第 23 卷 第 3 期　　力 学 学 报　　Vol. 23, No. 3
1991 年 5 月　　ACTA MECHANICA SINICA　　May, 1991

域外奇点法解杆的弹塑性扭转问题

王元淳　　关谷 壮　岡本正明
(上海交通大学)　　(大阪电气通信大学)

提要　本文提出一种借助于沙丘比拟的求解杆弹塑性扭转问题的域外奇点法，这种方法可降低所求问题的维数，有效地避免解的奇异性．它具有方法简单，不需要数值积分，计算时间短和精度高等优点．

关键词　域外奇点法，弹塑性扭转，沙丘比拟，格林函数

1. 前言

任意形状截面直杆在弹塑性扭转时，确定截面上弹性区域和塑性区域的边界线是一个复杂的问题，除极少数简单截面能得到解析解外，必须采用实验或数值计算方法求解．本文提出域外奇点法和沙丘比拟法并用，求解理想弹塑性材料直杆弹塑性扭转问题的方法，计算结果表明了它的有效性．

2. 基本方程

设任意形状截面直杆在弹塑性扭转状态下，截面上的弹性区域和塑性区域分别为 Ω^e 和 Ω^p，相应的应力函数分别为 ϕ^e 和 ϕ^p，则

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2\phi^e &= -2G\theta, \quad \text{在 } \Omega^e \text{ 上} \\ |\mathrm{grad}\phi^p| &= k, \quad \text{在 } \Omega^p \text{ 上} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

式中，G 为材料的剪切弹性模量，θ 为杆的单位长度内的扭转角，k 为剪切屈服极限．

边界条件和弹塑性区域边界上的连续条件分别为

$$\phi^e = C_m \tag{2}$$

和

$$\phi^e = \phi^p \qquad \tau^e = \tau^p \tag{3}$$

其中，m 为边界数，C_m 为常数，单连域时可取为 0．τ^e 和 τ^p 分别是弹塑性区域边界上弹性区域和塑性区域的合剪应力．

3. 域外奇点解法

设截面上弹性区域内任意点 $P(x,y)$ 的应力函数为

$$\phi^e = \phi - \frac{1}{2}G\theta(x^2 + y^2) \tag{4}$$

将它代入式(1)的第一式，有

$$\nabla^2\phi = 0 \tag{5}$$

按积分方程法求解时，上式的解可取为[1],[3]

本文于 1990 年 3 月 19 日收到第一稿，1990 年 7 月 12 日收到修改稿．

$$\phi(P)=\sum_{i=1}^{n}A_i\phi^*(P,R_i) \tag{6}$$

式中

$$\phi^*(P,\ R_i)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r} \tag{7}$$

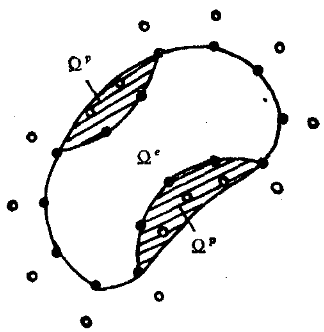

图 1

为无限域中的格林函数，P 和 R_i 为域内的任意两点，r 为点 P 和点 R_i 之间的距离．为避免解的奇异性，将奇点 R_i 设置在弹性区域外，称为外点，在图 1 中以符号"∘"表示．

在弹性区域的边界上取 n 个边界点，称为节点，在这些点上满足边界条件式(2)，就可求出式(6)中的系数 A_i．对于单连域

$$\sum_{i=1}^{n}A_i\phi^*(P'_j,R_i)=\frac{1}{2}G\theta(x_j^2+y_j^2),\quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{8}$$

其中，P'_j 为节点，在图 1 中以符号"·"表示．多连域场合，在每一边界上可写出类似上式的方程式，这时等号右边有常数 C_m，其中一个可取为 0，其它按位移单值条件决定．

同时，在弹塑性区域边界上应满足连续条件式(3)，即

$$\sum_{i=1}^{n}A_i\phi^*(P'_j,R_i)-\frac{1}{2}G\theta(x_j^2+y_j^2)=\phi^p(P'_j) \tag{9}$$

和

$$|\mathrm{grad}\phi^e|=|\mathrm{grad}\phi^p|=k \tag{10}$$

计算时首先在截面上假定一弹塑性区域边界，通常可取弹性扭转时的边界作为 0 次近似，按式(8)和(9)求出系数 A_i，由式(6)和(4)得到 0 次近似应力函数 ϕ^e．然后判断式(10)是否满足，如不满足则对 0 次近似进行修正，得到第 1 次近似弹塑性区域边界，并将此边界上各点的 ϕ^p 值代入式(9)，重复前述过程，直到式(10)满足为止．计算中需要已知塑性区域应力函数 ϕ^p 的值，本文采用沙丘比拟求得．

4. 算例

设杆的截面为边长 $2a$ 的正方形，考虑对称性取 1/8 区域进行计算，仅在两直角边上及其外侧分别配置 8 个节点和外点．对应于各种杆内单位长度扭转角的弹塑性区域边界如图 2 所示．图中粗直线为本文的解，符号"∘"为 Ponter 的解[5]，两者很吻合．

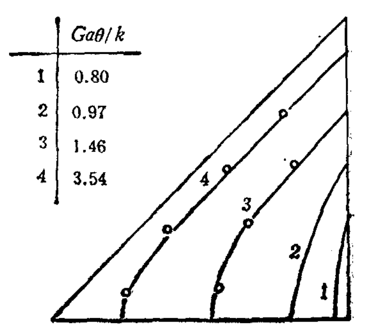

图 2

5. 结语

本文采用域外奇点法确定杆弹塑性扭转时截面上弹性区域的应力函数，可使所求问题的维数降低一次和不需进行数值积分．又将奇点取在域外，避免了解的奇异性．截面

上塑性区域的应力函数则用沙丘比拟确定。因此本文方法简单，具有输入数据少、编制程序容易、计算时间短和精度高等优点。求解时迭代次数随塑性区域的扩展而增加，图 2 中曲线 1 和 2 由第 2 次近似得到，曲线 3 和 4 由第 7 次近似得到，可见收敛性较好。外点配置对解的精度有影响，但在单连域情况下，只要离边界不太近，通常能得到满足的结果。

参　考　文　献

[1] 村島定行，代用電荷法とその応用，森北出版，(1983)。

[2] 関谷　壮，積分方程式による弾性解析の変遷，日本機械学会誌(1984)，87—793。

[3] 王元淳，域外奇点法在弹性力学中的应用，应用力学学报，4(1988)。

[4] 王元淳，域外奇点镜像法解杆的扭转问题，力学与实践，5(1989)。

[5] Ponter, A. R. S. On Plastic Torsion, *Int. J. Mech. Sci.*, 8(1966).

[6] 王元淳，边界元法基础，上海交通大学出版社(1989)。

OUTSIDE SINGULAR POINT METHOD FOR THE ELASTOPLASTIC TORSION PROBLEMS

Wang Yuanchun

(*Shanghai Jiaotong University*)

T. Sekiya,　S. Okamoto

(*Osaka Electro-Communication University*)

Abstract　In this paper, the outside singular point method with the aid of sand-heap analogy for solving elastoplastic torsion problems is proposed. This method can reduce the dimensions of the problem and effectively avoid the singularity of the solution and needs no numerical integration. It has the advantages in simplicity, efficiency and accuracy.

Key words　Outside singular point method, Elastoplastic torsion, Sand-heap analogy, Green's function