

# 受远方拉伸的孔边角裂纹的应力强度因子

赵伟 吴学仁 颜鸣皋  
(北京航空材料研究所)

**提要** 本文应用作者近年来发展的三维权函数法计算了孔边角裂纹受远方拉伸情况下的应力强度因子,所得结果与文献中的解进行了广泛的比较,并讨论了二维无裂纹应力分布对权函数法所得结果的精度的影响。文中为这一问题补充了新的解答。

**关键词** 三维权函数,孔边角裂纹,应力强度因子

## 一、引言

工程结构的疲劳断裂往往是由于孔及缺口等应力集中部位起始的角裂纹或表面裂纹的扩展造成的。精确地预测含裂纹构件的疲劳寿命及剩余强度需要知道裂纹体的应力强度因子。由于问题的复杂性,得不到有限体三维裂纹问题的准确解。研究者们均借助于数值方法来求解。对于图1所示的孔边对称分布的角裂纹问题,Hechmen 和 Bloom<sup>[1]</sup>, Raju 和 Newman<sup>[2]</sup> 分别用有限元法计算了一些情况下的应力强度因子; Nishioka 和 Atluri<sup>[3]</sup> 用有限元交替法分析了这一问题。这些数值方法虽然可以用来计算各种几何及受载情况的应力强度因子并具有足够的精度,但它们需要在大、中型计算机上花较长时间才能完成,且准备计算模型也要花费大量人力,因此费用很高,不能适应解决工程问题的需要。

为了克服这一障碍,促进断裂力学在工程中的应用,本文作者发展了一种三维权函数法<sup>[4,5]</sup>,并用它分析了内埋椭圆裂纹<sup>[4,5]</sup>,孔边表面裂纹<sup>[4,6]</sup>,孔边角裂纹<sup>[4]</sup>,缺口表面裂纹<sup>[4,7-9]</sup>及缺口角裂纹<sup>[4,7,10]</sup>。应用表明,这种三维权函数法不仅简单、高效而且有很好的精度。本文应用这一方法,对孔边对称角裂纹受远方拉伸的情况进行了详细的分析和讨论,对文献中的解作了补充。

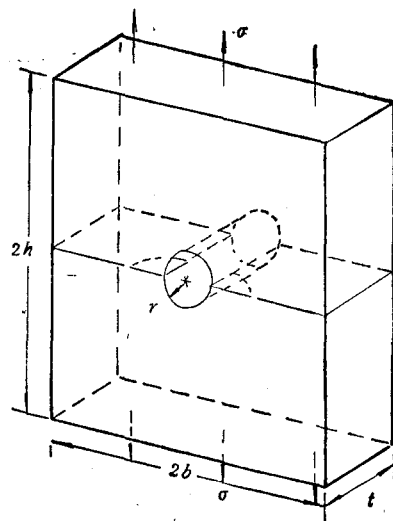


图1 受远方拉伸的孔边对称角裂纹

本文于1990年3月4日收到第一稿,于1990年8月4日收到修改稿。

## 二、三维权函数法

本文的三维权函数法在文献[4,5]中有详细的介绍,并在[6,9,10]中针对不同的问题作了进一步的阐述。下面仅就待求解的问题简要描述这一方法。

### 1. 分析模型及权函数

对于图1所示的裂纹体,假想的两组片条的分割如图2所示。其中与 $a$ 轴平行的片

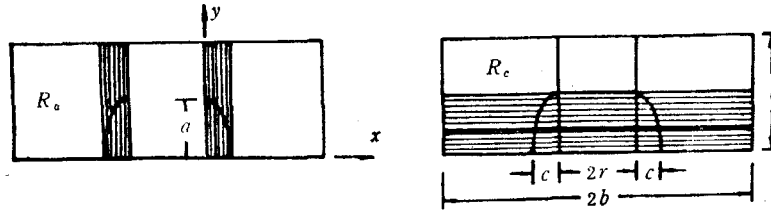


图2 片条的分割及约束面积

取为基本片,用下标 $a$ 代表;与 $c$ 轴平行的片则为弹簧片,用下标 $c$ 代表。图2中片条区域和孔之外的面积对含裂纹片条有约束作用,称为约束面积,用 $R_i(i=a,c)$ 表示。本文考虑无限宽板的情况,即 $(c+r)/b=0$ ,此时 $R_i=\infty$ ,典型的基本片及弹簧片如图3(a),(b)所示,相应的权函数如下

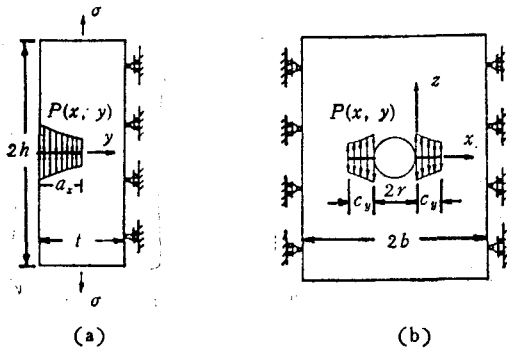


图3 典型片条的示意图,(a)基本片 (b)弹簧片

上式中二维裂纹的权函数已由吴学仁导出<sup>[11,12]</sup>,也可见文献[4,6]。

$$W_a = W_{double} \quad (1a)$$

$$W_c = W_{collinear}^h \quad (1b)$$

### 2. 应力强度因子

文献[4,5]中导出了三维裂纹的应力强度因子与具有三维性质的含穿透裂纹片条的

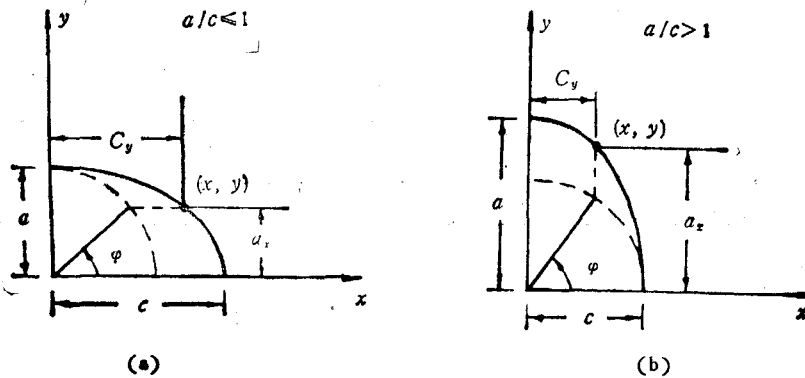


图4 裂纹参数定义

应力强度因子之间的关系如下

$$K(\varphi) = \frac{1}{1-\eta^2} \left\{ K_a^2(a_x) + \left[ \frac{E}{E_i} K_c(c_y) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} (-1)^n \quad (2)$$

$$\varphi = 0^\circ, 90^\circ \text{ 时 } \eta = 0; 0^\circ < \varphi < 90^\circ \text{ 时 } \eta = \nu$$

$$K_i \leq 0 \text{ 时 } n = 1; K_i > 0 \text{ 时 } n = 2$$

其中裂纹的参量角  $\varphi$ , 片条裂纹长度  $a_x$  和  $c_y$  的定义见图 4;  $\nu$  为泊松比。(2)式表明, 由片条的应力强度因子即可确定三维裂纹的应力强度因子。详细求解过程请见 [4,5,6]。

### 三、结果及讨论

应用上述方法计算了  $r/t = 0.5, 1, 2$ ,  $a/c = 0.2, 0.5, 1, 2$ ,  $a/t = 0.2, 0.5$  在  $c/r \leq 2$  范围内的孔边对称角裂纹受远方拉伸情况下的应力强度因子。新补充的解答列在表 1 和 2 中, 与文献中已有结果的比较示于图 5—9 中。所提供的结果用以下无量纲的形式表示

$$F = K/(\sigma\sqrt{\pi a/Q}) \quad (3)$$

式中的  $Q = \Phi^2$ , 称为椭圆裂纹的形状因子,  $\Phi$  为第二类完全椭圆积分。

表 1 孔边对称角裂纹受远方拉伸时的无量纲应力强度因子  $F, a/c = 0.5$

$a/t$	$\phi^\circ$	$r/t$		
		0.5	1	2
0.2	.1	1.189	1.481	1.840
	11.3	1.265	1.528	1.872
	22.5	1.280	1.577	1.936
	33.8	1.373	1.711	2.091
	45.0	1.533	1.909	2.295
	56.3	1.728	2.149	2.527
	67.5	1.975	2.414	2.756
	82.5	2.521	2.872	3.114
	89.9	2.631	2.872	3.042
0.5	.1	.915	1.123	1.386
	11.3	1.046	1.215	1.442
	22.5	1.015	1.222	1.485
	33.8	1.087	1.313	1.615
	45.0	1.250	1.475	1.817
	56.3	1.385	1.663	2.068
	67.5	1.526	1.901	2.358
	82.5	2.050	2.481	2.881
	89.9	2.363	2.642	2.914

#### 1. 与有限元结果的比较

图 5 表示了浅裂纹情况本文结果与 Raju 和 Newman<sup>[2]</sup> 的有限元结果沿整个裂纹前缘的比较, 可见在除了接近孔表面的区域和板表面点之外, 两种完全不同的方法所得结果有极好的一致性, 差别在 3% 之内。在靠近孔表面处, 有限元结果急剧下降。这种现象

表2 孔边对称角裂纹受远方拉伸时的无量纲应力强度因子  $F, r/t = 2$ 

$a/t$	$\phi^\circ$	$a/c$		
		0.2	1	2
0.2	.1	.863	2.936	2.168
	11.3	.995	2.947	2.196
	22.5	1.196	2.865	2.101
	33.8	1.430	2.850	2.016
	45.0	1.690	2.871	1.913
	56.3	1.972	2.941	1.813
	67.5	2.272	3.039	1.729
	82.5	2.805	3.274	1.717
	89.9	2.845	3.181	1.667
0.5	.1	.657	2.430	1.950
	11.3	.800	2.457	1.981
	22.5	.920	2.401	1.904
	33.8	1.104	2.420	1.845
	45.0	1.324	2.492	1.775
	56.3	1.540	2.618	1.707
	67.5	1.770	2.788	1.655
	82.5	2.398	3.131	1.681
	89.9	2.660	3.087	1.641

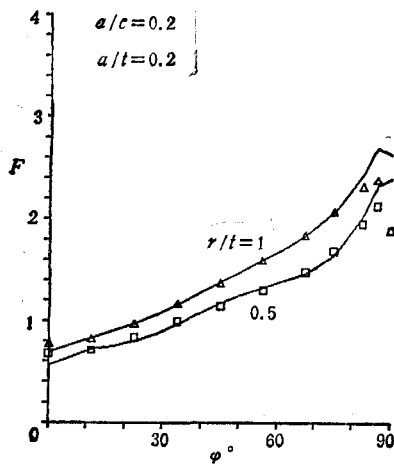


图5 无量纲应力强度因子与有限元结果<sup>[2,7]</sup>的比较,  
 $r/t = 0.5, 1, a/c = 0.2, a/t = 0.2$   
 符号: Raju 与 Newman 1979

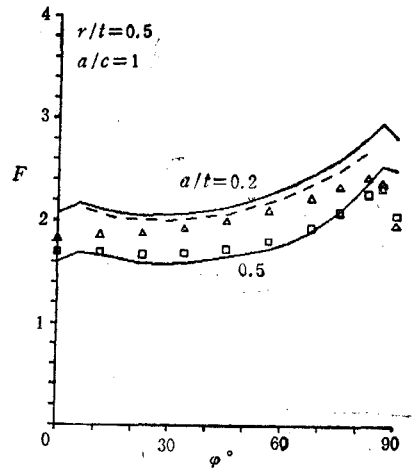


图6 无量纲应力强度因子与有限元结果<sup>[1,2]</sup>的比较,  
 $r/t = 0.5, a/c = 1, a/t = 0.2, 0.5$   
 虚线: Hechmer 与 Bloom 1977  
 符号: Raju 与 Newman 1979

曾被认为是由于“边界层”效应产生的<sup>[2,13]</sup>。近来 Newman 及其同事<sup>[14]</sup>重新分析了他们的有限元模型,发现原模型在孔与裂纹相交处存在病态单元。消除病态单元后得到的新的结果在表面以内与三维权函数法都有很好的一致性<sup>[4,7,14]</sup>。从图5中还可清楚地看到孔

半径对应应力强度因子的影响,即孔径大者应力强度因子高。

图 6 为四分之一圆形裂纹的结果与文献[1, 2]中有限元结果的比较。可见当  $a/t=0.5$  时,本文结果与文献[2]在除了孔壁的区域外相一致,差别基本在 5% 以内;当  $a/t=0.2$  时,本文结果与文献[1]的有限元结果有良好的一致性,差别为 3% 左右,而与文献[2]的结果在  $\varphi=45^\circ$  处也相差近 7%。

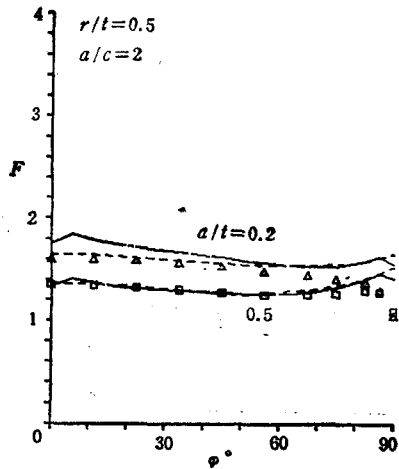


图 7 无量纲应力强度因子与有限元结果<sup>[2,3]</sup>的比较,  $r/t=0.5$ ,  $a/c=2$ ,  $a/t=0.2, 0.5$   
虚线: Nishioka 与 Atluri 1982  
符号: Raju 与 Newman 1979

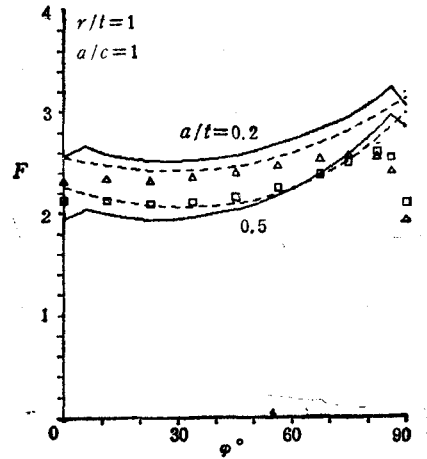


图 8 无量纲应力强度因子与有限元结果<sup>[2,3]</sup>及经验方程<sup>[13]</sup>的比较,  $r/t=1$ ,  $a/c=1$ ,  $a/t=0.2, 0.5$   
虚线: Newman 与 Raju 1983  
符号: Raju 与 Newman 1979

图 7 为深裂纹的情况本文结果与文献[2,3]的比较。可见当  $a/t=0.5$  时,三种方法在离开孔壁处有极好的一致性,差别小于 2%,在靠近孔壁处,本文结果与文献[3]仍保持吻合,而文献[2]的解由于前面所述的病态单元的影响而呈现急剧下降。 $a/t=0.2$  时,靠近孔壁处的行为与  $a/t=0.5$  时相同;而在内部及靠近板表面处,虽然两种数值方法吻合的很好,但它们比权函数的结果低 5—10%。图 6 和 7 是  $r/t=0.5$  的情况。 $r/t=1$  的相应结果示于图 8 和 9 中。由图 6 和 8 可见,  $r/t=1$  的情况权函数与有限元结果<sup>[2]</sup>的比较与  $r/t=0.5$  时呈相同的趋势。图 9 则表明  $r/t=1$  时两种裂纹深度的权函数和有限元结果<sup>[2]</sup>在离开孔壁区都有很好的一致性,差别在 4% 之内。图 8 和 9 中还用虚线表示了 Newman 和 Raju 拟合方程的结果<sup>[13]</sup>。因为进一步加密有限元网格时靠近孔表面处的点仍呈上升趋势<sup>[2,13]</sup>,所以他们在拟合方程时没有采用靠近孔表面区的点,因此方程受病态单元的影响不大,在靠近孔壁区有较好的精度。

综合以上 10 种情况的比较结果可见,除了图 6—8 中  $a/t=0.2$  的三种情况外,权函数法与有限元结果有良好的一致性,差别基本上小于 5%。对于图 6 和 8 中  $a/t=0.2$  的两种孔半径的四分之一圆形裂纹的情况,虽然权函数与文献[2]的有限元结果有显著差别,但与文献[1]的结果却很一致。因为本文的权函数法对于不同的裂纹几何及受载状况

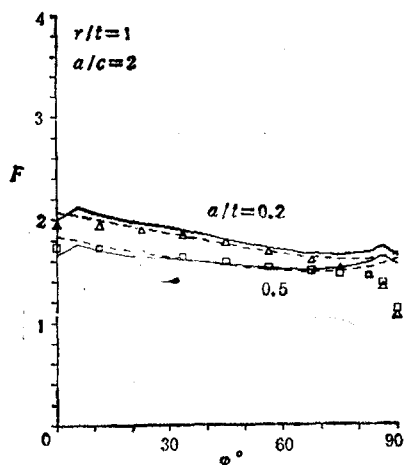


图9 无量纲应力强度因子与有限元结果<sup>[22]</sup>及经验方程<sup>[13]</sup>的比较,  $r/t=1$ ,  $a/c=2$ ,  $a/t=0.2, 0.5$   
虚线: Newman 与 Raju 1983  
符号: Raju 与 Newman 1979

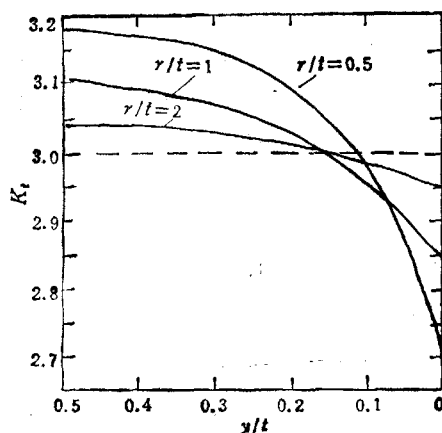


图10 应力集中系数沿厚度方向的变化,  
 $\nu=0.33$ <sup>[13]</sup>

能均匀一致地保证结果的精度,而同样的有限元网格对于不同的裂纹几何及加载状况,所得结果的精度则可能不同。因此我们怀疑文献[2]中关于  $a/c=1$ ,  $a/t=0.2$  的两种孔半径的有限元结果偏低。对于图7中  $a/t=0.2$  时权函数结果比有限元结果<sup>[2,3]</sup>高的情况,我们认为这是由于本文采用的二维无裂纹应力分布与实际无裂纹应力分布的差异造成的,现讨论如下。

## 2. 二维无裂纹应力分布对计算精度的影响

在远方拉伸情况下,孔边无裂纹应力分布实质上是三维的。由于文献中尚得不到这种三维的无裂纹应力分布,在计算中我们采用的是无裂纹应力分布的平面应力解。下面借助于文献中关于三维应力集中系数的研究成果<sup>[15]</sup>,讨论二维无裂纹应力分布对权函数计算精度的影响。图10表明了本文所考虑的三种孔半径情况下,应力集中系数沿孔壁的变化( $\nu=0.33$ )<sup>[15]</sup>。由图可见,实际的应力分布在板中心达到最大值,它高于平面应力解;然后随着向板表面接近而单调减少,在板表面处达到最小值,它低于平面应力解。这种变化的幅度随孔径的增加而减少,并愈接近于平面应力解。对于所考虑的  $r/t=0.5, 1$  和  $2$  的情况,实际应力分布与平面应力解相比在板中心处分别高  $6\%$ ,  $3\%$  和  $1\%$ ;在板表面处则分别低约  $10\%$ ,  $5\%$  和  $2\%$ 。虽然我们不知道  $x > 0$  时实际应力的分布情况,但可以推测,它与平面应力解的差别是一个高度局部化的现象,即随着  $x$  的增加而急剧减少。对于  $r/t=2$  的情况,这种差别完全可以忽略。对于  $r/t=1$  的情况,虽然应力的最大差别可达  $5\%$ ,但在整个裂纹面上积分之后,误差就被减小到可以忽略不计,这一点可由图9中  $a/t=0.2$  这一受影响最严重的情况仍与有限元解相吻合来得到证实。当  $r/t=0.5$  时,平面应力解的误差可高达  $10\%$ ,但由于这种误差是高度局部化的,所以只要裂纹足够长,如象图5中  $r/t=0.5$  和图7中  $a/t=0.5$  的情况,此时裂纹长度  $c$  分别等于  $2r$  和  $0.5r$ ,则平面应力解的误差可忽略不计,所得结果与有限元解相吻合。但当裂

纹较短时,如图7中  $a/z = 0.2$  的情况,此时  $c = 0.2r$ ,平面应力解的误差对计算结果会产生显著的影响,在板表面附近与有限元的差别接近10%,这是在本文所考虑的范围受平面应力解的误差影响最严重的一种情况。由图10可见,即使在这种情况下, $a$ 轴端点处平面应力解的误差仅为3%,且方向相反,所以靠近孔壁处,本文方法仍与有限元解<sup>[3]</sup>相吻合。

以上基于三维应力集中系数的研究结果和平面应力解误差局部化的假设,讨论了二维无裂纹应力分布对权函数计算精度的影响。这一假设可以解释所观察到的现象。在未来的工作中我们将通过三维应力分布的计算来证实这一假设。正如对孔边表面裂纹所做的<sup>[4,6]</sup>一样,我们可以方便地处理其它受载情况及单裂纹的情况。限于篇幅,这些将另文讨论。

#### 四、结 论

文中用三维权函数法计算了孔边对称角裂纹受远方拉伸情况的应力强度因子,所考虑的几何参数为  $r/z = 0.5, 1, 2; a/c = 0.2, 0.5, 1, 2; a/z = 0.2, 0.5$  (限于  $c/r \leq 2$ ),其中大部分是新提供的解。与文献中的有限元结果的广泛比较和详细讨论表明,除了一种情况下权函数结果受二维应力解误差的显著影响外,其余情况的权函数解的误差均在5%之内。文中提示了当用权函数法结合二维无裂纹应力求解三维裂纹问题时,应当注意由应力分布的近似性所可能产生的权函数计算结果的误差,这一点对于小裂纹尤其重要。

#### 参 考 文 献

- [1] Hechmer, J. L. and Bloom, J. M., *Int. J. Fracture* 13, (1977), 732—735.
- [2] Raju, I. S. and Newman, Jr., J. C., ASTM STP 677, C. W. Smith, Ed., (1979), 411—430.
- [3] Nishioka, T. and Atluri, S. N., *AIAA J.*, 21, (1983), 749—757.
- [4] 赵伟,北京航空材料研究所博士学位论文(1988).
- [5] Zhao, W., Wu, X. R. and Yan, M. G., *Engng. Fracture Mech.*, 34, (1989), 593—607.
- [6] Zhao, W., Wu, X. R. and Yan, M. G., *Engng. Fracture Mech.*, 34, (1989), 609—624.
- [7] 赵伟,吴学仁,颜鸣皋,第四届全国疲劳学术会议论文集(1989),328—331.
- [8] Zhao, W., Wu, X. R. and Yan, M. G., in Proc. Fatigue-90, 4th Int. Conf. Fat. & Fat. Threshold. (1990).
- [9] Zhao, W. and Wu, X. R., to appear in Theoretical and Applied Fracture Mechanics, (1990).
- [10] Zhao, W. and Wu, X. R., to appear in Fatigue and Fracture Engng. Mater. Struc. (1990).
- [11] Wu, X. R., *Engng. Fracture Mech.*, 20, (1984), 35—49.
- [12] Wu, X. R., Report 63, TRITA-HEL-0063 ISSN 0281-1502, The Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden (1985). 也见中国航空科技文献 HJB880635(1988).
- [13] Newman Jr., J. C. and Raju, I. S., ASTM STP 791, (Edited by J. C. Lewis and G. Sines), (1983), 1-235-1-256.
- [14] Tan, P. W., Raju, I. S. Shivakumar, K. N. and Newman, Jr., J. C., NASA TM-101527, (1988).
- [15] Folias, E. S., Fracture Mechanics: 19th Symposium, ASTM STP 969, T. A. Cruse, Ed. (1988), 56—72.

## STRESS INTENSITY FACTORS FOR CORNER CRACKS AT HOLE UNDER REMOTE TENSION

Zhao Wei Wu Xueren Yan Minggao

(*Institute of Aeronautical Materials, Beijing 100095, China*)

**Abstract** The three dimensional weight function method developed in [4,5] is used to determine stress intensity factors for corner cracks at a hole in finite thickness plates subjected to remote tensile loading. The geometry parameters considered are  $r/t=0.5,1,2$ ;  $a/c=0.2,0.5,1,2$ ;  $a/t=0.2,0.5$  within  $c/r \leq 2$ . The results are compared where possible, with other solutions available in the literature. Generally good agreement is observed. The effect of two dimensional unflawed stress distribution on the weight function results is discussed.

**Key words** three dimensional weight function, corner crack at hole, stress intensity factor