误根源：

文 [1, 2] 为了替换雷诺方程 (2.10) 中的雷诺应力项 $\mathbf{R}_1$，把 (2.9) 式 (或 (2.9)′ 式) 表示的 $<\overline{\mathbf{F}}_{\alpha\beta}>$(或 $<\overline{\mathbf{F}}_{\alpha\beta e}>$) 说成是所谓的“单位质量脉动流体”所受的“平均力”(或“有效做功力”)，其“反作用力” $-<\overline{\mathbf{F}}_{\alpha\beta}>$ (或 $-<\overline{\mathbf{F}}_{\alpha\beta e}>$) 是“平均状态单位质量流体”所受的“湍流力”(或“平均摄动做功力”)，从而也就是雷诺应力项 $\mathbf{R}_1$.

这里文 [2] 的概念极端混乱和错误. 我们知道，雷诺应力项起源于流体无规则运动所引起的动量的空间交换，可是文 [1, 2] 却把它说成是局部“脉动流体”与“平均

1) 如果文 [2] 的作者认为各态历经假设和非 $\bar{s}$ 态历经假设涉及的不是单纯时间平均，而是时空平均，则类似可导出 (3.7)，从而仍引出矛盾.

状态流体”所组成的局部体系中二者之间的作用与反作用．其实，根本不存在什么只具有“脉动速度” $\mathbf{v}'_{\alpha\beta}$ 或 $<\overline{\mathbf{v}'}_{\alpha\beta}>$ 的“脉动流体”和只具有“平均速度”的“平均运动流体”，更谈不上它们之间的作用、反作用和具体表示式 $\mathbf{F}_{\alpha\beta}$ 和 $-\mathbf{F}_{\alpha\beta}$ 及其“有效”部分．当然，文 [2] 的“有效”概念中，把力对平均动量变化率是否有贡献归结为是否做功也是十分荒谬的…….

姑且撇开这些不谈，就算 $-\mathbf{F}_{\alpha\beta}(\mathbf{r},t)$ 或其“有效”部分是能够取代雷诺应力项“瞬时式” $-\nabla\cdot\mathbf{u}_\alpha\mathbf{u}_\alpha$ 的“瞬时湍流力”，那么，对 α 和 β 的二重平均也没有理由不取同一系综 $\mathrm{B_R}$ 来进行．可是这样一来就得到 $<\overline{\mathbf{v}'}_{\alpha\beta}>=<\overline{p'}_{\alpha\beta}>=0$，从而 $-<\overline{\mathbf{F}}_{\alpha\beta}>=-<\overline{\mathbf{F}}_{\alpha\beta e}>=0$ 的不合理结果．这一困难本来是 $\mathbf{F}_{\alpha\beta}$ 的表示式 (2.8) 错误的明证．本应抛弃 (2.8) 及相应的概念而回到雷诺应力项的正确“瞬时式” $-\nabla\cdot\mathbf{u}_\alpha\mathbf{u}_\alpha$，然而文 [2] 的作者却一错再错，不顾问题的物理本质，只为求数学上去除 $-<\overline{\mathbf{F}}_{\alpha\beta e}>=0$，而随心所欲地提出了二次平均时须扣除 $\bar{s}$ 态的条件．

由此可见，文 [1, 2] 的 (有效) 湍流力假设和系综 b 的条件 (3.3) 和 (2.3) 完全是文 [1, 2] 作者物理概念混乱的产物，它们不能成立是很自然的了．

3．即使姑且假定系综 b 存在，且 (有效) 湍流力假设也成立，文 [2] 的封闭手段也是不合理的．

湍流平均方程的封闭问题是湍流研究的老大难问题．文 [1, 2] 声称，侧偏系综平均方法“使未知相关量没有出现在二阶精度上”，从而在“二阶精度”上解决了这一难题．然而本文第二节第 4, 5 两点已清楚地表明，按照文 [2] 的侧偏系综平均方法，对湍流运动十分重要的二阶相关量照例是出现的，只是作者采取了不合理的封闭手段，即毫无根据地将它们抛弃或解除关联而已：

①“通用方程组”中的 (6)** 来自 (2.15)，而由于文 [2] 不合理的封闭手段，(2.15) 的右边比正确方程 (2.16) 的右边少了 Δ_1

$$\Delta_1=-<\overline{(\mathbf{v}'_{\alpha\beta}\cdot\nabla)\mathbf{v}'_{\alpha\beta}}>+2<(\overline{\mathbf{v}'}_{\alpha\beta}\cdot\nabla)\overline{\mathbf{v}'}_{\alpha\beta}>-2(<\overline{\mathbf{v}'}_{\alpha\beta}>\cdot\nabla)<\mathbf{v}'_{\alpha\beta}>$$

此式可化为

$$\Delta_1=\nabla\cdot\left[\frac{1}{\rho}\hat{\tau}_1-\frac{1}{\rho}\hat{\tau}_2-<\overline{\mathbf{v}'}_{\alpha\beta}><\overline{\mathbf{v}'}_{\alpha\beta}>\right] \tag{3.8}$$

式中 $\hat{\tau}_2$ 为新定义的“第二种雷诺应力张量”

$$\hat{\tau}_2=-\rho<\mathbf{u}_\beta\mathbf{u}_\beta>,\quad \mathbf{u}_\beta=\mathbf{V}_\beta-<\mathbf{V}_\beta> \tag{3.9}$$

(3.8) 右边方括号下各项均为文 [1, 2] 意义下的“二阶项”，文 [2] 将它们全忽略而仍断言能使来自 (2.15) 的 (6)** 保持“二阶精度”是毫无根据的． (10)** 也来自 (2.15)，所以“通用方程组”中的二个主要方程 (2.10)** 和 (6)**，其“二阶精度”显然毫无保证．

②“通用物理方程”包含 $\overline{\mathbf{V}}_\alpha$、$<\overline{\mathbf{V}}_\beta>$、$<\Omega_\beta>$、$\overline{P}_\alpha$、$<\overline{\mathbf{v}'}_{\alpha\beta}>$、$<\overline{\delta\mathbf{r}}_{\alpha\beta}>$、$<\overline{(\nabla\phi)}_{\alpha\beta}>$ 和 ν_e 等九个未知量，所以除 (10)**、(6)**、(11)** 和 (12)** 外，还包含 (3.1)、(2.18) 和文 [2] 实际上用到，但未明确列出的如下三个方程

$$<\overline{\mathbf{v}'}_{\alpha\beta}>=\nabla<\mathbf{V}_\beta>\cdot<\overline{\delta\mathbf{r}}_{\alpha\beta}> \tag{3.10}$$

$$< \overline{(\nabla'\phi)}_{\alpha\beta} >=< \overline{\mathbf{v}'}_{\alpha\beta} > -\frac{1}{2} < \mathbf{\Omega}_\beta > \times < \overline{\delta\mathbf{r}}_{\alpha\beta} > \tag{3.11}$$

$$< \mathbf{\Omega}_\beta >= \nabla\times < \mathbf{V}_\beta > \tag{3.12}$$

其中 (3.10)–(3.12) 由对 (11)* 取二重平均，并照文 [2] 的惯例，解除关联而得. 显然，毫无根据地解除关联是不允许的，这样做不能保证“二阶精度”1).

总括起来，文 [2] 的三项基本错误完全否定了“通用物理方程组”，从而否定了文 [1,2] 的整个理论.

本来对文 [1, 2] 的评论可以到此结束. 不过从物理概念、逻辑性和数学演算的规则性角度来看，文 [1, 2] 整个主线推理过程中的其它错误也很严重，因此有必要加以分析评论，这将在第四、五两节中进行.

四、“通用方程组”推导中的其它重要错误

为了清楚地说明，除去三项基本错误外，通用方程组的推导中其它错误是何等的严重，在本节以下的讨论中，姑且假定三项基本错误并不存在，即假定存在系综 b，使条件 (2.3)、(3.2) 和 (3.3) 满足，假定扣除了 $< \overline{\mathbf{F}}_{\alpha\beta} >$ 的“无功”部分所得出的 $< \overline{\mathbf{F}}_{\alpha\beta e} >$，其相反量 $- < \overline{\mathbf{F}}_{\alpha\beta e} >$ 可以取代 $\mathbf{R}_1$，并且假定封闭手段是合法的，这样来划清不同阶段错误的界线.

1. 所谓的“高阶精度”

文 [2] 认为方程 (6)**(与 (2.15) 式只有系数 ν_e 和 ν_L 的差别) 的精度还可以提高，只需令

$$\overline{\mathbf{v}'}_{\alpha\beta} =< \overline{\mathbf{v}'_{\alpha\beta}} > -\overline{\mathbf{v}''}_{\alpha\beta} \tag{4.1}$$

并将它代入 (5a)**，便得关于 $< \overline{\mathbf{v}'}_{\alpha\beta} >$ 和 $< \overline{\mathbf{v}''}_{\alpha\beta} >$ 的方程 (6a)** 和 (6b)**，由它们可求得 $< \overline{\mathbf{v}'}_{\alpha\beta} >$ 和 $< \overline{\mathbf{v}''}_{\alpha\beta} >$.

其实，对 (4.1) 两边求第二种平均得

$$< \overline{\mathbf{v}'}_{\alpha\beta} >=< \overline{\mathbf{v}'}_{\alpha\beta} > - < \overline{\mathbf{v}''}_{\alpha\beta} >$$

故

$$< \overline{\mathbf{v}''}_{\alpha\beta} >= 0$$

于是 (6a)** 就是 (6)**，而 (6b)** 纠正了推导错误后就成为 0=0. 所以文 [2] 的办法根本不能提高精度.

2. “涡粘系数”定义错误

文 [2] 为了使 (10)** 式中出现希望有的涡粘系数，对两个完全不可能时时处处指向同一方向的矢量求其“比”来定义涡粘系数 ν_T(见本文 (2.18) 式)，因此 ν_T 和 ν_e 是错误定义，(6)** 和 (10)** 中含 ν_e 的项也都无意义，从而“通用方程组”不成立.

1) 这一错误实际上是可以避免的：我们只要抛弃 (11)* 式，而把 $< \overline{\delta\mathbf{r}}_{\alpha\beta} >$ 和 $< \overline{(\nabla'\phi)}_{\alpha\beta} >$ 当作由 (3.10) 和 (3.11) 定义的整体符号，将 (3.10) 代入 (2.15) 的右边，然后 (7)** 和 (8)** 直接换成对应的二重平均公式，这样从 (7)** 和 (8)** 可直接得 (9)**，而不再出现不合法解除关联的多余错误 (本文的其余部分将在此约定下讨论). 尽管如此，上述第①点中的错误仍是本质的.

我们在下面的讨论中，自然只好把 ν_e 当作经验常数看待，并把 (2.18) 式不再计入"通用方程组"了.

3．文 [2] 在 (7)** 中采用了作者认为最为关键的处理方法之一，即 $<\overline{\mathbf{v}'}_{\alpha\beta}>$ 的分解式 (3.10) 和 (3.11). 然而 (3.10) 在 $\nabla<\mathbf{V}_\beta>$ 的退化点处并不成立. 因此即使承认"通用方程组"，它也不能适合于全流场.

本文下面的分析当然只好针对 $\nabla<\mathbf{V}_\beta>$ 的非退化区了.

4． $<\overline{\delta\mathbf{r}}_{\alpha\beta}>$ 显然与 $<\overline{\mathbf{v}'}_{\alpha\beta}>$ 一样地依赖于 $(\mathbf{r},t)$，然而文 [2] 在从 (7)** 到 (9)** 的推导中任意地令其对某些项为"局部常数"，这是又一明显错误的做法.

5．从 (7)** 化为 (9)** 时，文 [2] 将"平均力" $<\overline{\mathbf{F}}_{\alpha\beta}>$ 中与 $<\overline{\delta\mathbf{r}}_{\alpha\beta}>$ 正交的项弃去而得到"有效做功力"，理由是它们"只引起转动"，无"有效功". 事实上，$<\overline{\delta\mathbf{r}}_{\alpha\beta}>$ 只是 $<\overline{\mathbf{v}'}_{\alpha\beta}>$ 通过关系式 (3.10) 定义的一个函数，它根本不是流体元的实际位移，因此，说"平均力"中与 $<\overline{\delta\mathbf{r}}_{\alpha\beta}>$ 正交的项"只引起转动"和无"有效功"，这是显然错误的.

6．任意改动方程中的某些重要系数

(10)** 来自本文 (2.17) 式，后者并无"有效粘性系数" ν_e，是作者以平均量的所谓"自激正反馈"为由将 (2.17) 中的 ν_L 改为 ν_e. 这里就算真的存在什么"自激正反馈"现象，文 [3] 也犯了"因果倒置"的逻辑错误：作为"通用的"，"基本的"方程，应是方程决定有无自激正反. 而不是自激正反馈倒过来改了方程的形式. (6)** 右边第二项中的系数 ν_e，也是由 (2.15) 式中的 ν_L 任意更改而来.

7．人们不禁要问：文 [1, 2] 何以会出现如此繁多而又十分明显的概念和推导错误的呢？统观文 [1, 2] 可见，文章的作者期望导出一个封闭的，含有正负"色散项"和"涡粘系数"的平均方程. 这本是一种主观愿望，然而作者却自觉或不自觉地把它当作了判断概念和推理正误的一条额外标准. 追溯 (10)** 式中"有效粘性系数" ν_e 和"正负色散项"的不寻常来历最能说明此点：

上已指出，文 [2] 为了引进 ν_T，竟然用了明显不成立的定义式 (2.18). 可是当引进 ν_T 后，却又使原本在 (2.17) 中已出现过的，与正色散有关的项 $\nu_L\nabla^2(\overline{\mathbf{V}}_\alpha-<\overline{(\nabla'\phi)}_{\alpha\beta}>)$ 化为非色散项 $\nu_e\nabla^2\overline{\mathbf{V}}_\alpha$，怎么办？于是作者不顾逻辑地找了一个"自激正反馈"的理由，在 (2.17) 式中将所有的 ν_L 直接改为 ν_e，并强让正色散项不变才得出 (10)** 式.

所谓的"负色散项" (即 (10)** 最末一项)

$$\frac{\nu_e}{2}[\nabla(<\overline{\delta\mathbf{r}}_{\alpha\beta}>\cdot\nabla)]\times<\mathbf{\Omega}_\beta> \tag{4.2}$$

其引进的方式也很特殊. 照文 [2] 的原则，在 (7)** 到 (9)** 的推导中，$<\overline{\delta\mathbf{r}}_{\alpha\beta}>$ 应

视为“局部常数”，故 (8)** 原本应为零

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{I}-\mathrm{II})\cdot<\overline{\delta\mathbf{r}}_{\alpha\beta}> &= \big[(<\overline{\delta\mathbf{r}}_{\alpha\beta}>\cdot\nabla)(\nabla\times<\mathbf{\Omega}_\beta>) \\
&\quad -\nabla\times(<\overline{\delta\mathbf{r}}_{\alpha\beta}>\cdot\nabla)<\mathbf{\Omega}_\beta>\big]\cdot<\overline{\delta\mathbf{r}}_{\alpha\beta}> \\
&= \big[(<\overline{\delta\mathbf{r}}_{\alpha\beta}>\cdot\nabla)(\nabla\times<\mathbf{\Omega}_\beta>) \\
&\quad -(<\overline{\delta\mathbf{r}}_{\alpha\beta}>\cdot\nabla)(\nabla\times<\mathbf{\Omega}_\beta>\big]\cdot<\overline{\delta\mathbf{r}}_{\alpha\beta}> \\
&= 0
\end{aligned}
$$

因此 (9)** 式右边第三项以及 (10)** 式右边最后一项，即上述“负色散项”根本就不出现．怎么办？文 [2] 破例将 $(\mathrm{I}-\mathrm{II})\cdot<\overline{\delta\mathbf{r}}_{\alpha\beta}>$ 中能导致“负色散项”的那二项 (即 (8)** 中的二项) 中的 $<\overline{\delta\mathbf{r}_{\alpha\beta}}>$ 不视为“局部常数”即可．现在回过头来看，在 $(\mathrm{I}-\mathrm{II})\cdot<\overline{\delta\mathbf{r}}_{\alpha\beta}>$ 的其余诸项中， $<\overline{\delta\mathbf{r}}_{\alpha\beta}>$ 之被视为“局部常数”，盖因否则便导致作者所不希望有的项．这里作者的自由意志赋予了 $<\overline{\delta\mathbf{r}}_{\alpha\beta}>$ 以可塑性 —— 这正是文 [2] 引进变量 $\delta\mathbf{r}_{\alpha\beta}$ 的目的之所在．

不过必须指出， (4.2) 来自 (8)**．分析 (8)** 可知，按定义， (4.2) 中第一个算子 ∇ 只作用于算子 $(<\overline{\delta\mathbf{r}}_{\alpha\beta}>\cdot\nabla)$ 的系数，而不作用于方括号外的 $<\mathbf{\Omega}_\beta>$，所以 (4.2) 根本不像文 [2]§7 所强调的含有速度的三阶空间偏导数，也就谈不上是什么“负色散项”了．当然，如果文 [2] 的作者认识到此点，他大概也就不会破例让 (8)** 两项中的 $<\overline{\delta\mathbf{r}}_{\alpha\beta}>$ 不是“局部常数”了．

五、一维规范方程和转捩判据的错误

1．由于含有虚假变量的通用方程组本身不成立，文 [2] 在压力均匀条件下从其中的 (10)** 作一维“简化”而得的“规范方程”

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}-\nu_e\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \qquad (23)^{**}$$

也就不成立，并且变量也是虚假的，从而文 [2] 在 (23)** 基础上的一切分析均不成立，例如，文 [2] 认为 (23)** 表明了湍流中并存有“色散”和“耗散”，这种论证当然不成立．

为了划清文 [2] 各阶段错误的界线，下面我们暂且假定删去 (2.18) 式并取 ν_e 为“经验系数”的“通用方程组”在全流场成立．

2．本来，文 [2] 所谓的“一维简化”应指在一维条件下，从三维“通用方程组”推导出一维方程组．然而 (23)** 的导出存在量级取舍上的明显混乱．姑且撇开这些不谈，在一维情况下， $\overline{\mathbf{V}}_\alpha$ 一般仍应有三个分量，只是它们与 y,z 无关而已

$$\overline{\mathbf{V}}_\alpha(x,t)=(u(x,t),v(x,t),w(x,t))$$

即使进一步假定 $v=w=0$，在压力均匀条件下一维方程组也不是单一方程 (23)**，而是 (23)** 和不可压条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{5.1}$$

的联立. 它显然有唯一解

$$u(x,t)=\text{const} \tag{5.2}$$

文 [2] 离开方程 (5.1)，讨论单一方程 (23)** 的非常数解 (违反条件 (5.2)) 的分叉问题是没有实际意义的.

3．退一步讲，就算文 [2] 的“一维简化”是指在一维条件下挑选 (10)** 的某些项直接构成 (23)**，看它是否能描述湍流的一些典型现象，那么其母式 (10)** 在 $<\overline{\delta\mathbf{r}}_{\alpha\beta}>\neq 0$ 的情况下是平均运动方程，因此 (23)** 在对应的条件 $\beta=\nu\delta x\neq 0$ 下也是平均运动方程. 所以文 [2] 试图在 β 非零 (文 [2] 已令 $G_e=UL^2/\beta$，故 $\beta\neq 0$) 条件下用 (23)** 来研究层流向湍流的转捩特性，并确定转捩条件，这样做从概念上就是完全错误的.

4．撇开上述错误不谈，仅就单一方程 (23)** 的稳定性讨论而言，文 [2] 的所谓“局部常系数处理”也是十分错误的：

文 [2] 令 $U(x)$ 为 (24)**（(23)** 的无量纲形式）的定常解，$u'(x,t)$ 为扰动解，它满足线性化扰动方程

$$u'_t+u'U_x+Uu'_x-(1/Re)u'_{xx}+(1/Ge)u'_{xxx}=0 \tag{25**}$$

其中 Re 和 Ge 为无量纲常数.

文 [2] 强调 $U(x)$ 随 x 而变化，但可将 $U(x)$ 和 U_x 视为“局部近似常数”，于是令 c_r,c_i 和 m 为实数，$F(x)$ 为实函数，并令

$$u'=F(x)e^{im(x-ct)},\quad c=c_r+ic_i \tag{27**}$$

将此式代入 (25)**，两边同乘以 $e^{-im(x-ct)}$，然后只保留所得方程的虚部

$$\frac{3}{Ge}F_{xx}-\frac{2}{Re}F_x+(U(x)-c_r-\frac{m^2}{Ge})F=0 \tag{28**}$$

接着，把 (28)** 当作常系数线性常微分方程求其“特征根”，得到指数形式的“通解”

$$\begin{aligned}F=&C_1\exp\left\{\left[\frac{1}{3}\frac{Ge}{Re}+\sqrt{\frac{1}{9}(\frac{Ge}{Re})^2+\frac{m^3}{3}-(U(x)-c_r)\frac{Ge}{3}}\right]x\right\}\\&+C_2\exp\left\{\left[\frac{1}{3}\frac{Ge}{Re}-\sqrt{\frac{1}{9}(\frac{Ge}{Re})^2+\frac{m^3}{3}-(U(x)-c_r)\frac{Ge}{3}}\right]x\right\}\end{aligned} \tag{29**}$$

对 m 取 0 和正整数，得出 u' 的“通解”，把它的发散性说成是“时空耦合不稳定性”，并据此给出所谓的“转捩判据”.

本来，虚部方程 (28)** 应与实部方程

$$\frac{F_{xxx}}{Ge}-\frac{F_{xx}}{Re}+\left(U-\frac{3m^2}{Ge}\right)F_x+\left(\frac{m^2}{Re}+U_x+mc_i\right)F=0 \tag{5.3}$$

联立，然而文 [2] 大约为了解决方程数多于未知函数数的困难而抛弃了 (5.3)，从而丧失了前后方程的等价性；显然，U 和 U_x 为“局部近似常数”，甚至严格常数，都不能成为抛弃 (5.3) 的理由. 因此即使撇开把 (29)** 作为 (28)** 的通解等等错误不谈，文 [2] 后面的分析也是完全无意义的.

5. 总括起来，按照文 [2] 的体系，规范方程 (23)** 是关于虚假平均量的错误方程，不能将它混同未平均的真实瞬时量方程来讨论转捩等湍流特性. 文 [2] 的讨论，从物理概念到数学处理都是错误的.

六、结　论

文 [1, 2] 提出的基本假设、进行的理论推导和得到的结果“湍流通用物理方程”及其一维简化形式（即所谓的“湍流规范方程”），以及在此基础上对湍流特性所作的一切分析都是错误的. 具体地：

1. 文 [2] 定义的第二种平均（即“二次平均”）所用系综 b 并不存在，从而第二种平均量和二重平均量纯属与实验毫无联系的虚假变量.

2. 文 [1, 2] 在错误的物理概念和根本不存在的那个二重平均基础上，对均匀不可压湍流作出的湍流力假设和有效湍流力假设均不成立.

3. 文 [1, 2] 采用的封闭手段，即不加论证地扔掉对湍流运动十分关键的关联项（或用对应的平均积来代替）是不合理的.

4. 文 [1, 2] 以错误的二重平均概念和（有效）湍流力假设为基础，并借助不合理的“封闭手段”而“导出”的“湍流通用物理方程”及其一维简化形式，即“规范方程”当然地不成立，甚至其中的主要变元 $<\overline{\mathbf{v}'}_{\alpha\beta}>$ 和 $<\overline{p'}_{\alpha\beta}>$ 等都属虚假变量，更谈不上方程具有什么“二阶精度”和通用性了. 因此，文 [1, 2] 从这些方程出发对湍流特性进行的一切分析都失去依据，从而没有意义.

5. 由于不遵守基本的运算规则和推理法则，并脱离了基本的物理概念，文中还存在大量不应有的其它错误，如：不管是否 $\nabla<\mathbf{V}_\alpha>$ 的退化集，一律采用只对非退化集才成立的“脉动速度”分解式；把函数 $<\overline{\delta\mathbf{r}}_{\alpha\beta}>$ 混同流体元的实际位移；随心所欲地视或不视 $\overline{\delta\mathbf{r}}_{\alpha\beta}$ 为“局部常数”，这样来保留希望有的项，排除不希望有的项；用两个不可能总在一个方向上的矢量函数之“比”来定义“涡粘系数”；随意将方程中的 ν_L 改为所谓的“有效粘性系数” ν_e；导出一维“规范方程”时，量级取舍上的明显混乱和不可压条件的随意抛弃；用平均量的方程来讨论湍流的“转捩问题”；讨论“规范方程”解的稳定性时，不保持前后方程的等价性；对变系数方程，随意提出不合理的“局部常系数”处理方法等等.

6. 可压缩情况中的错误就可想而知，无须详加分析了.

由上可见，文 [1, 2] 给出的“湍流通用物理方程”是理论上站不住脚，而实践中也无法设定初条件以进行计算的错误的形式方程组，它是对当今湍流认识水平的一个倒退，哪里还谈得上什么“使寻找湍流通用方程的历史使命得以完成”呢？最近二十多年来世界各国对混沌理论的研究启示我们，湍流是流体的宏观混沌，是 N-S

方程内在随机性的表现，我们只有从研究湍流的混沌特性入手，才有可能完成认识湍流的历史使命！

参 考 文 献

[1] 高歌，湍流的通用物理方程，航空动力学报，1992, 7，(3)
[2] 高歌，湍流通用物理方程的推导及讨论，航空动力学报，1992, 7，(4)

COMMENTS ON TWO PAPERS CONCERNING THE UNIVERSAL PHYSICAL EQUATION OF TURBULENCE AND ITS CANONICAL FORM

Zheng Zhemin Zhuang Fenggan Zhang Hanxin
Zhu Ruzeng Li Jiachun Huang Yongnian Lin Zhenbin
(*Laboratory for Non-Linear Mechanics of Continuous Media,*
Institute of Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, *China*)

Abstract In this paper, the theory proposed in two papers of Gao Ge's entitled "The universal physical equation of turbulence" and "The derivation of the universal physical equation of turbulence and relevant discussion" is analysed systematically, particular attention being paid to the part for incompressible turbulence, a representative of Gao Ge's theory. It is shown that the ensemble for the second average in those papers does not exist, both the turbulence-force hypothesis and effective-turbulence-force hypothesis are incorrect, and the methods to close the equations are unjustifiable. Therefore the resulting set of universal physical equations of turbulence and its simplified form called "Canonical Equation" are both untenable, and then all the analyses of the turbulence characteristics made in the papers lose their bases. In addition, there are a great number of other mistakes, which ought not to have appeared, in those papers.

Key words Gao Ge, turbulence, universal equation, double average, turbulence froce, closure, canonical equation