第 23 卷 第 4 期　　力 学 学 报　　Vol. 23, No. 4
1991 年 7 月　　ACTA MECHANICA SINICA　　July, 1991

# 岩土中弹塑性渗透固结问题的参变量变分原理1)

曾　攀　　　钱令希
（西南交通大学力学所）　（大连理工大学力学所）

**提要**　本文给出渗透固结过程的参变量变分原理,可以用来处理岩土弹塑性渗透固结问题,并不受 Drucker 假设的限制,对于关连或非关连塑性流动情形皆可.

**关键词**　渗透,渗透固结,参变量变分原理

## 一、引　　言

自 1925 年 K. Terzaghi 提出有效应力的概念后，就有许多学者致力于渗透固结力学的研究,但都仅限于几个简单的情形[1]. 随着计算技术的发展，便产生了一些有关的变分原理，特别是 1964 年 Gurtin[2] 等证明了许多驻值原理的稳定泛函关于时间 $t$ 的 Laplace 变换为最小泛函后，为处理该问题开辟了另一途径，Sandhu 及 Wilson[3] 曾利用该原理建立了用于线弹性固结问题的变分原理,这些都限于弹性范围，而对于弹塑问题，由于问题的复杂性，以上的 Laplace 变换原理则不一定成立. 本文所要讨论的问题实际上是一个弹塑性固结过程;还有岩土材料的非关连流动性(不服从 Drucker 假定).

钟万勰[4,5]提出的参变量变分原理已可以高效、方便地处理常规的弹塑性问题，并且不受 Drucker 假定的限制;弹塑性渗透固结问题除具有一般的弹塑性外，还耦合有孔隙压力 $P$，并随时间 $t$ 而变化(渗透固结微分方程),通常,参变量变分原理给出的是增量形式,这为处理渗透固结过程化为关于时间 $t$ 的增量问题带来很大方便,本文则是引入参变量变分原理建立起处理所提问题的泛函,并给出证明.

## 二、基 本 方 程

弹塑性固结问题的基本方程即在常规的弹塑性方程的基础上多了渗透固结方程及相应的边界条件[1,6].

平衡方程:　$$d\bar{\sigma}_{ij,j} + db_i + dP_{,i} = 0 \tag{1}$$

应变位移关系:　$$2d\varepsilon_{ij} = du_{i,j} + du_{j,i} \tag{2}$$

本构关系:　$$d\bar{\sigma}_{ij} = D_{ijkl}(d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon^p_{kl}) \tag{3}$$

1) 本文受国家博士后基金资助.

本文于 1989 年 11 月 12 日收到第一稿，1990 年 6 月 13 日收到修改稿.

$$d\varepsilon_{ij}^{p} = \lambda \frac{\partial g}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} \tag{4}$$

$$f(\bar{\sigma}_{ij}, \varepsilon_{ij}^{p}) \leqslant 0 \tag{5}$$

渗透方程：

$$\bar{K}\kappa dP_{,ii} = dP_{,t} - d\sigma_{\mathrm{oct},t} \tag{6}$$

边界条件：

$$d\sigma_{ij}n_j = d\bar{T}_i \ (\text{在 } S_1 \text{ 上}) \tag{7}$$

$$du_i = d\bar{u}_i \ (\text{在 } S_2 \text{ 上}) \tag{8}$$

$$\kappa(dP_{,i} + \rho_w db_i) = d\bar{Q} \ (\text{在 } S_3 \text{ 上}) \tag{9}$$

以上 $d\bar{\sigma}_{ij}$，$dP$ 分别为有效应力(骨架应力)和孔隙压力增量，$f$、$g$ 分别为屈服函数和塑性势函数，$\lambda$ 为比例因子，$\kappa$ 为渗透系数，$\bar{K}$ 为弹性系数$\left(=\frac{E}{2(1-2\nu)}\right)$，$\sigma_{\mathrm{oct}}$ 为体积应力，$d\bar{Q}$ 为垂直于表面 $S_3$ 的规定液体流量增量，$\rho_w$ 为液体质量密度。

总应力、有效应力以及孔隙压力有以下关系：

$$d\sigma_{ii} = d\bar{\sigma}_{ii} + dP \tag{10}$$

$$d\sigma_{ij} = d\bar{\sigma}_{ij} \ (i \neq j) \tag{11}$$

将 (5) 式作一阶展开并利用 (3) 及 (4)，有

$$f = f(\bar{\sigma}_{ij}^{0}) + D_{ijkl}\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} d\varepsilon_{kl} + \left[\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^{p}} \frac{\partial g}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} - D_{ijkl}\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} \frac{\partial g}{\partial \bar{\sigma}_{ij}}\right]\lambda \tag{12}$$

并且：

$$\begin{cases} \lambda = 0 \ \text{对于} \ f < 0 \ (\text{弹性或卸载}) \\ \lambda \geqslant 0 \ \text{对于} \ f = 0 \ (\text{塑性}) \end{cases} \tag{13}$$

在 (12) 中引入一补偿因子 $\nu$，则原本构关系 (3)—(5) 可重新写为：

$$\begin{gathered} f(d\varepsilon_{ij}, \lambda) + \nu = 0 \\ \lambda\nu = 0, \ \lambda, \ \nu \geqslant 0 \end{gathered} \tag{14}$$

以上的 $d\bar{\sigma}_{ij}$，$d\varepsilon_{ij}$，$du_i$，$dP$ 都是时间 $t$ 的函数。

## 三、变 分 原 理

首先构造一泛函 $\Pi(du_i, dP)$

$$\begin{aligned} \Pi(du_i, dP) = &\int_{\Omega}\left\{\frac{1}{2} d\varepsilon_{ij}D_{ijkl}d\varepsilon_{kl} - db_i du_i + dP \cdot d\varepsilon_{\mathrm{vol}} \right. \\ &\left. - \lambda D_{ijkl}\frac{\partial g}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} d\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} \cdot \Delta t \cdot \kappa(dP_{,i} + \rho_w db_i)^2\right\} d\Omega \\ &- \int_{S_1} d\bar{T}_i du_i dS + \int_{S_3} \Delta t \cdot d\bar{Q} dP dS \end{aligned} \tag{15}$$

其中：$d\varepsilon_{\mathrm{vol}}$ 为体积应变增量，$\Delta t$ 为 $t$ 时刻的时间增量，$\lambda$ 为 (4) 中的比例因子，即为参变量。

**势能变分原理：**

对于任一时刻 $t$，就时间增量 $\Delta t$，在所有满足应变位移关系 (14) 和几何边界条件 (8) 的可能位移及孔隙压力增量场中，真实解使泛函 (15) 在状态方程 (14) 的控制下取

总体最小，其中 $du_i$、$dP$ 是自变量函数，$\lambda$ 是不参加变分的参变量(其物理意义就是塑性流动参数)，这是现代变分法可以不对参变量求变分的重要思想，进一步可见文献[4]、[5].

**证明:** 由于泛函(15)始终依赖于系统$(du_i, dP_i)$，则

$$\delta\Pi=\int_\Omega\Big\{D_{ijkl}d\varepsilon_{ij}\delta(d\varepsilon_{ij})-db_i\delta(du_i)+dP\delta(d\varepsilon_{vol})+d\varepsilon_{vol}\delta(dP)-\lambda D_{ijkl}\frac{\partial g}{\partial\bar\sigma_{ij}}\delta(d\varepsilon_{ij})-\Delta t\kappa(dP_{,i}+\rho_w db_i)\cdot\delta(dP_{,i})\Big\}d\Omega-\int_{S_1}d\bar T_i\delta(du_i)dS+\int_{S_3}\Delta t\cdot d\bar Q\cdot\delta(dP)dS \quad (16)$$

应用 Green 定律及(3)、(4)，则(16)式中的第一项积分:

$$\int_\Omega D_{ijkl}d\varepsilon_{ij}\delta(d\varepsilon_{ij})d\Omega=\int_\Omega[d\bar\sigma_{ij}+D_{ijkl}d\varepsilon^p_{ij}]\delta(d\varepsilon_{ij})d\Omega=\int_{S_1}d\bar\sigma_{ij}n_j\delta(du_i)dS-\int_\Omega d\bar\sigma_{ij,j}\delta(du_i)d\Omega+\int_\Omega\lambda D_{ijkl}\frac{\partial g}{\partial\bar\sigma_{ij}}\delta(d\varepsilon_{ij})d\Omega \quad (17)$$

(16)式中的第三项积分为:

$$\int_\Omega dP\delta(d\varepsilon_{vol})d\Omega=\int_{S_1}dP\delta(du_{vol})\cdot n_idS-\int_\Omega dP_{,i}\delta(du_i)d\Omega \quad (18)$$

(16)式中的第六项积分为:

$$\int_\Omega\Delta t\cdot\kappa(dP_{,i}+\rho_w db_i)\delta(dP_{,i})d\Omega=\int_{S_3}\Delta t\cdot\kappa(dP_{,i}+\rho_w db_i)n_i\delta(dP)dS-\int_\Omega\Delta t\cdot\kappa dP_{,ii}\delta(dP)d\Omega \quad (19)$$

将(17)—(19)代入(16)有:

$$\delta\Pi=\int_\Omega\{-d\bar\sigma_{ij,j}-db_i-dP_{,i}\}\delta(du_i)d\Omega+\int_\Omega\{\Delta t\cdot\kappa dP_{,ii}+d\varepsilon_{vol}\}\delta(dP)d\Omega+\int_{S_1}\{d\sigma_{ij}n_j+ldPn_j-d\bar T\}\delta(du_i)dS+\int_{S_3}\{\Delta t\cdot d\bar Q-\Delta t\cdot\kappa(dP_{,i}+\rho_w db_i)n_i\}\delta(dP)dS \quad (20)$$

(其中 $i\neq j$ 时，$l=0$)

令 $\delta\Pi=0$，由于 $\delta(du_i)$、$\delta(dP)$ 很小并具有任意性，注意到 $d\bar Q$ 垂直于表面 $S_3$，有

$$d\bar\sigma_{ij,j}+db_i+dP_{,i}=0\ (\text{在}\ \Omega\ \text{内}) \quad (21)$$

$$\Delta t\cdot\kappa dP_{,ii}+d\varepsilon_{vol}=0\ (\text{在}\ \Omega\ \text{内}) \quad (22)$$

$$(d\bar\sigma_{ij}+ldP)n_j-d\bar T=0\ (\text{在}\ S_1\ \text{上}) \quad (23)$$

$(i\neq j\ \text{时}\ l=0)$

$$d\bar{Q}-\kappa(dP_{,i}+\rho_w db_i)=0\ (在\ S_3\ 上) \tag{24}$$

由 (10) (11) 式有 (23) 式中的

$$d\bar{\sigma}_{ij}+l dP=d\sigma_{ij} \tag{25}$$

显然 (21)、(23) 及 (24) 分别是平衡方程、应力边界条件以及渗透边界条件，而 (22) 式为

$$\kappa dP_{,ii}+\frac{d\varepsilon_{vol}}{\Delta t}=0 \tag{26}$$

当 $\Delta t\to 0$ 时：

$$\kappa dP_{,ii}+d\varepsilon_{vol,t}=0 \tag{27}$$

又：

$$d\varepsilon_{vol}=\frac{1}{\bar{K}}\,d\bar{\sigma}_{oct}=\frac{1}{\bar{K}}(d\sigma_{oct}-dP) \tag{28}$$

则 (27) 式为：

$$\kappa\bar{K}dP_{,ii}=dP_{,t}-d\sigma_{oct,t} \tag{29}$$

这就是渗透固结方程 (6)，又由于 $D_{ijkl}$ 正定 及 $\kappa<0$，所以 $\delta^2\Pi\geqslant 0$，则由 $\delta\Pi=0$ 导出的状态变量使 $\Pi$ 取总体最小值。

对于弹性渗透固结问题，令 $\lambda=0$，则泛函 (15) 退化。

## 四、实　例

如图 1 所示是一维弹塑性固结问题的计算模型，Terzaghi 单向固结理论可以对该问题求得解析解，这里我们应用参变量变分原理来进行处理。

土体在外载荷的作用下，变形是均匀的，设：

$$\left.\begin{aligned} d\varepsilon_x &= \xi_1 \\ d\varepsilon_z &= \xi_2 \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

取中间 $[z,\ z+dz]$ 一段土体，由 (15) 式建立起该弹性固结问题的势能泛函：

$$\Pi(\xi_1、\xi_2、dP)=\int_0^L\left\{\frac{1}{2}[\xi_1^2D_1+2\xi_1\xi_2D_2+\xi_2^2D_3]+(\xi_1+\xi_2)dP-\frac{1}{2}dt\kappa\left(\frac{dP}{dz}\right)^2\right\}dzdx-\int_0^L q_0\xi_2dzdx+\int_{S_3}dtdQdPdS \tag{31}$$

其中：$D_1$、$D_2$、$D_3$ 为弹性系数，有

$$D_1=D_2\bar{\mu},\ \bar{\mu}=\frac{1-\mu}{\mu},\ D_2=\frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\ (对平面应变)$$

由变分原理：

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\xi_1}=\frac{\partial\Pi}{\partial\xi_2}=\frac{\partial\Pi}{\partial dP}=0 \tag{32}$$

得到：

$$\xi_1\bar{\mu}D_2+\xi_2D_2+dP=0 \tag{33}$$

$$\xi_1D_2+\xi_2\bar{\mu}D_2+dP-q_0=0 \tag{34}$$

$$(\xi_1+\xi_2)+dt\kappa\, d^2P/dz^2=0 \tag{35}$$

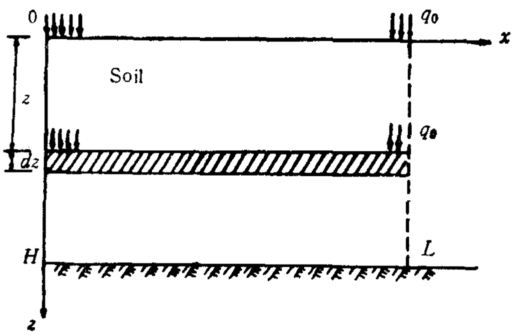


图 1　一维固结问题的计算模型

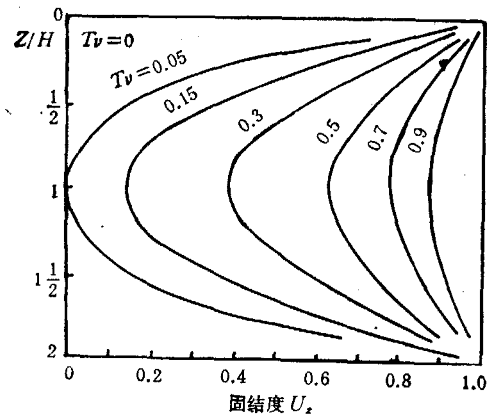


图 2　土层中各点在不同时刻 ($T_v$) 的固结度

令
$$C_v = \frac{E\kappa}{2(1+\mu)(1-2\mu)}$$

由 (33)—(35) 可得到:

$$C_v \frac{d^2P}{dz^2} = \frac{dP}{dt} \tag{36}$$

$$\xi_1 = \frac{P(1-\bar{\mu}) - q_0}{(\bar{\mu}^2 - 1)D_2} \tag{37}$$

$$\xi_2 = \frac{P(1-\bar{\mu}) + q_0\bar{\mu}}{(\bar{\mu}^2 - 1)D_2} \tag{38}$$

(36) 式的初始条件为:

$t = 0$, $P = q_0$

$t > 0$, $z = 0$, $P = 0$ (透水边界)

$t > 0$, $z = 2H$, $P = 0$ (假设的对称透水条件)

由上述条件,应用富里哀级数,(36) 的解答:

$$P = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{4q_0}{\pi(2m+1)} \sin\frac{\pi(2m+1)}{2H} z\right) \exp\left(-\frac{\pi^2(2m+1)^2}{4}\frac{C_v t}{H^2}\right) \tag{39}$$

$z$ 深度处土的固结度 $U_z$ 表示该处超静水压力的消散程度,即

$$U_z = \frac{q_0 - P}{q_0}$$

$$= 1 - \sum_{m=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2m+1)}\left[\sin\frac{\pi(2m+1)}{2}\frac{z}{H}\right] \exp\left(-\frac{\pi^2(2m+1)^2}{4H^2}C_v t\right) \tag{40}$$

设无因次时间因数

$$T_v = C_v t / H^2$$

则 $U_z = f(T_v)$, 图 2 给出 $U_z$ 的曲线族,每一等时线(对应于某特定时间 $t$ 或时间因数 $T_v$) 上的各点,给出了该时刻各个深度处所达到的固结度.

以上解答和 Terzaghi 单向固结理论解完全一致，下面给出该例题的弹塑性解答，控制塑性发展的屈服准则及塑性势取为：

$$f = \bar{\sigma}_x - K_a \bar{\sigma}_z - 2c\sqrt{K_a}$$

$$g = \bar{\sigma}_x - \omega \bar{\sigma}_z$$

其中：$K_a = \mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$，$c$、$\varphi$、$\omega$ 为材料常数。

由 (12) 式得到状态方程：

$$(\bar{\mu} - K_a)d\varepsilon_x + (1 - \bar{\mu}K_a)d\varepsilon_z - [\bar{\mu} - K_a - \omega(1 - \bar{\mu}K_a)]\lambda + \nu = 0 \tag{41}$$

系统的势能泛函：

$$\begin{aligned} \Pi(\xi_1、\xi_2、dP) = & \frac{1}{2}[\xi_1^2 D_1 + 2\xi_1\xi_2 D_2 + \xi_2^2 D_1]Ldz + (\xi_1 + \xi_2)dP\,Ldz \\ & - \frac{1}{2}dt \cdot \kappa \cdot \left(\frac{dP}{dz}\right)^2 Ldz - D_2\lambda[(\bar{\mu} - \omega)\xi_1 - (1 - \bar{\mu}\omega)\xi_2]Ldz \\ & - q_0\xi_2 Ldz + \int_{S_2} dt \cdot dQ \cdot dP\,dS \end{aligned} \tag{42}$$

由变分原理可推导出以下结果：

$$C_v \frac{d^2P}{dz^2} = \frac{dP}{dt} + \alpha\frac{d\lambda}{dt} \tag{43}$$

$$\left(\alpha = \frac{1}{2}D_2(1 + \omega)(1 - \bar{\mu})\right)$$

$$\xi_1 = \frac{P(1 - \bar{\mu}) - q_0 + D_2(1 + \bar{\mu}^2)\lambda - 2\bar{\mu}\omega D_2\lambda}{(\bar{\mu}^2 - 1)D_2} \tag{44}$$

$$\xi_2 = \frac{P(1 - \bar{\mu}) + \bar{\mu}q_0 + [(1 + \bar{\mu}^2)\omega - 2\bar{\mu}]D_2\lambda}{(\bar{\mu}^2 - 1)D_2} \tag{45}$$

这就是单向固结问题的结果。

## 五、小　结

文中所给的变分原理完全继承了原参变量变分原理的特点；

1. 可以用于岩土的弹性或弹塑性渗透固结动力学问题；
2. 其塑性不受 Drucker 假设的限制(关连或非关连流动法则均可)；
3. 可以很方便地应用有限元技术；
4. 可化为求解参数二次规划问题。

## 参　考　文　献

[1] 天津大学编，土力学与地基，人民交通出版社 (1986).

[2] Gurtin, M. E., Variational principles for elastodynamics, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **16**, 1(1964).

[3] Sandhu, Ranbir, S. and Wilson, E. L., Finite element analysis of flow of saturated porous elastic media, *J. Eng. Mech. Div. ASCE*, **95**, 3(1969).

[4] Zhong, W. X. and Zhang, R. L., Parametric variational principles and its quadratic programming solutions in plasticity, Proceedings of ICCEM, China (1987).

[5] Zhong, W. X. and Zhang, R. L., The parametric variational principle for elastoplasticity, *Acta Mechanica Sinica*, 4, 2(1988).
[6] Desai, C. S. and Christian, J. T., 岩土工程数值方法,中国建工版 (1981).

# THE PARAMETRIC VARIATIONAL PRINCIPLE FOR ELASTO-PLASTICITY CONSOLIDATION IN SOIL

Zeng Pan Qian Lingxi

*(Research Institute of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology)*

**Abstract** based on the effective stress approach by Terzaghi[1], the paper presents the parametric variational principle for seepageand consolidation with elastoplasticity in soil. The proposed principle is nciple is free from the restraint of Drucker's postulate of plasticity, consequently suitable for solving the nonassociated plastic flow problems in seepage and consolidation of soil.

**Key words** seepage, consolidation, parametric variational principl principle