第24卷 第6期
1992年11月

力学学报
ACTA MECHANICA SINICA

Vol. 24, No. 6
Nov., 1992

线性振动亏损系统的矩阵摄动理论[1)]

陈塑寰 徐涛 韩万芝

(吉林工业大学，长春 130025)

提要 本文讨论线性振动亏损系统的矩阵摄动理论. 根据这种摄动理论，人们能确定结构参数变化对亏损系统的动力特性的影响. 因此，它对研究亏损系统的动态特性的变化有重要意义. 算例表明了本文理论的正确性和有效性.

关键词 线性振动，亏损系统，矩阵摄动理论

1. 引言

关于线性振动特征值问题的矩阵摄动理论已有一系列文献报道. 例如文献 [1]、[2] 讨论了孤立特征值的摄动法，文献 [3]、[4]、[5] 讨论了重特征值的摄动理论，所有这些文献都假定系统的矩阵是非亏损的，即具有完备的特征向量系. 但是，实际上还存在许多问题，如：具有非比例阻尼矩阵，或在非保守力作用下的结构动力问题，气动弹性颤振分析，以及结构和控制系统相耦合的问题，其有关的矩阵可能是亏损的，即不存在完备的特征向量系足以张开整个空间. 文献[6]给出了一种适用于亏损和非亏损系统的广义模态理论，但没有研究结构参数变化时对亏损系统动态特性的影响. 最近，文献[8]讨论了亏损矩阵的摄动问题，但其结果不便于计算，难于在工程计算中应用. 本文进一步讨论了亏损矩阵的摄动问题，并得到了比文献[8]更为方便和更为精确的算式.

2. 亏损系统的振动特征值问题

关于亏损矩阵的特征值问题，文献[6]已作了详尽的讨论. 任意矩阵 A 的特征值问题可表示为

$$AU = UJ \tag{1}$$

式中 U 为广义模态矩阵，J 为 A 的 Jordan 标准形，它具有如下形式

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{bmatrix}, \quad r \leqslant n \tag{2}$$

式中

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{m_i} \quad \sum_{i=1}^{r} m_i = n \tag{3}$$

1) 国家自然科学基金资助项目.

本文于1991年8月5日收到第一稿，于1992年1月15日收到修改稿.

线性振动系统的伴随系统，即 A 的共轭转置系统，其广义模态满足如下方程

$$A^{\mathrm{H}}V = VJ^{\mathrm{H}} \tag{4}$$

式中 A^{H} 为 A 的共轭转置，J^{H} 为 J 的共轭转置，V 为伴随系统的广义模态矩阵.

通常称 u_i 和 v_i 为 λ_i 的右、左特征向量，而 $u_{i+1},\cdots,u_{i+m_i-1}$ 和 $v_{i+1},\cdots,v_{i+m_i-1}$ 称为 λ_i 的右、左广义特征向量。

广义模态满足如下的正交条件

$$V^{\mathrm{H}}U = I \tag{5}$$

应当指出，方程 (1) 和 (4) 的解通常是不唯一的，但我们可以找到在某种约定条件下的确定解.

3. 亏损系统的矩阵摄动理论

摄动系统的特征值问题可表示为

$$(A + \varepsilon A_1)\tilde{u} = \tilde{\lambda}\tilde{u} \tag{6}$$

式中 ε 为一小参数，A_1 为 A 的摄动矩阵，$\tilde{\lambda}$、$\tilde{u}$ 分别为摄动后的矩阵 $A+\varepsilon A_1$ 的特征值和特征向量.

为了简明，先设矩阵 A 有一 m 重特征值，而其余均为孤立特征值，且依次排列为

$$\lambda_1,\cdots,\lambda,\ \lambda_{m+1},\cdots,\lambda_n.$$

如果 λ 为 m 重亏损特征值，则对非亏损矩阵的小参数展开式不再适用. 为此，我们采用 Puiseux 展开式[7]，即

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}_k = \lambda &+ \lambda_k^{(1)}\sqrt[m]{\varepsilon} + \lambda_k^{(2)}\sqrt[m]{\varepsilon^3} + \cdots + \lambda_k^{(m)}\varepsilon \\ &+ \lambda_k^{(m+1)}\sqrt[m]{\varepsilon^{m+1}} + \cdots,\quad k = 1,2,\cdots,m\end{aligned} \tag{7}$$

和

$$\begin{aligned}\tilde{u}_k = u_1 &+ u_k^{(1)}\sqrt[m]{\varepsilon} + u_k^{(2)}\sqrt[m]{\varepsilon^2} + \cdots + u_k^{(m)}\varepsilon \\ &+ u_k^{(m+1)}\sqrt[m]{\varepsilon^{m+1}} + \cdots,\quad k = 1,2,\cdots,m\end{aligned} \tag{8}$$

将(7)、(8)式代入(6)式

$$(A + \varepsilon A_1)(u_1 + u_k^{(1)}\sqrt[m]{\varepsilon} + \cdots) = (\lambda + \lambda_k^{(1)}\sqrt[m]{\varepsilon} + \cdots)(u_1 + u_k^{(1)}\sqrt[m]{\varepsilon} + \cdots) \tag{9}$$

并展开此式，比较 ε 的同次幂得

$$\varepsilon^0:\quad Au_1 = \lambda u_1 \tag{10}$$

$$\sqrt[m]{\varepsilon}:\quad Au_k^{(1)} = \lambda u_k^{(1)} + \lambda_k^{(1)}u_1 \tag{11}$$

$$\sqrt[m]{\varepsilon^2}:\quad Au_k^{(2)} = \lambda u_k^{(2)} + \lambda_k^{(1)}u_k^{(1)} + \lambda_k^{(2)}u_1 \tag{12}$$

$$\vdots$$

$$\varepsilon\quad Au_k^{(m)} + A_1u_1 = \lambda u_k^{(m)} + \lambda_k^{(1)}u_k^{(m-1)} + \cdots + \lambda_k^{(m)}u_1 \tag{13}$$

由上列各式可见，为了计算 $u_k^{(1)}$，必须首先求得 $u_k^{(1)}$；为了计算 $u_k^{(2)}$，必须先给出 $\lambda_k^{(1)}$，$u_k^{(1)}$ 和 $\lambda_k^{(2)}$，等等.

我们把 (6) 式的行列式写成小参数 ε 的幂级数

$$|\tilde{\lambda}I - A - \varepsilon A_1| = D_0(\tilde{\lambda}) + \varepsilon D_1(\tilde{\lambda}) + \cdots + \varepsilon^n D_n(\tilde{\lambda}) \tag{14}$$

式中 $D_0(\tilde{\lambda}) = |\tilde{\lambda}I - A|$.

再将(14)式在 $\tilde{\lambda}$ 附近展成 Taylor 级数，λ 为原矩阵 A 的特征值，可得

$$
\begin{aligned}
& D_0(\lambda) + \varepsilon D_1(\lambda) + \cdots + \varepsilon^n D_n(\lambda) \\
& + (\tilde{\lambda} - \lambda)[D_0'(\lambda) + \varepsilon D_1'(\lambda) + \cdots + \varepsilon^n D_n'(\lambda)] \\
& + \cdots \\
& + \frac{(\tilde{\lambda} - \lambda)^m}{m!}[D_0^{(m)}(\lambda) + \varepsilon D_1^{(m)}(\lambda) + \cdots] \\
& + \cdots \\
& + \frac{(\tilde{\lambda} - \lambda)^n}{n!} D_0^{(n)}(\lambda) = 0
\end{aligned} \tag{15}
$$

式中

$$D_0(\lambda) = |\lambda I - A| = 0 \tag{16}$$

由于 λ 为 A 的 m 重特征值，故不仅(16)式成立，而且还有

$$D_0'(\lambda) = D_0''(\lambda) = \cdots = D_0^{(m-1)}(\lambda) = 0 \tag{17}$$

于是，(15)式变为

$$
\begin{aligned}
& \frac{(\tilde{\lambda} - \lambda)^n}{n!} D_0^{(n)}(\lambda) + \frac{(\tilde{\lambda} - \lambda)^{n-1}}{(n-1)!}(D_0^{(n-1)}(\lambda) + \varepsilon D_1^{(n-1)}(\lambda)) + \cdots + \\
& \frac{(\tilde{\lambda} - \lambda)^m}{m!}(D_0^{(m)}(\lambda) + \varepsilon D_1^{(m)}(\lambda)) + \cdots + (\tilde{\lambda} - \lambda)\varepsilon D_1'(\lambda) + \varepsilon D_1(\lambda) = 0
\end{aligned} \tag{18}
$$

式中 $D_0^{(n)}(\lambda) = n!$

设矩阵 A 的特征值为 $\lambda, \cdots, \lambda, \lambda_{m+1}, \cdots \lambda_n$，$A + \varepsilon A$ 的特征值为 $\tilde{\lambda}_1, \cdots, \tilde{\lambda}_m, \tilde{\lambda}_{m+1}, \cdots \tilde{\lambda}_n$。根据特征多项式的性质，可以证明如下关系式成立：

$$\prod_{i=1}^{m}(\tilde{\lambda}_i - \lambda) \approx (-1)^m \frac{m! D_1(\lambda)}{D_1^{(m)}(\lambda)} \varepsilon \tag{19}$$

和

$$\sum_{i=1}^{m}(\tilde{\lambda}_i - \lambda) \approx \varepsilon\left(\sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i^{(1)} + \frac{1}{(n-1)!} D_0^{(n-1)}(\lambda)\right) \tag{20}$$

由(19)式得

$$\tilde{\lambda}_i - \lambda \approx \left(-\frac{m!\varepsilon D_1(\lambda)}{D_0^{(m)}(\lambda)}\right)^{\frac{1}{m}} e^{2ji\pi/m} \quad j = \sqrt{-1},\ i = 1, 2, \cdots, m \tag{21}$$

由(20)式得

$$\tilde{\lambda}_i - \lambda \approx -\frac{\varepsilon}{m}\left(\sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i^{(1)} + \frac{D_0^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!}\right) \tag{22}$$

将(21)式和(22)式与 Puiseux 展开式(7)相比较，得

$$\lambda_k^{(1)} = \left(-\frac{m! D_1(\lambda)}{D_1^{(m)}(\lambda)}\right)^{\frac{1}{m}} e^{2ji\pi/m} \quad j = \sqrt{-1},\ i = 1, 2, \cdots, m \tag{23}$$

和

$$\lambda_k^{(m)} = \frac{1}{m}\left(\sum_{j=m+1}^{n} \lambda_j^{(1)} + \frac{1}{(n-1)!} D_1^{(n-1)}(\lambda)\right) \quad i = 1, 2, \cdots, m \tag{24}$$

文献[8]只得到了(23)式,而没有得到(24)式. 应当指出,直接采用(23)、(24)式是不方便的. 下面将导出其更方便的算式. 为此,我们利用如下关系式

$$|\mu I - A - \varepsilon A_1| = |\mu I - A|(1 - \varepsilon t_r(\mu I - A)^{-1}A_1 + \cdots) \tag{25}$$

由此式可得

$$D_1(u) = -t_r(\mu I - A)^* A_1 = -t_r V^{\mathrm{H}}(\mu I - A)^* U V^{\mathrm{H}} A_1 U$$

$$= -t_r \left[\begin{array}{cccc|ccc} \frac{|\mu I - A|}{\mu - \lambda} & \frac{|\mu I - A|}{(\mu - \lambda)^2} & \cdots & \frac{|\mu I - A|}{(\mu - \lambda)^m} & & & \\ & \frac{|\mu I - A|}{\mu - \lambda} & \cdots & \frac{|\mu I - A|}{(\mu - \lambda)^{m-1}} & & \mathbf{0} & \\ & & \ddots & \vdots & & & \\ & & & \frac{|\mu I - A|}{\mu - \lambda} & & & \\ \hline & & & & \frac{|\mu I - A|}{\mu - \lambda_{m+1}} & & \\ & \mathbf{0} & & & & \ddots & \\ & & & & & & \frac{|\mu I - A|}{u - \lambda_n} \end{array}\right] V^{\mathrm{H}} A_1 U \tag{26}$$

式中 $(\mu I - A)^*$ 为 $(\mu I - A)$ 的伴随矩阵.

从(26)式不难求得

$$D_1(\lambda) = -\frac{1}{m!} D_0^{(m)}(\lambda) v_m^H A_1 u_1 \tag{27}$$

将此式代入(23)式得

$$\lambda_k^{(1)} = (v_m^{\mathrm{H}} A_1 u_1)^{1/m} e^{2jk\pi/m} \quad j = \sqrt{-1},\ k = 1, 2, \cdots, m. \tag{28}$$

在(24)式中为了求得 $\lambda_k^{(m)}$,我们先计算 $D_0^{(n-1)}(\lambda)$. 在(26)式中我们容易验证

$$\frac{d^{n-1}}{d\mu^{n-1}} \frac{|\mu I - A|}{\mu - \lambda} = (n-1)!$$

其余为零. 于是有

$$D_1^{(n-1)}(\lambda) = -(n-1)!\, t_r A_1 \tag{29}$$

将此式代入(24)式得

$$\lambda_k^{(m)} = -\frac{1}{m}\left(\sum_{j=m+1}^{n} \lambda_j^{(1)} - t_r A_1\right) \quad k = 1, 2, \cdots, m \tag{30}$$

式中 $\lambda_j^{(1)}$ 为孤立特征值的一阶摄动,故有

$$\lambda_k^{(m)} = -\frac{1}{m}\left(\sum_{j=m+1}^{n} v_j^H A_1 u_j - t_r V^H A_1 U\right) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} v_j^H A_1 u_j \tag{31}$$

根据 Puiseux 展开式(7), $A + \varepsilon A_1$ 的特征值 $\tilde{\lambda}_i$, $i = 1, 2, \cdots, m$ 可近似取为

$$\tilde{\lambda}_k \approx \lambda + \lambda_k^{(1)} \sqrt[m]{\varepsilon} + \lambda_k^{(m)} \varepsilon \quad k = 1, 2, \cdots, m \tag{32}$$

下面来求广义模态的摄动 $u_k^{(1)}$. 现把(11)式写成如下的形式

$$(A - \lambda I) u_k^{(1)} = \lambda_k^{(1)} u_1 \quad k = 1, 2, \cdots, m \tag{33}$$

但从（1）式有

$$(A-\lambda I)u_2=u_1 \tag{34}$$

故对比（33）与（34）式，我们可取

$$u_k^{(1)}=\lambda_k^{(1)}u_2,\ k=1,2,\cdots,m \tag{35}$$

作为其确定解，式中 $\lambda_k^{(1)}$ 由（28）式来确定．于是，$A+\varepsilon A_1$ 的特征向量 $\tilde{u}_k$ 可近似取为

$$\tilde{u}_k\approx u_1+\lambda_k^{(1)}u_2\sqrt[m]{\varepsilon},\ k=1,2,\cdots,m \tag{36}$$

不难证明，（32）式和（36）式可用于多个重亏损特征值的情况．

4. 数值例子

考虑一具有非比例阻尼矩阵的线性振动系统．系统的状态矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}-4 & -2.828427 & -36 & 0\\ -2.828427 & -6 & 0 & -81\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

A 的特征值为互为共轭的两个二重根

$$\lambda_1=-2.5+j6.910137$$
$$\lambda_2=-2.5-j6.910137$$

由文献[6]可知，$\lambda_{1,2}$ 各对应一个二阶若当块，该系统是亏损的．

设状态矩阵的摄动矩阵为 A_1

$$A_1=\begin{bmatrix}0 & -2.828427 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$A+\varepsilon A_1$ 的特征值和特征向量的精确解和用本文方法求得的摄动解列于表 1 和表 2（$\varepsilon=0.01$）．

表 1　$A+\varepsilon A_1$ 特征值的比较

No.	精　确　解	本　文　摄　动　解
1	$-2.673524+j7.0937038$	$-2.632889+j6.803459$
2	$-2.356476+j6.722201$	$-2.336283+j6.950027$
3	$-2.673524-j7.0937038$	$-2.632889-j6.830459$
4	$-2.356476-j6.722201$	$-2.336283-j6.950027$

由表 1 和表 2 的数值结果可以看出，当 A 中的元素 a_{12} 有微小改变时，A 的特征值由互为共轭的两个二重亏损特征值，改变为互异的两对共轭特征值，也就是说，矩阵 A 是亏损的，而 $A+\varepsilon A_1$ 是非亏损的；同时还可以看出，当 ε 足够小时（本算例中 $\varepsilon=0.01$），本文的摄动解有良好精度．

5. 结束语

本文讨论了线性振动亏损矩阵的摄动理论．由实例分析可见，亏损特征值和广义模态向量对结构参数的变化是非常敏感的，即结构参数的微小变化可能导致结构动力特性

表2　$A+\varepsilon A_1$ 右特征向量比较

	精确解	本文摄动解
U_1	(1.000000,　0.000000) (0.125812, −0.957216) (−0.046521, −0.123436) (−0.124008,　0.029001)	(1.000000,　0.000000) (0.175352, −0.760735) (−0.050568, −0.128018) (−0.105760,　0.016256)
U_2	(1.000000,　0.000000) (0.010245, −0.705416) (−0.046441, −0.132480) (−0.093929,　0.031403)	(1.000000,　0.000000) (0.009396, −0.812989) (−0.044234, −0.128934) (−0.104267,　0.037105)
U_3	(1.000000,　0.000000) (0.125812,　0.957216) (−0.046521,　0.123436) (−0.124008, −0.029001)	(1.000000,　0.000000) (0.175352,　0.760735) (−0.050568,　0.128018) (−0.105760, −0.016256)
U_4	(1.000000,　0.000000) (0.010245,　0.705416) (−0.046441,　0.132480) (−0.093929, −0.031403)	(1.000000,　0.000000) (0.009396,　0.812989) (−0.044234,　0.128934) (−0.104267, −0.037105)

的重要变化．在本文的算例中，矩阵A的微小变化使两个亏损的重特征值变为非亏损的孤立特征值．本文给出的亏损系统的摄动理论能正确地估计这种变化．

参　考　文　献

[1] Chen J C & Wada B K. *AIAA J.*, 1977 15: 1095—1100.
[2] Plant R H & Huseyin. *AIAA J.*, 1973, 11:250
[3] Haug E J & Rousselet B. J. Struct. Meth. 1980, 8:161
[4] 陈塑寰．吉林工业大学学报，1981，4:11
[5] 胡海昌．多自由度结构固有振动理论，科学出版社，1987
[6] 时国勃、诸德超、力学学报，1989，21:181—192
[7] Deif AS. Advanced Matrix Theory For Scientist and Engineers. Abacus House, England, 1982: 202
[8] Leung AYT. Perturbed General Eigensolution. Communications in Applied Numerical Methods, 1990, 6:401—409
[9] 陈塑寰．结构振动分析的矩阵摄动理论．重庆出版社，1991

MATRIX PERTURBATION FOR LINEAR VIBRATION DEFECTIVE SYSTEMS*

Chen Suhuan　Xu Tao　Han Wanzhi

(Jilin University of Technology, Changchun 130025, *China)*

Abstract　In this paper, matrix perturbation for linear vibration defective systems is discussed. According to this perturbation theory, the effect of the structural parameter modifications on the dynamic characteristics of the defective systems can be determined. Thus, the theory is usful for investigating the changes of the dynamic characteristics of the defective systems. A simple example is given to show the correctness and effectiveness of the matrix perturbation presented in this paper.

Key words　linear vibration, defective systems, matrix perturbation

* The project supported by National Natural Science Foundation of China.