

# 动脉局部狭窄时脉动流的有限元分析

罗小玉 匡震邦

(西安交通大学工程力学系, 西安 710049)

**摘要** 本文利用有限元方法研究动脉局部狭窄下的脉动流流场, 重点考查在50%与80%面积狭窄下的速度分布、压力分布、壁面剪应力分布及流动分离情况。几何形状及边界条件均模拟相应的脉动流实验模型。采用测得的随时间变化的速度分布作为入口端条件, 并利用罚函数和逆风格式等计算技巧得出了光滑的与实验基本相符的速度、压力波形。本文讨论了不同狭窄下速度、压力、壁面剪应力的分布形态, 给出了脉动流中狭窄处局部流动分离的间歇性变化规律, 并结合实验与临床应用进行了讨论。

**关键词** 动脉狭窄, 脉动流, 壁面剪应力, 流动分离, 有限元

## 一、引言

近二十年来, 血流动力学因素已被公认在动脉粥样硬化等动脉病变的发生发展过程中起着重要作用。由于在动脉粥样硬化导致的局部狭窄与血液的异常流动之间存在着一定的耦合关系, 因此出现狭窄后的血流动力学分析, 在生物力学研究中受到高度重视。

有限元方法用于模拟局部狭窄时的血流运动有其特殊的优越性。这种模拟便于参数的改变与控制, 能提供完整的速度、压力场以及与狭窄有关的其它流场信息。但是鉴于生理脉动流的高度复杂性, 数值模拟尚不能令医学和物理研究者满意。目前这方面大量的研究, 都是偏重于模型或在体实验<sup>[1,2,3]</sup>。实验研究易与临床结合, 但所测得的信息量少, 参数不好控制, 不容易洞察流场整体分布从而进行全面分析。

为扬长避短, 本文在相应模型动力实验的基础上, 利用有限元方法模拟与实验相仿的几何、边界的局部狭窄情况, 实验设施见文[4]。以实测的随时间和径向位置变化的速度分布作为狭窄管的入口条件, 分别计算50%和80%两种狭窄模型的流动情况。计算中假设狭窄呈轴对称、圆弧形, 其长度与管径相等。动脉模型取刚性直圆管, 管径  $D = 0.6$  cm, 管长  $11.5D$ 。文中重点分析了因局部狭窄引起的速度、压力、剪应力的变化, 特别是流动分离情况, 并结合实验及临床应用进行了讨论。

## 二、数值模拟

非定常不可压缩粘性流的控制方程可表为矢量形式:

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla) \mathbf{u}^* = \nabla p^* + \frac{1}{Re} (\nabla \cdot \nabla \mathbf{u}^*) \quad (1)$$

本文于1990年10月20日收到第一次稿, 于1991年8月26日收到修改稿。

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^* = 0 \tag{2}$$

其中,  $Re$  为雷诺数,  $\nabla$  为 Hamilton 算子,  $\mathbf{u}^*$  为速度矢量,  $p^*, t^*$  分别为压力和时间。星号表示各量均为无量纲量, 即将原物理变量  $\mathbf{u}, p, t, r, z$  转化为:

$$\mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{U_0}; p^* = \frac{p}{\rho U_0}; t^* = \frac{t U_0}{D}; r^* = \frac{r}{D}, z^* = \frac{z}{D}$$

这里,  $U_0$  为特征速度,  $D$  为管径,  $\rho$  为密度。

在狭窄区脉动流的数值求解中, 计算的稳定性是一个突出问题, 这是因为狭窄区的存在极易使流场数值解发生“空间涡漩”或伪震荡<sup>[5]</sup>。此时, 初边值的微小扰动都将引起流场下游随时间增长的剧烈波动, 对程度严重的狭窄, 甚至导致解的发散。针对这一问题, 本文采用两个措施: 一是引起相应的计算技巧, 提高解的稳定性; 二是对边界条件和网格划分进行一定处理。

首先对方程(1)(2)采用一致性罚函数法, 方程(2)成为:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^* = -\varepsilon p^* \tag{3}$$

这里  $\varepsilon$  是一小量, 可以证明, 当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时, 方程(1)(3)的解收敛于方程(1)(2)的真实解<sup>[6]</sup>。罚函数的主要优点在于减小变量个数, 节省机时。为提高解的稳定性, 本文采用逆风格式, 即借助于引入人工粘度  $K_{ii}^* = \frac{\Delta t^*}{2} u_i^* u_i^*$ , 以弥补因离散化导致的有效粘度的减小。此时, 方程(1)中  $1/Re$  项成为  $\frac{1}{Re'} = \frac{\mu}{U_0 D \rho} + K^*$ , 在极坐标下,

$$K^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{u_r^{*2} + u_z^{*2}}{2} \Delta t^* \end{bmatrix}$$

这样, 方程(1)成为:

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla) \mathbf{u}^* = \nabla p^* + \nabla \cdot \left\{ \frac{1}{Re'} \cdot \nabla \mathbf{u}^* \right\} = 0 \tag{4}$$

现在, 控制方程由方程(4)(3)表示。

采用九节点矩形元, 离散方程(3)(4), 应用 Galerkin 加权余值法, 并消去变量  $p$ , 可得有限元矩阵方程:

$$M \frac{d\mathbf{U}}{dt^*} + K(\mathbf{U}) = \mathbf{F} \tag{5}$$

其中  $\mathbf{U}$  是节点速度矢量,  $M$  为一致质量阵,  $K$  中包含非线性对流项、粘度项及消去变量  $p$

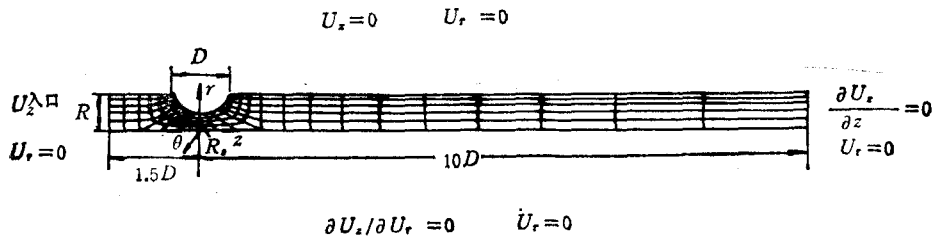


图 1 计算模型的有限元网格和边界条件

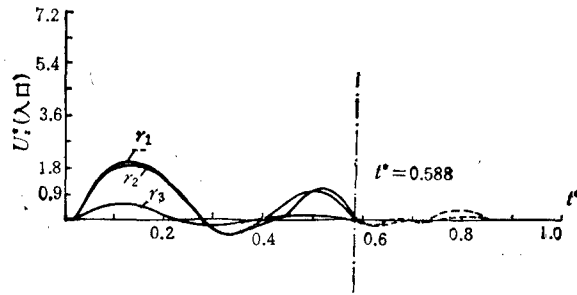


图 2 模拟实验测得的速度波形  
 $r_1 = 0$   $r_2 = 0.15D$   $r_3 = 0.45D$

引起的罚函数项,  $F$  则为广义力矩阵。方程(5)的推导及具体表达式见文<sup>[4]</sup>。

计算的有限元网格见图 1, 因为对称, 只取管的上半部分。由于速度、压力在近壁及狭窄处变化较大, 故该处网格划分较密。

计算的初始条件取为零, 即:

$$u_z^*(r, z)|_{t=0} = u_r^*(r, z)|_{t=0} = 0; \Delta p^*|_{t=0} = 0 \quad (6)$$

边界条件见图 1, 其中入口速度  $u_z^*(r, t)$  是实验测试的由 Doppler 信号转化来的速度分布<sup>[4]</sup>, 见图 2。为避免数值解的振荡, 排除实验信号中的干扰, 我们把实测的信号进行三次样条插值, 使其光滑化, 同时为节省计算时间, 只计算了前面两个主要波形, 即算到一个周期中的约 60%,  $t_{max}^* = 0.588$ 。

模型动力实验采用动力循环系统, 模拟人体股动脉生理状态下的脉动流, 输入信号由计算机控制。有关参数为: 心搏量 80ml, 最大心输出 5.6 l/min, 心率 70 (拍/分)。从而有脉动周期  $T = 0.857s$ , 试液粘度  $\mu = 0.036 Pa \cdot s$ , 密度  $\rho = 1050 kg/m^3$ , 实验测得的平均速度 (取为计算中的特征速度) 为 0.327m/s, 由此推出平均雷诺数  $Re = 561.8$ ,

Womersley 数  $\alpha = R \sqrt{\frac{\omega \rho}{\mu}} = 7.16$ 。

计算采用大型流体动力软件包 FIDAP, 在小巨型机 ELXSI 6400 上运行。计算 CPU 时间在 3000—3600 秒之间, 取决于狭窄程度。

### 三、计算结果与分析

#### 1. 速度

图 3(a, b) 分别是在 50% 和 80% 狭窄管下游  $z^* = 1.81$  处距轴心不同位置 ( $r_1, r_2, r_3$ ) 处的速度波形。作为对计算结果的验证, 我们在相应的实验中测出了 80% 狭窄管下游同样位置处的几个速度波形, 见图 4。比较图 3(b) 与图 4, 可以看出两者的趋势是基本一致的。当然也存在一些差异, 原因是: 1) 数值计算中采用了初始条件为零场的假设, 而实验中由于惯性作用, 不可能出现各点均匀为零的情形; 2) 计算中假设出口端径向速度  $u_r = 0$  (即管为无限长), 而真实管长是有限的; 3) 实验中采用 4 兆赫脉冲 Doppler 超声测速仪, 由于其分辨率较低, 使实测信号与真实速度之间有一定出入。但总的来说, 计算与实测结果是相当吻合的。

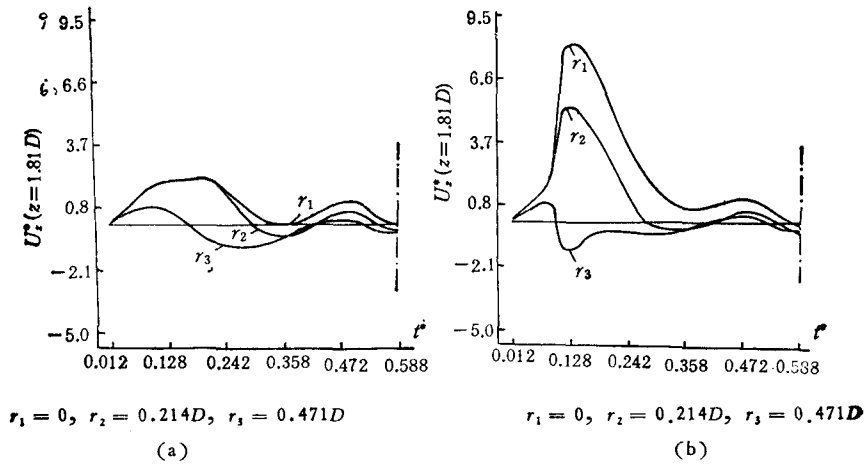


图 3 50% (a) 和 80% (b) 狭窄模型在下游  $z^* = 1.81$  处不同径向位置的计算速度波形

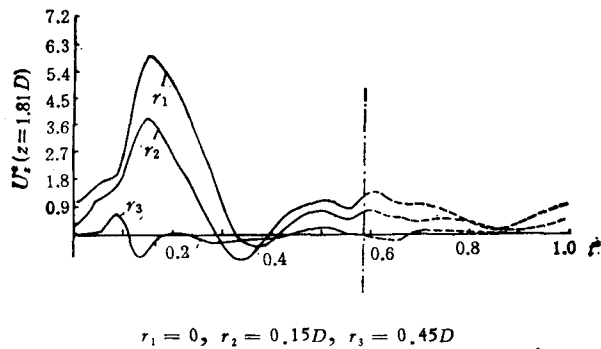


图 4 模拟实验测得的 80% 狭窄模型在下游  $z = 1.81D$  处不同径向位置的速度波形

50% 和 80% 狭窄管沿轴向的中心速度分布 ( $r^* = 0$ ) 表示在图 5(a,b), 其中数字 1—6 对应于一个周期中的不同时刻。由图 5 可见, 狭窄引起轴心速度剧增, 最大值达直管的 4.7 倍(80%)和 1.8 倍(50%)。显然, 狭窄程度的影响是明显的。结果还表明, 下游各截面速度分布变平, 且在收缩相出现局部回流(流动分离), 各点速度波形变陡变尖, 这一点也与实验和临床观察相符。

## 2. 压力

图 6 是直管(0%), 50% 和 80% 模型的压力降  $\Delta P^*$  (相对出口压力)随时间变化波形。图 7 则表示了在不同时刻各狭窄管压力降沿轴向的分布。

由图 6 见, 压力降波形随狭窄程度的增加而变化, 主要是峰值增大, 波峰拓宽, 且出现相位差。与直管相比, 狭窄引起压力降增大为 1.107 倍(50%); 和 1.683 倍(80%)。不过, 与定常流相比, 压力降的增加相对小得多, 后者在同样狭窄下压力降增大 1.25—2.04 (50%); 4.43—24.95(80%) ( $Re = 100—800$ )<sup>[4]</sup>, 可见脉动流下狭窄局部承受的压力程度比定常流要小。

图 7(a,b) 表明在收缩相, 压力降分布与定常流很相似, 且最大压力降在狭窄中心稍

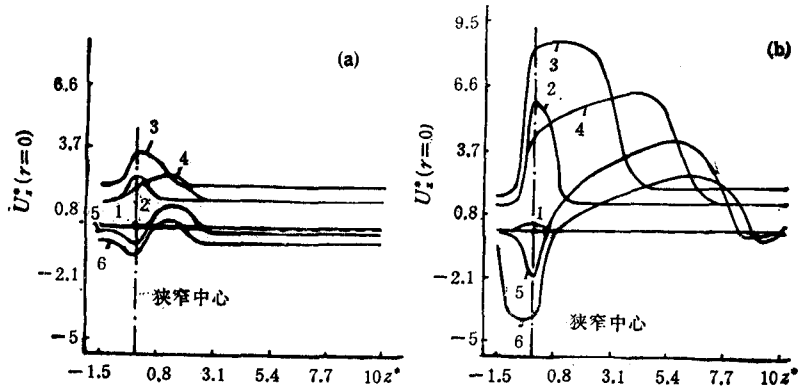


图 5 50% (a) 和 80% (b) 狭窄模型的中心速度分布,图中数字对应时刻为:  
 $t^* = 0.012, 0.07, 0.14, 0.21, 0.28, 0.35$   
 ( 1, 2, 3, 4, 5, 6)

偏下游处出现。但在舒张相,脉动流的狭窄局部压力降分布与定常流就显然不同了。

最大压力降与相位差可作为判别狭窄存在的两个指标,故从临床角度看有实际意义。遗憾的是,仅当狭窄相当严重时这两个指标的变化才比较明显。

### 3. 壁面剪应力

脉动流下壁面剪应力是时间的函数:

$$\tau_w^* = \frac{1}{Re'} \left( \frac{\partial u_r^*}{\partial z^*} + \frac{\partial u_z^*}{\partial r^*} \right) \quad (7)$$

图 8 (a, b) 是不同时刻各狭窄管的壁面剪应力分布。由图 8 可见,剪应力峰值几乎总在狭窄中心出现,方向随脉动流方向而改变。顺流时峰值出现位置略偏下游,逆流时反之,左右浮动范围不超过  $0.01D$ ,与定常流情形相仿。

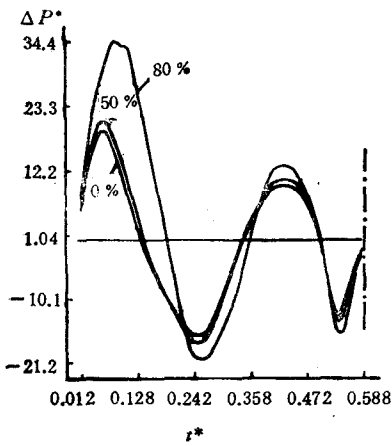


图 6 直管(0%), 50% 和 80% 狭窄模型的压力降波形

各狭窄管最大剪应力随时间的变化见图 9。显然壁面剪应力的大小随狭窄程度的变化很大。若记各管的最大剪应力分别为  $\tau_w^{*0}, \tau_w^{*50}, \tau_w^{*80}$ , 则它们之间存在关系:  $\tau_w^{*50} = 3.67 \tau_w^{*0}$ ;  $\tau_w^{*80} = 15.5 \tau_w^{*0}$ 。由此可见,这个指标作为狭窄程度的判据是比较理想的,它不仅反映出严重狭窄的变化,且对中、轻度狭窄也很敏感。从临床角度看,能及早预知后者的存在似更为重要。图 9 还表明剪应力曲线亦因狭窄的存在出现相位差。

上述结论 Ahmed 等人 1984 年在其模型实验中也已观察到<sup>[7]</sup>。他们利用激光 Doppler 超声测速仪对 75% 狭窄管进行测试,相应的参数与本文参数也比较接近:  $D = 7 \times 10^{-3} \text{m}$ ;  $Re$  (平均) = 600; Womersley 数  $\alpha = 7.5$ 。他们得到的最大壁面剪应力为  $\tau_w^{*80} = 12.33 \tau_w^{*0}$ , 这与本文的计算结果  $\tau_w^{*80} = 15.5 \tau_w^{*0}$  是一致的。同时,他们也观察到了剪应力曲线随狭窄程度的增大而出现的相位差增大现象。

考虑剪应力的原物理值,经换算得:

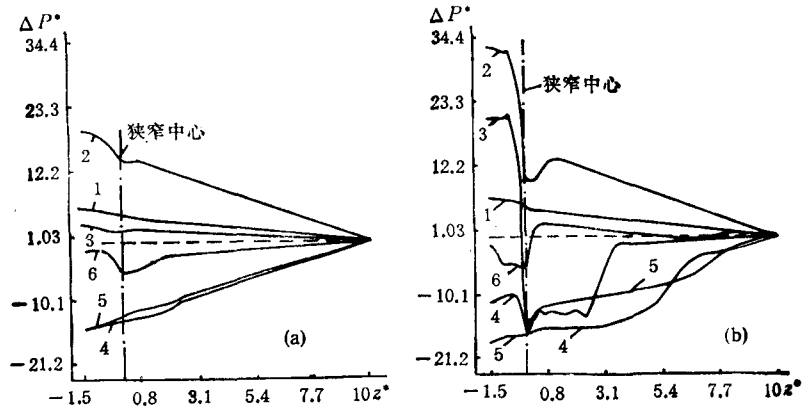


图 7 50% (a) 和 80% (b) 沿轴的压力降分布 图中的数字对应时刻为：  
 $t^* = 0.12, 0.07, 0.14, 0.21, 0.28, 0.35$

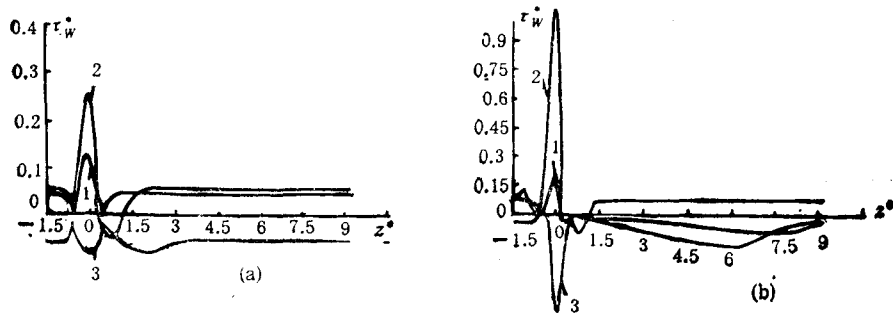


图 8 50% (a) 和 80% (b) 狭窄模型的壁面剪应力分布,图中数字对应时刻为  
 $t^* = 0.117, 0.235, 0.352$   
 ( 1, 2, 3 )

$$\tau_w^{80} = \rho U_0^2 \tau_w^{*80} = 37.456 \text{ Pa}; \quad \tau_w^{50} = \rho U_0^2 \tau_w^{*50} = 8.869 \text{ Pa}$$

这也与 Ahmed 等人的测量值  $\tau_w^{75} = 35 \text{ Pa}$  相当吻合。根据 Fry<sup>[8]</sup> 的实验观察,当  $\tau \geq 40 \text{ Pa}$  时管壁的内皮细胞会受到破坏。显然,80% 狭窄时的最大剪应力已接近这个临界值。Fry 的实验是在定常流下进行的,对脉动流,最大剪应力随时间改变幅值和方向(图 9),可以推测,此时内皮细胞的破坏临界值会进一步降低。

#### 4. 流动分离

当流动发生分离时,其分离点与再附点的剪应力会改变符号。利用这一特点,我们计算出分离点与再附点随时间变化的位置,见图 10(a, b)。图 10 中纵轴是从狭窄中心到下游的距离,实线表示分离点出现的位置,虚线是再附点出现的位置,阴影部分则为分离区长度的变化。

图 10 显示出流动分离的间歇性,对不同的狭窄程

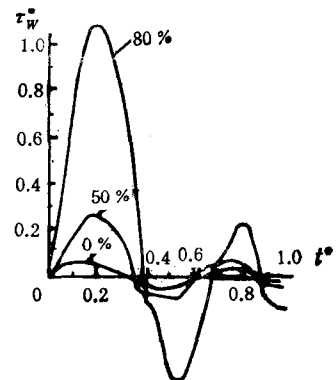


图 9 各狭窄模型的最大壁面剪应力波形

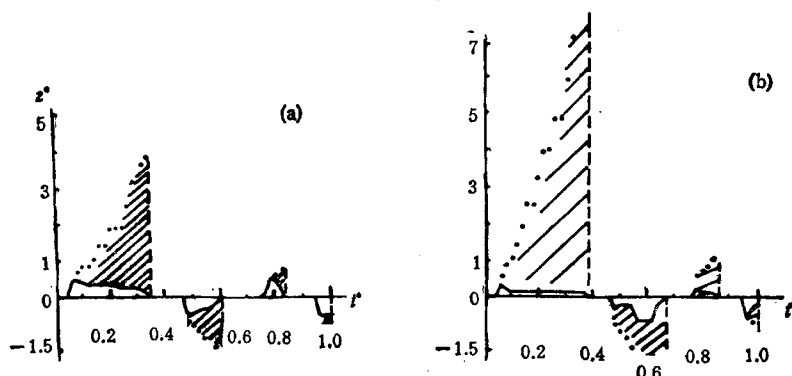


图 10 50% (a) 和 80% (b) 狭窄模型流动分离(实线)和再附点(虚线)随时间的变化曲线

度,分离长度与持续时间不同。这一点 Ahmed 等人也观察到了,他们得出结论:更严重的狭窄在脉动流下也不会导致永久分离区。数值模拟将这一特点表示得更为清楚直观。

观察图 10,发现当狭窄严重时,分离点向狭窄中心靠近,再附点则明显远离狭窄中心。分离区消失得相当突然,且在上下游两端均出现分离。Glagov 认为分离区导致斑块发生,即由于分离区液流缓慢、滞止逆向及旋涡形成,增加血细胞与管壁的接触,利于血栓形成和脂质进入管壁。若此观点成立,则图 10 表明肿块的增大应在狭窄两侧同时发生,而以下游的增长更为迅速。

#### 四、结论与讨论

本文利用有限元方法对动脉狭窄下的局部流场进行数值模拟,给出了 50% 和 80% 狭窄模型的局部速度、压力、壁面剪应力的波形分布及流动分离随时间的变化规律。分析中注意到与实验结果比较,并结合临床应用进行了讨论。

本文的主要结论是:速度、压力和壁面剪应力波形均随狭窄程度的增大发生变化,主要特征为:峰值上升,波形拓宽、出现相位差和流动分离。这些变化中尤以壁面剪应力对狭窄的反映最为敏感,故可作为良好的临床诊断判据。计算还表明,流动分离呈脉动性,在狭窄区两侧交替出现,根据 Glagov 的斑块生成观点,可推知肿块增长的方向向两侧扩展,但偏重于下游。再者,当狭窄程度为 80% 时,最大壁面剪应力十分接近 Fry 的内皮细胞破坏阈值,由于此剪应力是随时间脉动的,破坏阈值可能会进一步降低。

最后要指出,脉动流动脉狭窄的局部流场与定常流有很大不同,最主要的是各变量(速度、压力、剪应力)因狭窄引起的最大值比起定常流下(特征速度相等)的结果相对小一些,因而,狭窄局部流场的流动状态在脉动流条件下应为缓和,这一点对于临床分析是有用的。

本文所得上述结果与讨论均基于下述假设:1) 动脉为刚性管;2) 流动呈层流;3) 血液为牛顿流体。真实人体动脉血流情况是相当复杂的:管壁是粘弹性的;动脉狭窄严重时会出现湍流现象;且血液是一种非牛顿流体。

这些假设对所得结果的临床价值会有一些影响,不过应当于大局无碍,理由是:1) 动脉管壁发生粥样硬化后,局部刚度相对增大,作为刚性管看待有一定根据,而且有关弹性

管模型试验也表明, 狭窄管局部的管壁弹性对当地流场的作用相当小<sup>[3]</sup>; 2) 脉动流下狭窄局部下游在狭窄严重时会出现湍流斑, 但其持续时间较短, 且影响范围有限, 实验测试表明这种湍流斑并未引起剪应力的明显变化<sup>[7]</sup>, 所以, 层流假设下的结果大部分是成立的; 3) 血液的非牛顿性仅在低切变率时 ( $\dot{\gamma} = 10\text{s}^{-1}$ ) 的影响才比较显著, 一般情况下作为牛顿流体是合理的。

综上所述, 作为一种基本估计, 本文的结果是有意义的。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Gosling R G, Doppler ultrasound assessment of occlusive arterial disease, *The Practitioner*. 1978, 220: 599—609.
- [ 2 ] Young D F, Pressure drop across artificially induced stenoses in the femoral arteries of dogs, *Cir. Res.*, 1975, 36: 735—743 .
- [ 3 ] Shortland A P and Cochrane T. Doppler spectral waveform generation in vitro: an AID to diagnosis of vascular disease, *Ultrasound Med Biol.*, 1989, 15: 737—748.
- [ 4 ] 罗小玉, 动脉狭窄时的血流动力学研究, 西安交通大学博士学位论文: 1990.
- [ 5 ] Brooks, A N and Hughes T R. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations, *Comp. Meth. Appl. Mech. & Engng.*, 1982, 32: 199—257.
- [ 6 ] Temam R S. On the Theory and Numerical Analysis of the Navier-Stokes Equations, North-Holland, Amsterdam. 1977.
- [ 7 ] Ahmed S A, and Giddens D P Pulsatile poststenotic flow studies with laser Doppler anemometry, *J. Biomechanics*, 1984, 17: 695—705.
- [ 8 ] Fry D L, Acute vascular endothelial changes associated with increased blood velocity gradients, *Cir. Res.*, 1968 22: 165—172.
- [ 9 ] Glagov S and Zarins C K, Natural history of human atherosclerotic lesions: Changes in luminal configuration, *Noninvasive Techniques for Assessment of Atherosclerosis in Peripheral, Carotid and Coronary Arteries*, (Edited by Budinger, T. F., et. al.), Raven Press, New York 1982: 15—19.



## THE FINITE ELEMENT ANALYSIS OF PULSATILE FLOW PATTERNS ASSOCIATED WITH AN ARTERIAL STENOSIS

Luo Xiaoyu Kuang Zhenbang

(Department of Engineering Mech., Xian Jiaotong University, Xian, 710049)

**Abstract** Pulsatile flow patterns in rigid arterial models with stenosis (area constrictions) of 50% and 80% have been studied using the Finite Element Methods. Flow patterns of the constricted region have been investigated for a simulated physiological condition with an average Reynolds number of 561.8 and a Womersley number of 7.16. Velocity waveforms, axial pressure drop and wall shear stress distributions have been computed for each model and presented at several time steps. Flow separation zone near the stenosis was also studied. Results have been validated by comparing the recordings of Doppler velocimeter obtained in the *in vitro* experiments by the authors, and by other experimental work reported in the literature.

Results showed that due to the stenosis, 1) the peak values of velocity, pressure drop and wall shear stress increase; 2) waveforms of these three variables broaden and phase differences appear; 3) flow separations occur. It is noted that among the three variables, the wall shear stress is the most sensible indicator to the degree of stenosis. Results also showed that 4) pulsatile flow separation occurs at both sides of the stenosis in an "off and on" manner; and 5) the maximum wall shear stress of flow in 80% stenotic model is very close to the value of 40 Pa quoted to cause a acute endothelial disruption (Fry, 1968).

**Key words** artery stenosis, pulsatile flow, wall shear stress, flow separation, finite element method