

血管位移波的力学模型*

丁光宏 柳兆荣

(复旦大学应用力学系, 上海, 200433)

提要 本文在临床观察和模型实验的基础上提出了血管位移波的力学模型, 并归结出了位移波的控制方程. 应用摄动理论和数值方法, 求得了位移波的波形和位移波产生的判别准则. 从中我们发现, 位移波仅和血流的脉动速度及血管壁力学特性有关, 而和压力波无直接关系. 最后本文还给出了一个适用于临床的位移波发生判别准则, 实验发现它和临床观察是相符合的.

关键词 血管位移波, 压力波, 流量波, 摄动理论

一、引言

脉诊在中医诊断上占有相当重要的地位, 近年来应用生物力学原理来阐述脉象的本质, 引起了广泛的兴趣. 传统的看法认为脉象就是挠动脉处血管的径向搏动, 它和该处的压力波是一致的^[1,2]. 近年来, 由于超声技术的发展, 人们发现在一些浅表动脉处, 血管不仅有径向变化, 而且还会像绳子一样作整体的位移振荡^[3-5]. 这种周期性的位移运动称为位移波. 吴望一等人^[4,5]认为, 中医手指或脉象仪传感器探头感受到的就是这种位移波, 而不是血管的径向搏动. 他们认为位移波是由于动脉受到周围组织非对称约束产生的非对称反作用力而引起的.

1985年以来, 我们在临床上应用日本产的 QFM-1000 型多普勒超声血流仪对近 6000 多人的颈总动脉管壁的运动进行观察和记录发现, 几乎所有人的颈总动脉都存在径向搏动, 只是对血管弹性好的人(如青年人)搏动的幅度较大, 而对血管弹性较差的人(如老年人或动脉粥样硬化患者)其搏动的幅度较小而已. 但是位移波并非所有的人都有, 有的人有很明显的整体位移搏动(同时也有径向搏动), 而多数人却没有明显的位移波.

为了弄清血管位移波的本质, 我们应用可瘪管装置作了模型实验^[6,7]. 实验发现: 血液的脉动流在一定的条件下能引起血管壁失稳, 进而产生整体的位移振荡. 这种现象不仅存在于可瘪管中, 而且也存在于动脉系统中. 事实上, 无论血管处于瘪塌状态还是处于完全张开状态, 只要血管内血流速度超过某个和血管壁力学特性有关的临界速度时, 血管都可能产生整体的位移波动, 血管的瘪塌只是使这个临界速度降低而已. 此外, 实验发现这种振荡似乎和周围组织约束的对称性无关, 在完全对称约束甚至没有约束的情况下, 位移振荡照样能够发生.

* 国家自然科学基金资助项目.
本文于 1990 年 5 月 1 日收到.

本文以临床观察为背景,以模型实验为依据,归纳出了血管位移波的数学模型和控制方程,通过对方程摄动和数值求解研究了位移波的振荡规律和产生的判别准则。从中我们发现,位移波仅和血液的脉动速度及血管壁力学特性有关,和压力波并无直接关系。将本文提出的位移波发生判据应用到临床中发现,本文结论和临床观察是一致的。因此,我们认为当位移波发生时,中医切脉感受的应是径向搏动和整体搏动的复合,它既和压力波有关也和流速波有关,然而当位移波没有发生时,切脉所感受的仅是径向搏动,它在很大程度上是和压力波一致的。

二、理论模型

根据对临床和模型实验的观察,我们认为:血管内血流脉动速度 $v(t)$ 引起血管壁失

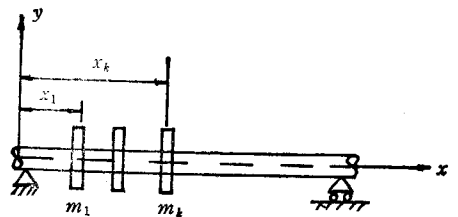


图 1 血管位移波的力学模型示意图

稳进而导致了管壁的整体位移振荡。因此,我们将血管看作一个带有集中质量(相当于中医切取浮脉时的手指或传感器探头)的粘弹性简支梁,如图 1 所示。在线性假设下,血管壁内的应力 σ 与应变 γ 满足下列关系式:

$$\sigma = E \cdot \gamma + \eta_w \cdot \dot{\gamma} \quad (1)$$

其中 E 和 η_w 分别表示管壁的弹性模量和管壁的粘性系数,“ \cdot ”表示对时间 t 求偏导。以 x_i 和 $m_i (i = 1, 2, \dots, k)$ 表示第 i 个集中质量的位置和大小。依照和文章[5]中类似的推导,并注意应力-应变关系式(1),我们可得到血管位移波的控制方程:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \eta_w \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t} + (\rho A v^2 - \rho A v x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2\rho A v \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + \rho A v \frac{\partial y}{\partial x} + M(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

这里,

$$M(x) = \rho A + m_i + \sum_{j=1}^k m_j \cdot \delta(x - x_j)$$

其中 $y(x, t)$ 表示血管偏离平衡位置的位移。 I 和 A 分别为血管的惯性矩和截面积。 ρ 和 v 分别表示血液密度和流速,并假设 V 仅是时间 t 的函数。 m_i 表示单位管长质量。 $\delta(x - x_j)$ 为 Dirac 函数。下面应用 Galerkin 方法求解方程(2),将 $y(x, t)$ 按下列形式展开:

$$y(x, t) = \sum_{m=1}^N \phi_m(x) f_m(t) \quad (3)$$

这里 $\phi_m(x)$ 为振型函数,它满足:

$$\frac{d^4 \phi_m}{dx^4} = \lambda_m^4 \phi_m$$

$$\phi_m(0) = \phi_m(L) = \frac{d^2 \phi_m(0)}{dx^2} = \frac{d^2 \phi_m(L)}{dx^2} = 0 \quad (m = 1, \dots, N)$$

于是

$$\phi_m = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{m\pi x}{L} \quad (4)$$

$$\lambda_m = \frac{m\pi}{L}$$

这里 L 为管长, $m = 1, 2, \dots, N$. 将表达式(3)和(4)代入方程(2)后, 两边同时乘以 ϕ_n ($n = 1, 2, \dots, N$), 并关于 x 在 $(0, L)$ 上积分, 注意到 $\phi_m(x)$ 的正交性, 有

$$\sum_{m=1}^N (A_{mn} \ddot{f}_m + B_{mn} \dot{f}_m + C_{mn} f_m) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (5)$$

这里

$$A_{mn} = (\rho A + m_i) \delta_{mn} + \sum_{j=1}^k m_j \phi_m(x_j) \cdot \phi_n(x_j)$$

$$B_{mn} = \begin{cases} 2\rho A v \frac{mn}{n^2 - m^2} [1 - (-1)^{m+n}] & m \neq n \\ \eta_w I \lambda_m^4 & m = n \end{cases}$$

$$C_{mn} = \begin{cases} \left[-2\rho A v \frac{m^3 n}{(n^2 - m^2)^2} + \rho A v \frac{mn}{n^2 - m^2} \right] \cdot [1 - (-1)^{m+n}] & m \neq n \\ EI \lambda_m^4 - \rho A v^2 \frac{m^2 \pi^2}{L^2} + \rho A v \frac{m^2 \pi^2}{2L} & m = n \end{cases}$$

我们知道方程(5)中起主要作用的是其基本振型, 于是取 $N = 1$, 方程(5)简化为:

$$\ddot{f}_1 + \frac{\pi^4 I}{M_1 L^4} \eta_w \dot{f}_1 + \frac{\omega_N^2}{v_c^2} \left[v_c^2 - v^2(t) + \frac{1}{2} L v(t) \right] f_1 = 0 \quad (6)$$

这里

$$\omega_N^2 = \frac{\pi^4}{L^4} \left(\frac{EI}{M_1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

$$v_c = \frac{\pi}{L} \left(\frac{EI}{\rho A} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

$$M_1 = \rho A + m_i + \sum_{j=1}^k m_j \sin \frac{\pi x_j}{L} \quad (9)$$

ω_N 和 v_c 分别称为管道的固有频率和临界速度. 如果在方程(6)中令 $\eta_w = 0$, 则方程退化为弹性管情形:

$$\frac{d^2 f_1}{d\tau^2} + g(\sigma\tau) f_1 = 0 \quad (10)$$

这里

$$\tau = \omega_N t, \quad \varepsilon = \frac{\omega}{\omega_N} \quad (11)$$

$$g(\varepsilon\tau) = g(\omega t) = 1 - \frac{v^2(\varepsilon\tau)}{v_c^2} + \frac{1}{2} \frac{L \dot{v}(\varepsilon\tau)}{v_c^2} \quad (12)$$

τ 为无量纲时间, ω 为血液脉动的圆频率, ε 表示血液脉动频率与血管固有频率之比. 在正常生理情况下, $\omega \approx 0.5 \sim 1.3$, $\omega_N \approx 0(10^2)$, 因此 ε 是一个小参数, 从而可用摄动方法求解. 如果考虑血管的粘性影响, 即 $\eta_w \neq 0$, 那么对方程(6)作变换:

$$f_1 = e^{-\delta \varepsilon \tau} \tilde{f}_1 \quad (13)$$

则方程(6)变成

$$\frac{d^2 \tilde{f}_1}{d\tau^2} + [g(\varepsilon\tau) - \delta^2 \varepsilon^2] \tilde{f}_1 = 0 \quad (14)$$

这里

$$\delta = \frac{1}{2\omega} \frac{\pi^4 l}{M_1 L^4} \eta_w \quad (15)$$

显然方程(14)和方程(10)具有同样的形式, 因此, 对粘弹情况只要作变换(13)就可以将问题化为弹性情况. 对方程(10), 我们引入下列两个变量 ξ 和 η :

$$\xi = \varepsilon\tau \quad \eta = \frac{b(\xi)}{\varepsilon} + \dots \quad (16)$$

$b(\xi)$ 为待定函数, η 的选择满足:

$$\frac{d\eta}{d\tau} = b'(\xi) = 0(1) \quad (17)$$

应用摄动方法可求出 f_1 关于 ε 的零级近似解 f_{10} :

情况 1 在弹性情况下, 若 $g(\varepsilon\tau)$ 在整个心动周期中都满足 $g(\varepsilon) \geq \alpha > 0$, 则:

$$f_{10} = [g(\omega t)]^{-0.25} \cdot \left[a_0 \cos \left(\frac{\omega_N}{\omega} \int_0^{\omega t} \sqrt{g(\xi)} d\xi \right) + b_0 \sin \left(\frac{\omega_N}{\omega} \int_0^{\omega t} \sqrt{g(\xi)} d\xi \right) \right] \quad (18a)$$

在粘弹情况下, 若 $g(\varepsilon\tau) > \delta^2 \varepsilon^2$, 则

$$f_{10} = \frac{e^{-\delta \omega t}}{[g(\omega t) - \delta^2 \varepsilon^2]^{0.25}} \left[a_0 \cos \left(\frac{\omega_N}{\omega} \int_0^{\omega t} \sqrt{g(\xi) - \delta^2 \varepsilon^2} d\xi \right) + b_0 \sin \left(\frac{\omega_N}{\omega} \int_0^{\omega t} \sqrt{g(\xi) - \delta^2 \varepsilon^2} d\xi \right) \right] \quad (18b)$$

情况 2 在弹性情况下, 若 $g(\varepsilon\tau)$ 在整个心动周期中都满足, $g(\varepsilon) \leq -\alpha < 0$, 则:

$$f_{10} = [-g(\omega t)]^{-0.25} \cdot \left[a_0 \exp \left(\frac{\omega_N}{\omega} \int_0^{\omega t} \sqrt{-g(\xi)} d\xi \right) + b_0 \exp \left(-\frac{\omega_N}{\omega} \int_0^{\omega t} \sqrt{-g(\xi)} d\xi \right) \right] \quad (19a)$$

在粘弹性情况下, 若 $g(\varepsilon\tau)$ 在整个心动周期中都满足 $g(\varepsilon\tau) < \delta^2 \varepsilon^2$, 则:

$$f_{10} = \frac{e^{-\delta\omega t}}{[-g(\omega t) + \delta^2 \varepsilon^2]^{0.25}} \cdot \left[a_0 \exp\left(\frac{\omega_N}{\omega} \int_0^{\omega t} \sqrt{-g(\xi) + \delta^2 \varepsilon^2} d\xi\right) + b_0 \exp\left(\frac{-\omega_N}{\omega} \int_0^{\omega t} \sqrt{-g(\xi) + \delta^2 \varepsilon^2} d\xi\right) \right] \quad (19b)$$

情况 3 若在一个心动周期内既存在 $g(\omega t) > 0$, 又存在 $g(\omega t) < 0$, 即存在某个 t^* 时刻, $g(\omega t^*) = 0$, 则上述摄动解在 t^* 附近失效. 本文的第三部分将针对这种情况给出一种数值求解方法.

位移波发生的判别准则

在研究数值求解方法之前, 我们先来讨论一个位移波发生的条件. 上述的情况 1 实际上给出的是管道自由振荡的振型与频率, 这种振荡只有在外界对血管有初始扰动后才会发生. 由表达式 (18a) 和 (18b) 可看出, 此时的振荡频率并不等于 ω , 并且对粘弹管, 振幅会很快衰减, 显然情况 1 并不是我们所求的位移波. 对情况 2, 从表达式 (19a) 和 (19b) 中可明显看出, 此时血管壁将以 e 的指数形式失稳, 并没有振荡. 我们知道情况 2 发生的条件是整个心动周期中 $g(\omega t)$ 都必须小于零, 在生理情况下这要求血液的最小流速要达到 $0(10^4)$ cm/s, 这显然是不可能的, 因此人体内不可能有情况 2 发生. 因此根据上述分析和文章 [6] 中的有关结论, 我们得到位移波发生的条件是: 在一个心动周期中 $g(\omega t)$ 必须有时大于零有时小于零, 即, $g(\omega t)$ 必须至少存在一个过零点. 在 $g(\omega t) < 0$ 段, 管道失稳, 这相当于一个初始扰动, 而到 $g(\omega t) > 0$ 段, 管道才产生振荡, 综合起来就构成了一个频率和心率一致的位移波.

三、数值计算与结论

方程(10)中若 $g(\varepsilon r)$ 存在一个或多个零点, 摄动解将变得十分复杂. 为此, 我们对方程(10)直接积分得到下列积分方程

$$f_i = \int_0^r \int_0^s g(\xi) f_i(\xi) d\xi ds + f_i(0) \quad (20)$$

对方程(20)应用数值迭代求解:

$$f_i = \int_0^r \int_0^s g(\xi) f_{i-1}(\xi) d\xi ds \quad (21)$$

如果前后两次迭代之差 $|f_i - f_{i-1}| < 0.0001$, 则计算下一步, 否则继续迭代. 实际计算发现, 这种方法是收敛的并且有较高的精度.

图 2 给出了数值迭代解和摄动解的比较. 图 2a 是用超声实测的颈动脉内血流速度波. 图 2b 是同时测得的径向位移波动. 经计算发现在一个心动周期内 $g(\omega t) > 0$, 因此可用摄动及数值方法分别求解, 结果见图 2c, 图中实线是数值计算结果, 虚线是摄动解结果即表达式 (18a). 从图中可看到两条曲线在前半个周期完全重合, 只是在后半周期有一个小的相移, 但变化趋势和数值都一致. 因此应用方程(21)求数值解是可行的. 但在临床应用中首先要计算出血管的固有频率 ω_N 和临界速度 v_c . 由于血管是埋在皮下和组织中的, 因此, 精确地测量非常困难. 下面我们给出了适用于临床的近似公式.

假设血管的径向波动是线弹性范围内的小变形, 由 Laplace 公式^[8]可得管壁 Young

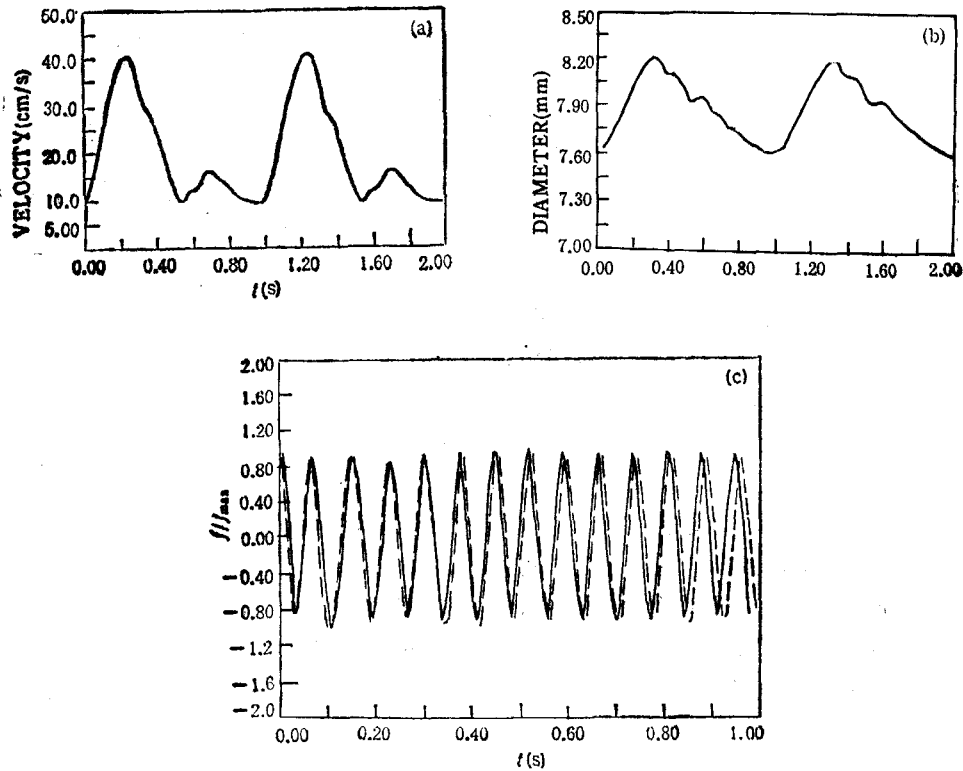


图 2 无位移波时数值计算结果与摄动求解结果的比较
(a) 血流速度坡 (b) 血管径向搏动 (c) 数值计算结果(实线)和摄动解(虚线)

氏模量 E 的计算公式:

$$E = \frac{dP}{dr} \cdot \frac{r^2}{h} = \frac{P_s - P_d}{\Delta d} \cdot \frac{d^2}{2h} \quad (22)$$

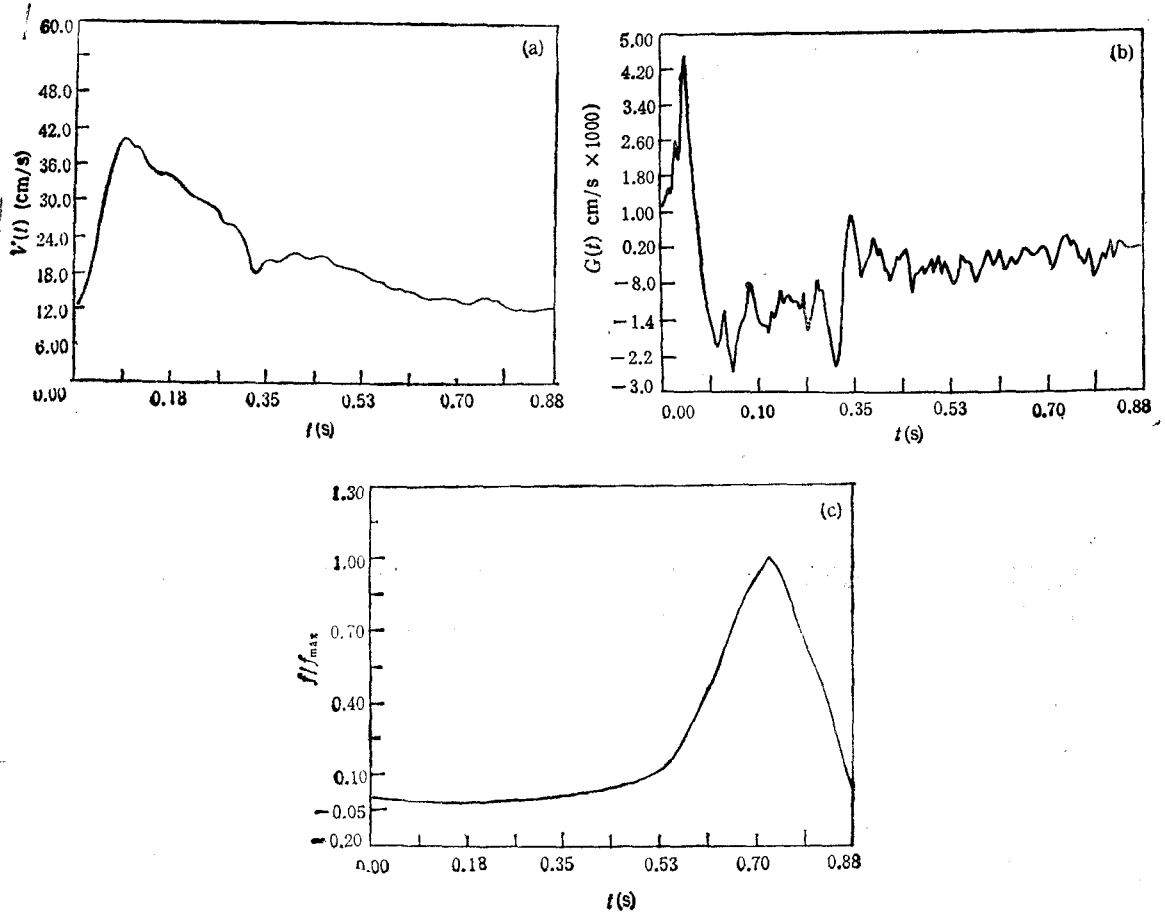
式中, P_s 和 P_d 分别表示收缩压与舒张压, d 表示血管内直径, Δd 表示一个心动周期中最大管径与最小管径之差, h 表示血管壁的厚度。其中 P_s 和 P_d 可用肱动脉处血压代替, d 和 Δd 可由 QFM-1000 型超声仪测出。管壁厚度 h 可根据 Milner 在文献[9]中公布的数据拟合如下:

$$h = 0.06 \cdot d \quad (23)$$

将表达式(22)和(23)代入表达式(7)和(8)中便可计算出 ω_N 和 v_c , 再代入表达式(12)中即可得到适用于临床无损检测的计算公式:

$$G(t) = g(t) \cdot v_c^2 = 3.3 \times 10^3 \cdot \frac{d^3}{L^2 \rho} \cdot \frac{P_s - P_d}{\Delta d} - v^2(t) + \frac{L}{2} \frac{dv(t)}{dt} \quad (24)$$

其中: P_s 和 P_d 的单位是 mmHg, 长度的单位为 cm, 速度的单位为 cm/s. ρ 为血液密度, 单位是 g/cm³. 如果在一个心动周期内 $G(t)$ 有一个或多个零点, 则血管要产生位移

图3 算例计算出的 $G(t)$ 和 f

波。下面具体计算一例在临床上观察到有明显位移波病人的位移波波形。

算例。由超声血流仪测得右颈总动脉血流流速波如图 3(a) 所示,同时检测出 $d = 6.77\text{mm}$, $\Delta d = 0.32\text{mm}$, 心率为 $HR = 69$, 血压 $P_s = 104\text{mmHg}$, $P_d = 70\text{mmHg}$, 身高 166cm , 体重 52kg 。计算中取 $L = 18\text{cm}$ 。将上述实例数据及离散的速度波输入计算机中,可求出 $G(t)$ 曲线的变化规律见图 3(b) 所示。计算中由于要对速度波微分,所以 $G(t)$ 曲线噪音较大。对速度微分我们应用下列格式

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_i = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2\Delta t}$$

Δt 为时间步长。从图 3(b) 中的 $G(t)$ 曲线上我们会立即发现它有两个过零点,大约在 $t_1^* = 0.08\text{s}$, $t_2^* = 0.33\text{s}$ 。在此期间 $G(t) < 0$, 而在其它时刻 $G(t) > 0$, 因此,根据判别准则它应存在位移波。由方程(21)可数值计算出位移波的波形见图 3(c)。从图中可看到当 $t < 0.33\text{s}$ 时,管壁基本上处于平衡位置, ($f = 0$), 当 $t > 0.33\text{s}$ 时,位移向上偏转,并在 $t = 0.7\text{s}$ 处达到极大,此后又迅速地恢复到平衡位置。从图 3(c) 中可明显地看出位移波波形和压力波、径向搏动波(参见图 2(b))。以及速度波都相差甚远。从上述

分析和计算中也可看到位移波的发生以及发生后的形状主要取决于血管壁的特性 (E, d, L 等) 和血液脉动速度。它和压力波形并没有什么直接关系。

本文临床实验部分曾得到李惜惜同志和沈峰同志的帮助, 在此表示感谢。

参 考 文 献

- [1] 柳兆荣, 李惜惜, 力学学报, 1982, 14(3): 244—250.
- [2] 柳兆荣, 李惜惜, 中国科学 B 辑, 1983, (2): 131—138.
- [3] 赵润屋, 中华物理医学杂志, 1983, 4.
- [4] 吴望一, 袁凡, 力学学报, 1985, 17(3): 237—242.
- [5] Wangyi Wu, Fan Yuan, Progress and New Directions of Biomechanics, MITA Press, 1989.
- [6] 柳兆荣, 丁光宏, 水动力学研究与进展, 1988, 3(2): 1—10.
- [7] 丁光宏, 柳兆荣, 生物力学, 上海 86-615-HZ, 1988, 3(2): 31—32.
- [8] 柳兆荣, 李惜惜, 弹性腔理论及其在心血管系统分析中的应用, 科学出版社, 1987.
- [9] W.R. Milnor, Hemodynamics, Waverly Press, 1982.

DISPLACEMENT WAVE OF THE BLOOD VESSEL — A MECHANICAL MODEL

Ding Guanghong, Liu Zhaorong

(Department of Applied Mechanics, Fudan University, Shanghai, 200433, China)

Abstract According to the clinical observations and model experiment, we have developed a theoretical model and its mathematical equations to investigate the displacement wave of the blood vessel. The wave performance and its criterion of occurrence have been obtained by using perturbation theory and numerical method. The present study suggests that the displacement wave is governed by the blood velocity wave performance and the mechanical behavior of the blood vessel, not the pressure performance. A clinical criterion was given, and it was found to be in agreement with the observations.

Key words displacement wave, blood vessel, pressure performance, velocity performance, perturbation theory