

分区 Lagrangian 涡方法及瞬时起动 圆柱初期流动的模拟*

孙茂 刘晶昌 吴礼义
(北京航空航天大学, 北京 100083)

摘要 本文提出一种分区 Lagrangian 涡方法: 将附着流动和分离流动分开处理, 在附着区解边界层方程, 只在分离区用涡方法解 N-S 方程。由于将尺度不同的区域分开了, 求解分离区流动的涡方法中, 每一时间步上物面引出的涡数在较小程度上依赖于 Re 数。这样, 求解高 Re 数流动时, 流场内的涡数, 因而计算机内存和时间得以大大减小。用该方法计算了瞬时起动圆柱的初期流动, 与实验结果比较相符很好。

关键词 Lagrangian 涡方法, 分区处理, 分离流

一、引言

瞬时起动圆柱的初期流动包含了许多有趣的流体力学问题。如非定常分离, 旋涡的形成, 涡与涡的干扰, 流动的稳定性等等。由于其基本意义, 这种流动已成为分离流研究中的一个典型性问题。文献[1]对这种流动作了系统的实验研究。揭示了流动初期发展中流动的分离, 分离剪切层形成旋涡, 旋涡诱导产生二次涡, 二次涡与主涡干扰及流动的失稳等复杂流动现象 ($Re = 40 \sim 10^4$)。该文提供的数值和图片, 已成为检验理论和数值计算的标准。

对该问题的 N-S 方程数值解近来得到很大的发展。有了许多基于有限差分的解, 如文献[2]等。文献[2]用二阶和四阶精度的差分格式分别解涡量方程和流函数方程, 正确地模拟了圆柱起动初期的复杂流动 ($Re = 3000, 9500$), 与实验^[1]相符很好。对于更高 Re 数的情形, 为了计算的稳定性, 一般要引入上风格式, 从而降低解的精度。Lagrangian 涡方法(下称涡方法)具有高 Re 数下仍稳定的优点。其将涡量方程分裂为对流部分和扩散部分, 将涡量场用若干点涡代替。用随机步模拟涡扩散, 用涡格法 (Vortex-in-cell) 计算涡对流。每一时间步上在物面引入若干点涡来模拟物面上产生的涡面 (满足不滑移条件)。自 Chorin^[3] (1973) 提出后, 该方法得到广泛深入的研究^[4,5]。文献[4]用该方法计算了瞬时起动圆柱的初期流动, 成功地算出了流动分离, 分离涡, 二次涡, 涡与涡的干扰等复杂流动现象。计算结果与文献[2]的差分法计算结果和文献[1]的实验结果吻合很好。文献[4]的数值实验表明, 决定每一时间步在物面上引入点涡数大小的主要因素之一是

本文 1990 年 5 月 20 日收到, 1991 年 3 月 9 日收到修改稿。

* 本文为霍英东教育基金资助课题的部分工作。

Re 数. Re 数增大, 该涡数增大, 因而在用涡方法解高 Re 数流动时, 随着时间的增加, 流场中的涡数目会很快增得很大, 需要很大的计算机内存和时间.

本文提出一种分区涡方法. 高 Re 数下具有大尺度分离的流动, 分离点上游 (附着区) 的涡量限于壁面附近的薄层内, 其尺度为 $O(Re^{-1/2})$, 而分离区的尺度为 $O(1)$. 在整个流场内解 N-S 方程, 难于同时顾及这两个尺度. 而且在附着区内解 N-S 方程是没有必要的, 此处边界层理论是适用的. 我们的想法是: 将不同尺度的区域分别处理. 在分离区用涡方法解 N-S 方程. 因为此区域的尺度为 $O(1)$, 故每一时间步上引入的涡数可以在较小程度上依赖于 Re 数. 在附着区用涡方法求解边界层方程. 这样, 求解高 Re 数流动时, 流场内涡的数目可以大大减小, 从而节省大量计算机时和内存. 用以上方法计算了瞬时起动圆柱的初期流动.

二、方 法

1. 基本方程和定解条件

考虑绕圆柱(半径为 a)的不可压缩流动(图 1). 来流速度为 U_∞ , 运动粘性系数为 ν . N-S 方程的涡量-流函数形式为:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \omega = \frac{2}{Re} \nabla^2 \omega \quad (1)$$

$$\nabla^2 \psi = -\omega \quad (2)$$

$$\mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} = \psi_x \mathbf{i} - \psi_y \mathbf{j} \quad (3)$$

其中 $\omega = \omega^* a / U_\infty$, $t = t^* U_\infty / a$, $\psi = \psi^* / a U_\infty$, $Re = \frac{2aU_\infty}{\nu}$, $u = u^* / U_\infty$, $r = r^* / a$, 等

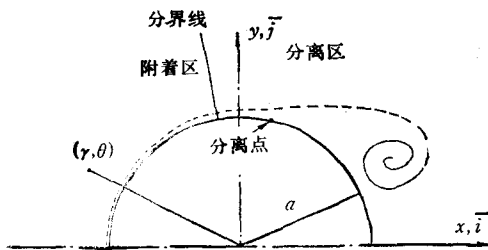


图 1 流场示意图

等(这里“*”表示相应的有量纲变量).

圆柱的初期流动是上下对称的. 边界状况和初始状况为: 1) 物面无滑移; 2) 无穷远处渐近于直匀流; 3) $t = 0$ 时, 流动为绕圆柱的位流. 有以下定解条件:

$$t \geq 0, \quad \begin{cases} r = 1, 0 \leq \theta \leq \pi: \psi = 0, \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} & (4a) \\ 1 \leq r < \infty, \theta = 0, \pi: \psi = 0, \omega = 0 & (4b) \\ r \rightarrow \infty, 0 \leq \theta \leq \pi: \psi \rightarrow r \sin \theta, \omega \rightarrow 0 & (4c) \end{cases}$$

$$t = 0, 1 < r < \infty, 0 \leq \theta \leq \pi: \psi = (r - 1/r) \sin \theta \quad (4d)$$

2. 数值方法

将流场分为分离区和附着区, 分界线取于分离点上游某处(图 1). 下面分别介绍此二区域内方程(1-4)的求解过程.

1) 分离区内涡量方程的求解 涡方法将方程(1)分裂为两部分

$$\left[\frac{\partial \omega}{\partial t} \right]_1 = -\mathbf{V} \cdot \nabla \omega \quad (6)$$

$$\left[\frac{\partial \omega}{\partial t} \right]_2 = \frac{2}{Re} \nabla^2 \omega \quad (7)$$

并将涡量场离散为点涡. 设 $\mathbf{r}_i^*(i = 1, 2, \dots, L, L$ 为流场中涡的总数)为第 i 个涡在 $t =$

t_n 时刻的位置. 由式(6), 依二阶龙格-库塔法, 该点涡在 $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ 时刻的位置为

$$\mathbf{r}_i^{n+1} = \mathbf{r}_i^n + \frac{1}{2} [\mathbf{V}(\mathbf{r}_i^n, t_n) + \mathbf{V}(\mathbf{r}_i^n + \mathbf{d}_i, t_{n+1})] \cdot \Delta t \quad (8)$$

其中 $\mathbf{d}_i = \mathbf{V}(\mathbf{r}_i^n, t_n) \cdot \Delta t$, \mathbf{V} 的确定见下文. 方程(7)的满足是通过每一时间步上给每个点涡加上符合高斯分布的随机数, 即在式(8)右边加上 $(\xi_i \mathbf{i} + \eta_i \mathbf{j})$. 这里 $\xi_i, \eta_i (i = 1, 2, \dots, L)$ 为 $2L$ 个随机数, 其均值为零, 方差为 $4\Delta t / Re^{[4,5]}$. 若某点涡扩散到物体内部, 则将其反射到流场中镜像位置^[3,4]. 以上涡量方程的分裂法的收敛率正比于 $Re^{-1}\Delta t^{[4,5]}$. Re 数大时, $Re^{-1}\Delta t$ 很小, 以上方法的精度取决于求解方程(6)的精度(随机步方法得式(7)的精确解), 即在时间上为二阶精度^[4].

2) 附着区内涡量方程的求解 附着区内边界层理论适用. 式(1)简化为边界层方程. 用文献[6]的方法求解. 需要知道边界层外缘(图2)上的速度分布, 其确定见下文.

3) 流函数方程的求解 流场的速度由方程(2)的解给出. 将其写于 (r, θ) 中, 并引入变换:

$r = F(e^{B\xi} - 1) + 1, \theta = \eta$. 方程(2)变为

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + a(\xi) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + b(\xi) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} = -\omega r^2 \quad (9)$$

由式(4)和式(5), 边界条件为:

$$\phi(r=1, \eta) = \phi(r, 0) = \phi(r, \pi) = 0 \quad (10)$$

$$\phi(r_0, \eta) = (r_0 - 1/r_0) \sin \eta \quad (11)$$

r_0 为外边界的径向位置. 物理平面的半环形域(图2)变为 (ξ, η) 平面的矩形域. 本文在 (ξ, η) 中的均匀网格上用快速付立叶变换解方程(9)~(11).

求解方程(9), 要知道网格点上的涡量. 在分离区, 将点涡按网格法^[4,5]分布于网格点上. 在附着区, 各网格点处的涡量可直接由边界层方程的解得到.

4) 物面上涡的产生及分界线上涡的处理

分离区内物面上的不滑移条件是通过每一时间步上在物面产生涡来满足的^[3,4]. 由流函数方程, 式(11), 可用流函数来确定边界上每个网格点处的涡量. 然后将每个网格点处的涡量分裂为若干个涡. 文献[4]的研究表明, 边界上每个网格点处的涡量分裂的涡数应随 Re 数的增加而增加. 本文只在分离区用涡方法. 该区域尺度为 $O(1)$. 可望每一时间步上产生的新涡数在较小程度上依赖于 Re 数.

在附着区与分离区分界线处, 将边界层方程解得的涡量分裂为点涡, 然后按当地速度流入分离区.

3. 计算过程

(1) 圆柱起动时刻 ($t = t_1 = 0$), 绕圆柱流动为位流. 流函数方程解已知, 附着区边界层外缘处速度分布已知;

(2) $t = t_1$ 时刻, 计算边界层流动($t = 0$ 时, 边界层的解为 Stokes 第一问题的解,

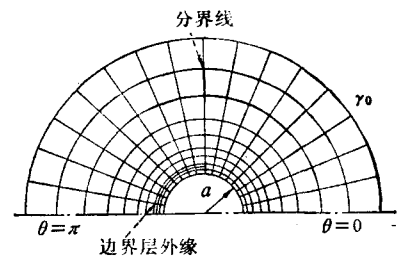


图2 物理平面中的网格

该解可作为下一时间步求解边界层方程的初值)。用此时刻的流函数数值求出物面上每个网格点的涡量,分裂为若干个涡;

(3) 推进到 $t_2 = t_1 + \Delta t$, 按涡格法算出每个点涡(包括从边界层流入分离区的涡)的位移的预估值;

(4) 解流函数方程;用涡格法算出每个点涡的位移的校正值。给每个点涡的位移加上一个随机步(至此,每个点涡在 t_2 时的位置确定了);

(5) 解流函数方程,得 t_2 时的流函数,算出边界层外缘处速度分布。在 t_2 至 $t_3 (= t_2 + \Delta t)$ 之间重复(2)~(5)的计算,并继续下去。

三、结果与讨论

用上述方法计算了 $Re = 3000, 9500$ 的情形。求解流函数方程的网格数为 64×64 。参考文献[4]的数值实验结果, Δt 取为 0.02, r_0 取为 20。分离区与附着区分界线位于 $\theta = 90^\circ$ 处(起动流动中,分离点位于该点的下游)。与文献[4]的计算结果及文献[1]的实验作了比较。

图 3 和图 4 为 $Re = 3000$ 的结果。计算中,每一时间步物面上每个网格点处产生的涡量分裂的点涡数 $n_v = 3$ (文献[4]指出,

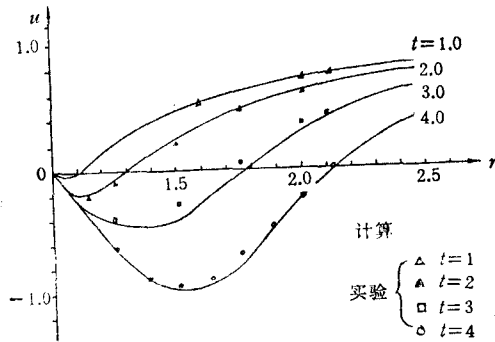


图 3 圆柱后对称线上径向速度分布. $Re = 3000$ 。

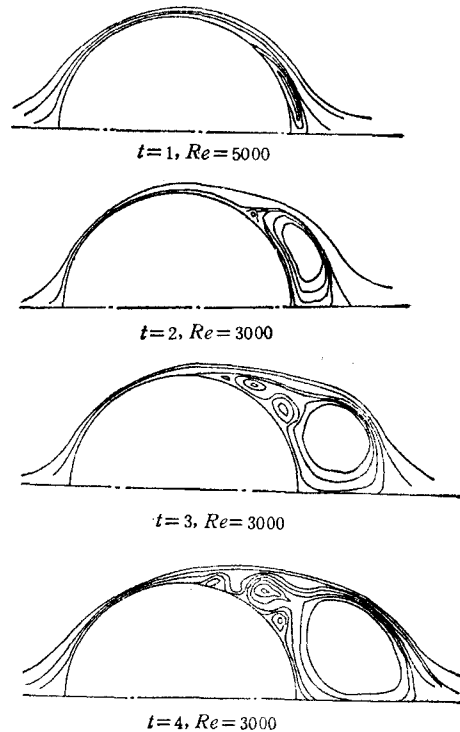


图 4 流动结构随时间的变化. $Re = 3000$

由于突然起动,在 $t = 0$ 时刻,壁面涡量甚大,因而 $t = 0$ 时间步的 n_v 应较以后时间步的为大。参考该文的数值实验结果,本文所有计算中第一个时间步的 n_v 取为 20)。图 3 为圆柱后对称线上的速度分布。计算到 $t = 4$, 结果与实验十分吻合。文献[4]的计算,需要 $n_v = 5$, 才能与实验吻合。由于本文的方法只在分离区用涡方法,且 n_v 较小, $t = 4$ 时,流场内涡总数为 27130。而文献[4]的计算在此时的涡总数为 65100。约为本文的 2.5 倍。图 4 为流动结构随时间的变化。 t 较小时 ($t = 1$), 圆柱后部物面附近出现一回流区。随时间增大 ($t = 2$), 该回流区发展为一旋涡,即主涡。主涡导致壁面附近的倒流分

离, 形成二次涡。约在 $t = 3$ 时, 该二次涡从主涡中分裂出另一二次涡, 出现文献[1]的实验中观察到的“ α 结构”。以上流动结构随时间的变化与文献[1]的流场显示图片吻合很好。

图 5 为 $Re = 9500$ 时圆柱后对称线上的速度分布。计算中 $n_p = 4$ 。计算与实验十分吻合。文献[4]的计算, 需要 $n_p = 6$, 计算结果才令人满意。所计算的流动结构随时间的变化与流场显示照片[1]吻合也很好。 t 约为 2 时, 出现了实验中观察到的“ β 结构”。

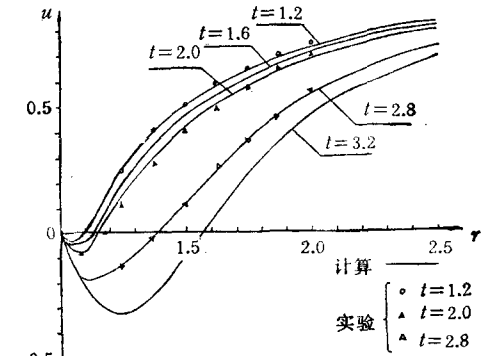


图 5 圆柱后对称线上径向速度分布, $Re = 9500$ 。

四、结 论

由于将尺度不同的区域分开了, 求解分离区流动的涡方法中, 每一时间步上物面产生的涡数在较小程度上依赖于 Re 数。附着区流动是用边界层方程求解。这样, 在求解高 Re 数流动时, 流场内的涡数得以大大减少。Lagrangian 涡方法与有限差分法比较主要在高 Re 数下有优越性, 本文提出的方法就显得很有意义。

参 考 文 献

- [1] Bouard R and Coutanceau M. *J. Fluid Mech.*, 101(1980), 583—607.
- [2] Ta Phuoc Loc and Bouard R. *J. Fluid Mech.*, 106(1985), 93—117.
- [3] Chorin A. J. *J. Fluid Mech.*, 57(1973), 785—792.
- [4] Smith P A and Stansby P K. *J. Fluid Mech.*, 194(1988), 45—57.
- [5] Leonard A. J. *Comp. Phys.*, 37(1980), 289—309.
- [6] Cebeci T. *J. Comp. Phys.*, 31(1979), 153—172.

A ZONAL VORTEX METHOD AND IMPULSIVELY STARTED FLOW AROUND A CIRCULAR CYLINDER

Sun Mao, Liu Jingchang and Wu Liyi

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics Beijing, China)

Abstract In this paper, a zonal vortex method and its application to simulating the impulsively started flow of a circular cylinder are presented. This method treats the attached viscous flow region and the separated flow region separately. These two regions have length scales of $O(Re^{-1/2})$ and $O(1)$ respectively. The attached flow region is computed through solving boundary layer equations by finite difference method, which is fast and does not take large computer storage. Only the separated flow is computed by vortex method. Since the separated flow region has a length scale of $O(1)$, in the vortex method used for this region, the number of new vortices introduced at the surface of the body per time-step is relatively insensitive to the Reynolds number of the flow. For simulation of high Reynolds number flows with massive separation, the total number of vortices in the flow field, hence the computer-storage and computer-time is greatly reduced.

Key words Lagrangian vortex method, zonal approach, separated flows