

圆柱壳开孔的应力分析

张丕辛 黄克智 陆明万

(清华大学工程力学系, 北京, 100084)

摘要 本文研究圆柱壳开孔附近的应力分析问题。由于开孔问题的边界形状较为复杂, 使用圆柱壳的 Morley 方程进行求解较为困难。本文在进行误差分析的基础上提出修正 Morley 方程, 并给出适合于开孔问题边界的一般解。以圆柱壳受轴向拉伸和内压为例分析了开孔附近的应力分布。给出了开孔率为 1/2 以下的开孔解, 并对 Donnell 方程解的适用范围给予了新的评价。

关键词 圆柱壳, 柱壳开孔, 修正 Morley 方程

一、引 言

圆柱壳开孔的应力分析是一个长期受到注重的课题, 是进行圆柱壳接管等问题分析的基础。Лурье^[1] 首先研究了当开孔率 r/R 为 $0(\sqrt{Rh}/R)$ 量级情况下孔边的应力分布。Лурье 采用扁壳理论的 Donnell 方程, 给出了受轴向拉伸和内压作用下的幂级数解。尽管这个解的适用范围较小, 但 Лурье 的求解方法一直为后人沿用。Withum^[4], Shevliakov^[5] 用类似的方法对受扭转作用的问题进行了分析。

Naghdi 和 Eringen^[2], Van Dyke^[6], Lekkerkerker^[7] 等人将 Donnell 方程的解用 Hankel 函数展开, 分别采用不同的方法满足开孔边界的边界条件, 得到了开孔率 $r/R \leq 1/4$ 范围的解。[2]、[6] 的解法形式较为复杂, 为满足精度要求级数要取几十项。Lekkerkerker 的解为 Hankel-Fourier 双重级数解, 较为容易满足开孔边界的边界条件。Sanders^[8]、龙驭球和包世华^[9]、Steele^[10] 等分别用边界积分、Hankel 变换和渐近展开方法给出了开孔问题的解。

上述作者的分析均使用圆柱壳的 Donnell 方程。由于扁壳理论假设应力状态的变化长度 L 与壳体半径 R 相比较小, 开孔附近应力状态的变化长度通常认为与开孔半径 r 同量级, 因此, 利用 Donnell 方程所得的开孔解的适用范围为 $r/R \leq \frac{1}{4}$ ^{[2],[3]}。当 r/R 超出这个范围后, 许多人认为继续使用 Donnell 方程会导致较大的误差, 而应当求解更精确的 Morley 方程。

圆柱壳上所开圆孔的周边在圆柱面展开后是一个非圆非椭圆的闭合曲线。但当 r/R 较小时这条曲线与圆周的差别较小(参见图 2)。当 $r/R = 1/2$ 时, 以展开面上的圆代替真实边界的最大误差为 4.7%。上述各种开孔解均使用了这个近似, 在 $r/R \leq 1/4$ 的

本文于 1990 年 5 月 17 日收到。

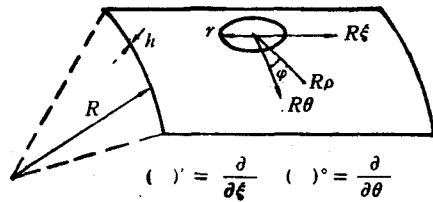


图 1 几何与符号规定

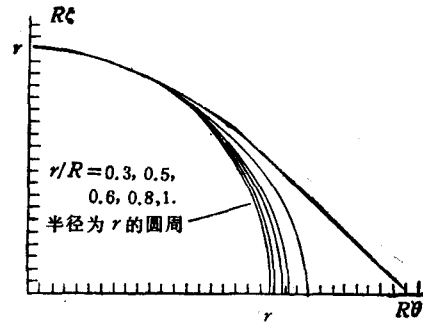


图 2 孔边曲线在展开面上的图形

限制下这个近似是合理的,但当 $r/R > 1/2$ 后误差会迅速增加。

本文将首先介绍柱壳的一般方程;根据柱壳开孔边界应力状态的特点,对圆柱壳方程中的主项进行量级分析,提出对 Morley 方程的修正方案,给出适合于开孔边界的修正 Morley 方程一般解;并且给出使用修正 Morley 方程求解在轴向拉伸和内压作用下开孔附近应力分析的结果。

二、圆柱壳的一般方程

关于圆柱壳的一般方程 Simmonds^[11]、Sanders^[12] 做了许多讨论。Sanders^[12] 中的介绍较为详细。Simmonds^[11] 利用 Budiansky 和 Sanders^[13] 建议的一套任意壳的方程组,考虑到薄壳理论的 Kirchhoff 假设具有 $0(h/R)$ 量级的误差,在应力应变关系中引入容许的 $0(h/R)$ 量级的修正量,导出了如下圆柱壳的一般方程:

$$\nabla^4 \chi + \ddot{\chi} + \lambda \chi'' - 4\mu^2 i \chi'' = 0 \quad (2.1)$$

上式中

$$4\mu^2 = \sqrt{12(1-\nu^2)} R/h$$

$$\chi = w + i \sqrt{A/D} F$$

$$A = 1/Eh, D = Eh^3/12(1-\nu^2)$$

w 是法向挠度, F 是应力函数, λ 可以为零或 $0(1)$ 量级的常数。

(2.1) 中若取 $\lambda = 1$ 则是 Morley 方程[14], 取 $\lambda = 0$ 则是 Нольжилъ-Sanders 方程。(2.1) 式实际上将各种圆柱壳的一般方程统一起来,且说明它们之间的误差仅为薄壳理论的 Kirchhoff 假设的误差量级。

Donnell 方程:

$$\nabla^4 \chi - 4\mu^2 i \chi'' = 0 \quad (2.2)$$

不能由(2.1)式取 λ 为某一常数导出,而只有靠更进一步的假设对(2.1)式简化得到。

三、Morley 方程的修正

在第二节中的(2.1)式取 $\lambda = 1$, 得到 Morley 方程[14]:

$$\left(\nabla^4 + \nabla^2 - 4\mu^2 i \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \chi = 0 \quad (3.1)$$

与 Donnell 方程相比较,实际上 Donnell 方程是在(3.1)式中略去了 $\nabla^2\chi$ 项.若边界效应的变化长度为 L ,则有:

$$\nabla^2\chi = 0 \left(\frac{R^2}{L^2} \chi \right) \quad \nabla^4\chi = 0 \left(\frac{R^2}{L^2} \nabla^2\chi \right) \quad (3.2)$$

因此,若以 Morley 方程为标准,Donnell 方程引入的误差为 $O(L^2/R^2)$ 量级.对于开孔问题,假设

$$L = O(r) \quad (3.3)$$

则当 $r/R = 1/4$ 时,Donnell 方程的误差为 $O(6\%)$.尽管 Donnell 方程的精度低于 Morley 方程,但它较适应于降阶求解,其算子可进行分解:

$$\nabla^4 - 4\mu^2 i \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} = \left(\nabla^2 + 2\mu \sqrt{i} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left(\nabla^2 - 2\mu \sqrt{i} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \quad (3.4)$$

而 Morley 方程则不具这一性质,求解较为困难.

为使 Morley 方程便于求解,我们在其算子中增加一项 $1/4$,使其成为:

$$\left(\nabla^4 + \nabla^2 + \frac{1}{4} - 4\mu^2 i \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \chi = 0 \quad (3.5)$$

所引入的 $\frac{1}{4}\chi$ 项相对于主项 $\nabla^4\chi$ 的误差为 $O(L^4/4R^4)$ 量级,只要 $L < R$ 修正的 Mor-

ley 方程的精度将高于 Donnell 方程的精度.当 $r/R = \frac{1}{2}$ 时,修正项的相对误差为 $O(2\%)$.此时可以对修正的 Morley 方程进行算子分解:

$$\begin{aligned} \nabla^4 + \nabla^2 + \frac{1}{4} - 4\mu^2 i \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} &= \left[\left(\nabla + \frac{1}{2} \right) + 2\mu \sqrt{i} \frac{\partial}{\partial \xi} \right] \\ &\cdot \left[\left(\nabla + \frac{1}{2} \right) - 2\mu \sqrt{i} \frac{\partial}{\partial \xi} \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

从而采用与求解 Donnell 方程相同的方法[7,15]求解.

对具有双向正对称性的问题,可求得:

$$\chi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} c_n F_{pn} \cos 2p\varphi \quad (3.7)$$

$$F_{pn} = \begin{cases} J_{-n}(\mu\rho\sqrt{-i})H_n(\eta\rho) & p=0 \\ [J_{-2p-n}(\mu\rho\sqrt{-i}) + J_{2p-n}(\mu\rho\sqrt{-i})]H_n(\eta\rho) & p>0 \end{cases}$$

对具有双向反对称的问题,

$$\chi = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} c_n G_{pn} \sin 2p\varphi \quad (3.8)$$

$$G_{pn} = [J_{2p-n}(\mu\rho\sqrt{-i}) - J_{-2p-n}(\mu\rho\sqrt{-i})]H_n(\eta\rho)$$

这里 J_n 是 Bessel 函数, H_n 为第二类 Hankel 函数, $\eta = \sqrt{\frac{1}{2} - i\mu^2}$, c_n 为待定系数.将无孔情况下的薄膜解与修正 Morley 方程解叠加,共同满足开孔边界的边界条件即可确定 c_n ,从而得到开孔问题的解.

四、数值计算结果

根据以上分析,采用修正 Morley 方程,本文对受轴向拉伸和内压的开孔圆柱壳进行了实际计算,考虑到修正 Morley 方程的精度和开孔边界的几何近似精度,解的适用范围为 $r/R \leq \frac{1}{2}$ (σ_m 表示薄膜应力, σ_b 表示弯曲应力)。在实际计算中(3.7)式和(3.8)式收敛较快,一般取 $n = 2p$ 将级数截断,当 p 取 5~6 项时 c_n 的值将稳定下来。

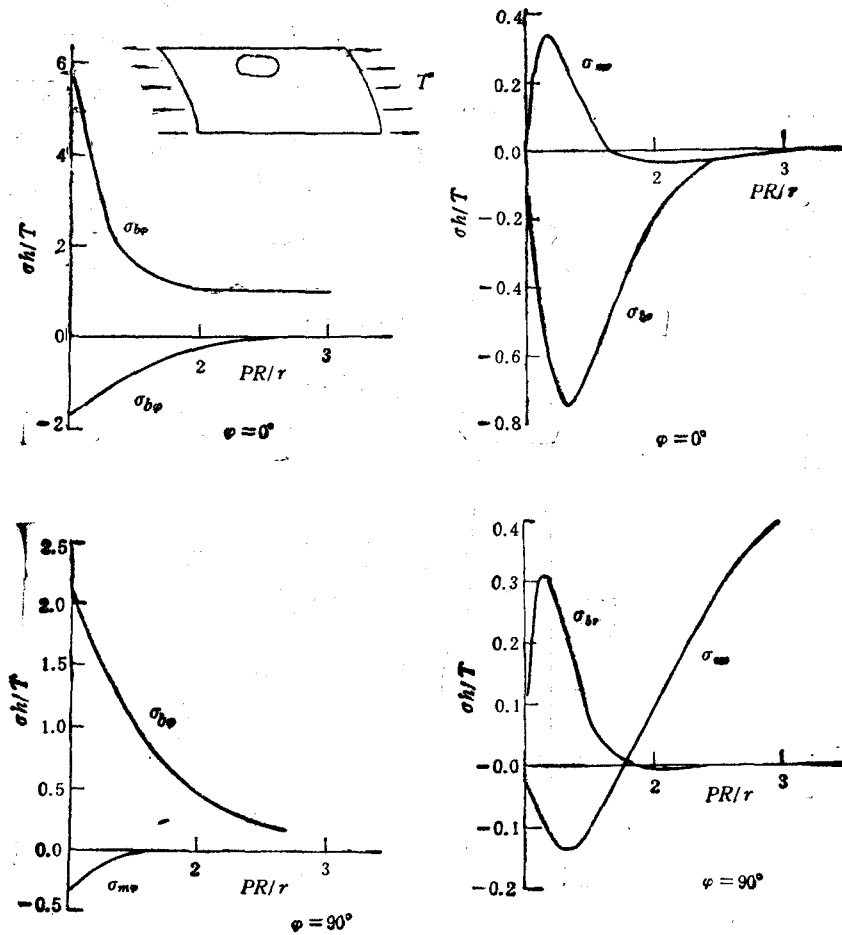


图 3 开孔附近的应力分布 (拉伸, $\frac{r}{R} = 3$, $r/\sqrt{Rh} = 2.7$)

实际计算结果表明, r/\sqrt{Rh} 是影响孔边应力的主要因素, 开孔率 r/R 的影响甚微。在 r/R 小于 1/2 的范围 Morley 方程与 Donnell 方程的解之差别是较小的。

五、结 论

圆柱壳的开孔率 r/R 当由 1/4 继续增大时, 其孔边应力状态的变化长度 L 的增长

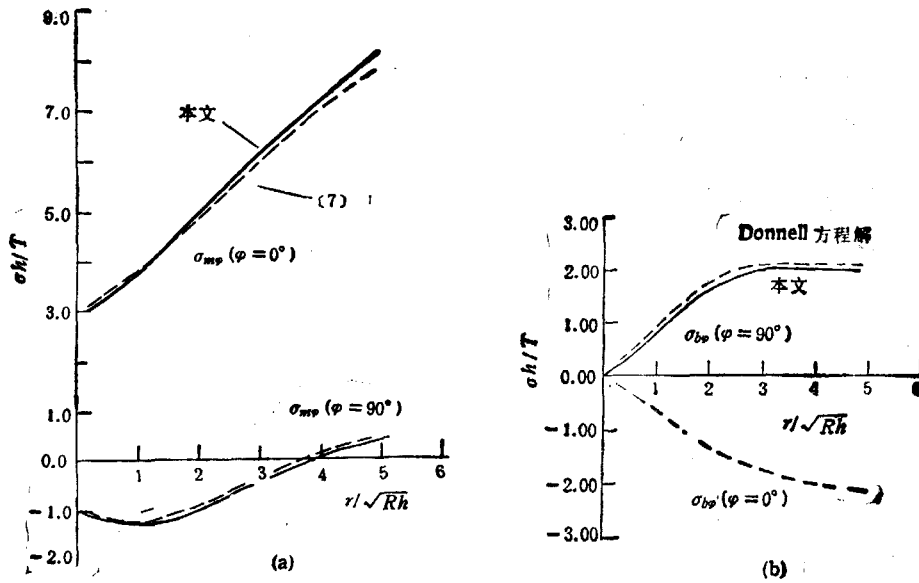


图4 孔边应力(拉伸)

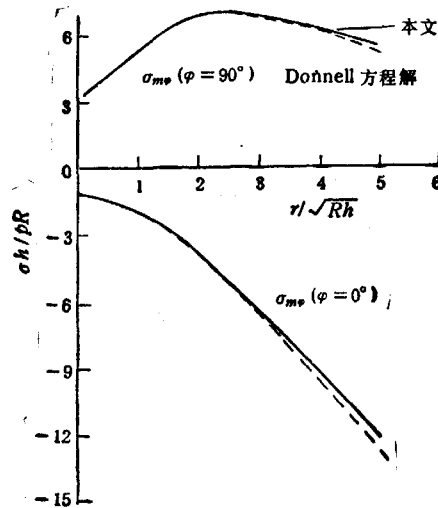


图5 孔边应力(内压)

低于 r 的增长, 即 $L/r < 1$, 在开孔率 $r/R \leq \frac{1}{2}$ 范围内 Donnell 方程解仍能保持有效。

参 考 文 献

- [1] Лурье, А. И. Статика Тонкостенных Упругих Оболочек 1947.
- [2] Naghdi, A. K. and Eringen, A. C. *Ing. Arch.*, 1965, 34.
- [3] Lekkerkerker, J. G., *Nuclear Engr. Des.*, 1972, 20.
- [4] Withum, D. *Ing. Arch.*, 1958, 26.

- [5] Shevliakov, Ju. A and Zigel, F. S. RSR, 1954: 41—44.
- [6] Van Dyke. *AIAA J.*, 1965, 3(9).
- [7] Lekkerkerker, J. G. Proc. XIth Int. Congr. Appl. Mech. München, 1964.
- [8] Sanders, Jr. J. L. *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, 1970, 37.
- [9] 龙驭球、包世华. 固体力学学报, 1983, 4.
- [10] Steele, C. R. *Int. Engr. Sci.*, 1971, 9.
- [11] Simmonds, J. G. *Int. J. Solids Struct.*, 1966, 2.
- [12] Sanders, Jr. J. L., *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, 1983, 50.
- [13] Budiansky, B. and Sanders, Jr, J. L., *Progress in Appl. Mech.*, Macmillan, 1963.
- [14] Morley, L. S. D. *Q. Mech. Appl Math.*, 1959, 12, (89).
- [15] Seide, P. *Small Elastic Deformations of Thin Shells*. Noordhoff Int. Pub., 1975.

THE STRESS ANALYSIS OF CYLINDRICAL SHELLS WITH CUTOUTS

Zhang Peixin Hwang Kezhi Lu Mingwan

(Dept of Engr. Mech., Tsinghua Univ., Beijing, 100084, China)

Abstract In this paper we deal with the analysis of stress distributions around circular cutouts in cylindrical shells. Because of the complicated boundary shapes in this type of problems, it is difficult to solve the well known Morley's equation. Based on the error analysis we modified the Morley's equation, and furthermore got a general solution of the modified Morley's equation which is suitable for the analysis of cutout problems. We took the problems of cylindrical shells under the action of axial tension and internal pressure as the examples, and found out the stress distributions that are valid within the range of open ratio less than 1/2. Finally we discussed the effective range of the Donnell's equation for the analysis of cutout problems.

Key words cylindrical shells, cutout, modified Morley's equation