

涡度拟能传输惯性区二维湍流 标量场方差谱¹⁾

钱 俭

(中国科学院研究生院物理部, 100039 北京)

提要 本文应用非平衡统计力学封闭方法, 给出涡度拟能传输惯性区二维湍流标量场方差谱的完整表达式, 数值计算该表达式中的比例系数 B 。由于传输过程的非局部性, B 依赖于表征波数变化范围的局部化因子, 不再是普适常数。

关键词 湍流, 湍流谱, 湍流统计理论

一、引 言

当 Reynolds 数趋向无限大时, 二维湍流的涡度拟能 (enstrophy) 的耗散率 χ 趋向一正值, 而能量耗散率趋向零。因而二维湍流的能量不可能从大尺度向小尺度传输; 从大尺度向小尺度传输的守恒量是涡度拟能^[1,2], 对应的惯性区(涡度拟能传输惯性区)的能谱是^[1,3]

$$E(k) = c\chi^{2/3}k^{-3}. \quad (1)$$

这里 c 是比例系数。文献[4]应用 EDQNM (Eddy Damped Quasi Normal Markovian) 方法得到: 涡度拟能传输惯性区内标量场对流区的方差谱 $G(k)$ 正比于 k^{-1} 。EDQNM 方法依靠一些待定的半经验参数, 但目前尚无实验数据能确定二维湍流情况下这些半经验参数的数值, 因而文献[4]无法给出方差谱 $G(k)$ 的完整表达式。

本文应用非平衡统计力学封闭方法^[3,5,6], 推导出方差谱 $G(k)$ 的完整表达式, 即文中(10a)和(14)式, 同时证明标量场方差的传输方向是正向的: 从大尺度向小尺度传输。

二、谱动力学方程和红外发散

应用非平衡统计力学封闭方法^[3,5], 文献[6]得到下列二维湍流标量场对流区谱动力学的封闭方程组:

$$8\pi \int_k^\infty dp \int_0^k dr \tilde{B}(p, r) p^3 r^3 \frac{g(r) - g(p)}{\lambda(p) + \lambda(r)} = c\eta. \quad (2)$$

$$\lambda(k)g(k) = 4k^2 \int_0^\infty dp \tilde{B}(k, p) p^3 \frac{\lambda(p)[g(k) - g(p)]}{[\lambda(k) + \lambda(p)]^2}. \quad (3)$$

1) 国家自然科学基金资助项目。

本文于 1991 年 1 月 12 日收到, 1991 年 8 月 18 日收到修改稿。

$$\tilde{B}(k, p) = \left(\frac{1}{2\pi}\right) \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2 \varphi E(s) s^{-3}, \quad s \equiv |k - p|. \quad (4)$$

这里 φ 是波数矢量 k 和 p 的夹角, η 是标量场方差的耗散率; e 是方差传输的方向性指标: $e = +1$ 表示方差从大尺度向小尺度传输, $e = -1$ 表示方差从小尺度向大尺度传输. 式(2)~(4)中函数 $g(k)$ 与方差谱 $G(k)$ 有下列关系: $G(k) = 2\pi k g(k)$. 文献 [6] 研究了速度场能谱 $E(k)$ 是能量反向传输惯性区 Kolmogorov 型谱的情况, 本文研究能谱 $E(k)$ 是涡度拟能传输惯性区(1)式的情况. 把(1)式代入(4)式, 得到

$$\tilde{B}(k, p) = \left(\frac{1}{2\pi}\right) c \chi^{2/3} \beta(p/k) k^{-6}. \quad (5a)$$

$$\beta(x) = 2 \int_{-1}^{+1} dy (1-y^2)^{1/2} (1-2xy+x^2)^{-3}. \quad (5b)$$

设积分方程(2)和(3)的解具有下列幂函数形式:

$$g(k) = g_1 k^n, \quad \lambda(k) = \lambda_1 k^m. \quad (6)$$

利用(6)式, 经过一系列演算, 积分方程(2)和(3)变为确定 n, m, g_1 和 λ_1 的代数方程组, 最后得到

$$n = -2, \quad m = 0. \quad (7)$$

$$2c \chi^{2/3} \xi_1 g_1 / \lambda_1 = e \eta. \quad (8a)$$

$$\xi_1 = \int_0^1 dx [\ln x] \beta(x) (x^3 - x). \quad (8b)$$

$$2\pi \lambda_1 = c \chi^{2/3} \xi_2. \quad (9a)$$

$$\xi_2 = \int_0^\infty dx \beta(x) (x^3 - x). \quad (9b)$$

从(6)~(9)式, 利用 $e^2 = +1$, 标量场方差谱

$$G(k) = 2\pi g_1 k^{-1} = B c^{-1/2} \eta \chi^{-1/3} k^{-1}. \quad (10a)$$

$$B = \left[\frac{\pi \xi_2}{2 \xi_1} \right]^{1/2}. \quad (10b)$$

不难证明, (4)和(5b)式中的积分在 $x = p/k = 1$ 处发散, 从而导致(8b)和(9b)式的积分发散. 这一发散现象的根源是: 当波数趋向零时(或波长趋向无限大时)速度场能谱(1)式很快趋向无限大, 因而是一种红外发散现象. 这一红外发散现象使我们无法直接利用(8b)、(9b)和(10b)式计算方差谱 $G(k)$ 中的比例系数 B .

三、传输过程的非局部性和局部化因子

上述红外发散现象的物理本质是二维湍流传输过程的非局部性(nonlocalness). 在三维湍流中, 当波数相差很大时对应的运动自由度间的相互作用对统计性质的贡献可以忽略不计, 逐级传输(cascade)的概念是适用的, 不同自由度相互作用引起的守恒量在波数空间中的传输过程是局部性的. 但在二维湍流中这种传输过程不是局部性的^[1,7], 严格地讲逐级传输的概念不再适用, 有关的谱动力学方程可能出现不同程度的发散现象^[3,8].

涡度拟能传输惯性区延伸到零波数, 对应的波数变化范围(最大波数和最小波数的比

值)是无限大,这是一种理想化的渐近情况。实际上波数变化范围是有限的,惯性区并不延伸到零波数。文献[3]利用局部化因子表征实际谱动力学的波数变化范围局限于有界区间内,并对谱动力学方程进行相应的局部化,避免了发散困难。这一方法同样可以应用于谱动力学方程(2)和(3),克服红外发散困难。二维湍流标量场谱动力学的基本过程是波数 k, p 和 s 对应的三模相互作用 (triad interaction), 这里 k 和 p 是标量场波数, 而 $s = |k - p|$ 是速度场波数。三模相互作用中最大波数和最小波数之比记为

$$R(k, p, s) = \max(k, p, s) / \min(k, p, s). \quad (11)$$

按文献[3]和[8]的方法,引入局部化因子 L ,在谱动力学方程(2)–(4)中忽略所有 $R(k, p, s) > L$ 的三模相互作用,就得到局部化的谱动力学方程。局部化的方程在形式上与(2)和(3)式一样,但其中 $\tilde{B}(k, p)$ 变为

$$\tilde{B}(k, p) = \left(\frac{1}{2\pi}\right) \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2 \varphi F(k, p, s, L) \quad (12a)$$

$$F(k, p, s, L) = \begin{cases} E(s)s^{-3} & \text{当 } R(k, p, s) \leq L \\ 0 & \text{当 } R(k, p, s) > L \end{cases} \quad (12b)$$

$L \rightarrow \infty$ 时局部化方程变为原来的方程。当 $L \gg 1$ 时局部化谱动力学方程仍具有幂函数形式的解(6)式,而且同样可以推导得到(7)、(8a)、(9a)、(10a)和(10b)各式,但 ξ_1 和 ξ_2 变为

$$\xi_1 = \int_0^1 dx [\ln x] \beta(x, L) (x^3 - x) \quad (13a)$$

$$\xi_2 = \int_0^\infty dx x \beta(x, L) (x^3 - x) \quad (13b)$$

$$\beta(x, L) = 2 \int_{-1}^{+1} dy D(x, y, L). \quad (13c)$$

这里 $D(x, y, L) = (1 - y^2)^{1/2} (1 - 2xy + x^2)^{-3}$ 当 $R(1, x, (1 - 2xy + x^2)^{1/2}) \leq L$, 否则 $D(x, y, L) = 0$ 。显然 ξ_1 和 ξ_2 依赖于局部化因子 L 。

四、结果和讨论

局部化因子 L 给定后,按照(13a)–(13c)式数值计算出 ξ_1 和 ξ_2 , 代入(10b)式就得到比例系数 B 。图 1 中小圆点表示数值

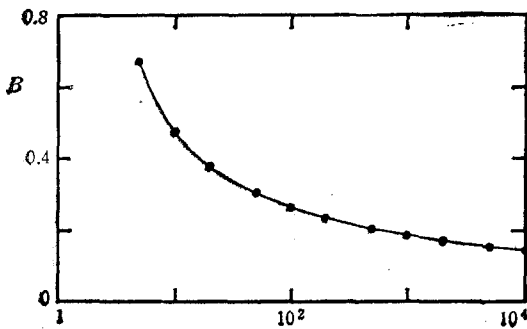


图 1 比例系数 B 随局部化因子 L 的变化
●●●数值计算结果 — 拟合公式(14)

计算结果, 这些数据点可以用下列公式拟合,

$$B = [0.71 \ln(L - 1.2) + 0.54]^{-1} \quad (14)$$

(10a) 和(14)式给出涡度拟能传输惯性区内标量场对流区方差谱 $G(k)$ 的完整表达式, 能谱 $E(k)$ 式(1)中的比例系数 c 的计算公式已在文献[3]中给出。依赖于半经验参数的 EDQNM 方法无法

理论计算 B 。

(14)式表明, 涡度拟能传输惯性区方差谱 $G(k)$ 的比例系数 B 依赖于表征波数变化范围的局部化因子 L , 当 $L \rightarrow \infty$ 时 $B \rightarrow 0$. 由于二维湍流传输过程的非局部性, 惯性区谱的比例系数可能依赖于波数变化范围, 不再是普适常数.

在图 1 所示的 L 的变化范围内, 按 (13a) 式计算得到的 ξ_1 是正数, 根据 (8a) 式方向性指标 $e = +1$, 因而涡度拟能传输惯性区内标量场方差从大尺度向小尺度传输. 这与文献[6]的结果是一致的.

参 考 文 献

- [1] Kraichnan. R.H. *Phys. Fluids*, 1967:10 1417—1423.
- [2] Batchelor. G.K. *Phys. Fluids Suppl II*, 1969:12 233—239.
- [3] Qian. J. (钱俭). *Phys. Fluids*, 1984:27. 2412—2417.
- [4] Lesieur. M & Herring. J. J. *FluidMech.*, 1985:161, 77—95
- [5] Qian. J. (钱俭). *Phys. Fluids*, 1985:28, 1299—1304.
- [6] 钱俭. 中国科学A辑, 1989, 9: 943—948.
- [7] Kraichnan. R.H. *J. FluidMeth.*, 1971:47, 525—535.
- [8] Qian. J. (钱俭). *Phys. Fluids*, 1986:29, 3608—3611.

SCALAR VARIANCE SPECTRUM IN ENSTROPHY CASCADE RANGE OF 2-D TURBULENCE

Qian Jian

(Department of Physics, Graduate School of Academia Sinica, Beijing 100039)

Abstract The nonequilibrium statistical-mechanics theory of a passive scalar field convected by turbulence is applied to study the variance spectrum $G(k)$ of a 2-D (two-dimensional) turbulent passive scalar field in the convective range, while the velocity spectrum $E(k) = c\chi^{2/3}k^{-3}$ in the enstrophy cascade range, here χ is the enstrophy dissipation rate, C is a dimensionless coefficient. The closure equations in this case are divergent due to the nonlocalness of the cascade process in 2-D turbulence. In order to overcome the divergence difficulty, the closure equations are localized by a localization procedure. We obtain $G(k) = BC^{-1/2}\eta\chi^{-1/3}k^{-1}$, here η is the variance dissipation rate, the dimensionless coefficient $B = [0.71\ln(L - 1.2) + 0.54]^{-1}$ depends upon the localization factor L and is not a universal constant. It is shown that the direction of the scalar variance cascade is from larger to smaller scales.

Key words turbulence, turbulence spectrum, statistical theory of turbulence