第23卷 第6期 力学学报 Vol. 23, No. 6
1991年11月 ACTA MECHANICA SINICA Nov., 1991

伸缩张量率的抽象表示[1)]

郭仲衡 Th. Lehmann 梁浩云
(北京大学数学系,北京,100871) (鲁尔大学力学所) (中山大学力学系,广州,510275)

提要 本文用"主轴内蕴法"给出右-左伸缩张量 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 的时间导数 $\dot{\boldsymbol{U}}$ 和 $\dot{\boldsymbol{V}}$ 的抽象表示。文中引进所谓"分离技巧",使能有效地应用张量函数的标准表示。$\dot{\boldsymbol{V}}$ 的表达式是新的。还给出 $\dot{\boldsymbol{U}}$ 和 $\dot{\boldsymbol{V}}$ 的两个新关系式。

关键词 主轴法,主轴内蕴法,伸缩张量率,分离技巧,不变量表达

一、引 言

在有限变形里,出现在变形梯度极分解

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{V}\boldsymbol{R} \tag{1.1}$$

的右-左伸缩张量 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 是基本应变度量,其中 $\boldsymbol{R}$ 是有限转动。讨论非弹性本构关系时,时间导数 $\dot{\boldsymbol{U}}$ 和 $\dot{\boldsymbol{V}}$ 是重要的。1984年以前,可用的只有 Hill 给出的 $\dot{\boldsymbol{U}}$ 的主轴表达式(参阅 [1,2])。连续介质力学的问题一般都是场的问题。在问题解决之前,$\boldsymbol{U}$ 在物体各点的主方向尚属未知。因此,在场的问题,$\dot{\boldsymbol{U}}$ 的主轴表示几乎是无用的,寻求不依赖于坐标系的抽象表示成了当务之急。1984年,用 Hodge 对偶将相应的张量方程化成向量方程,郭仲衡首先给出了 $\dot{\boldsymbol{U}}$ 和 $\dot{\boldsymbol{V}}$ 的抽象表示[3]。紧接着,将 $\dot{\boldsymbol{U}}$ 的估计表示代回方程,应用 Cayley-Hamilton 定理,并比较系数,Hoger 和 Carlson 得到 $\dot{\boldsymbol{U}}$ 的另一个抽象表示[4]。反复应用 Cayley-Hamilton 定理先求一个反称张量的绝对表示,Mehrabadi 和 Nemat-Nasser 进而得到用 $\boldsymbol{U}$ 和 $\hat{\boldsymbol{D}}=\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{R}$ 抽象表达的 $\dot{\boldsymbol{U}}$([5]的(8.17)前式),其中 $\boldsymbol{D}$ 是伸缩率张量。[5] 又进一步得到 $\dot{\boldsymbol{U}}$ 的另一表达式 (8.17),它包含的张量单项式次数较其前式为低。

本文第一和第三作者发展了"主轴内蕴法",它可内蕴地解决原来只能用主轴法解决的任何问题。方法命名的根据是:在解决过程中仍用了主轴法,而结果则是内蕴的。中心思想是:将问题归结为解张量方程问题;应用标准张量函数表示定理;在主标架下将问题化成代数方程组问题;应用一个基于对称多项式基本定理的不变量表达算法最终得抽象表示。[6]简介了这个方法,其中略去关键细节地提到了 $\dot{\boldsymbol{U}}$ 的抽象表示,它与 [5] 的 (8.17)式一致。

最近,王文标和段祝平用生成子的线性组合和 Cayley-Hamilton 定理解张量方程,得到和[5]的(8.17)前式相同的 $\dot{\boldsymbol{U}}$ 表达式[7]。在求 $\dot{\boldsymbol{U}}$ 的问题上,[4]和[7]的方法接近,

1) 高等学校博士学科点高项科研基金资助项目.
本文于1991年2月7日收到第一稿,于1991年3月22日收到修改稿.

未用到主标架和标准张量函数表示.

应用主轴内蕴法时,如果所求的是两个对称张量的各向同性对称张量函数,会出现特有的困难. 我们提出了"分离技巧"有效地解决这个困难. $\dot{\boldsymbol{U}}$ 就是这种情形. 本文将在求 $\dot{\boldsymbol{U}}$ 过程展示这个有相当普遍意义的(例如求共轭应力时也要用到)的关键性技巧. 我们也将看到,有了 $\dot{\boldsymbol{U}}$ 的表示,求 $\dot{\boldsymbol{V}}$ 就轻而易举了. 本文给出的 $\dot{\boldsymbol{V}}$ 表达式是新的. 我们还给出 $\dot{\boldsymbol{U}}$ 和 $\dot{\boldsymbol{V}}$ 间的两个新的有趣关系式.

二、准　备

$\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 的特征值 $\{\lambda_i\}$ 是主伸缩度,而主不变量是

$$\mathrm{I}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\quad \mathrm{II}=\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2,\quad \mathrm{III}=\lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

设 $\{\boldsymbol{N}_i\}$ 是 $\boldsymbol{U}$ 从属于 $\{\lambda_i\}$ 的一组标准正交特征向量,则由

$$\boldsymbol{n}_i:=\boldsymbol{R}\boldsymbol{N}_i\quad i=1,2,3$$

定义的向量 $\{\boldsymbol{n}_i\}$ 是 $\boldsymbol{V}$ 从属于 $\{\lambda_i\}$ 的特征向量组. $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 分别有谱表示:

$$\boldsymbol{U}=\sum_i \lambda_i\boldsymbol{N}_i\otimes\boldsymbol{N}_i,\quad \boldsymbol{V}=\sum_i\lambda_i\boldsymbol{n}_i\otimes\boldsymbol{n}_i,$$

并且和变形梯度 $\boldsymbol{F}$ 有关系:

$$\boldsymbol{U}^2=\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F},\quad \boldsymbol{V}^2=\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T \tag{2.1}$$

速度梯度 $\boldsymbol{L}$ 可表为

$$\boldsymbol{L}=\dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F}^{-1} \tag{2.2}$$

伸缩率 $\boldsymbol{D}=\sum_{i,j}d_{ij}\boldsymbol{n}_i\otimes\boldsymbol{n}_j=\frac{1}{2}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}^T)$ 和自旋 $\boldsymbol{W}=\sum_{i,j}w_{ij}\boldsymbol{n}_i\otimes\boldsymbol{n}_j=\frac{1}{2}(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}^T)$ 分别是 $\boldsymbol{L}$ 的对称和反称部分.

三、$\dot{\boldsymbol{U}}$ 的抽象表示

将(2.1)$_1$对时间 t 微商,应用(2.2),得 $\dot{\boldsymbol{U}}$ 应满足的张量方程:

$$\boldsymbol{U}\dot{\boldsymbol{U}}+\dot{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{U}=2\boldsymbol{U}\hat{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{U} \tag{3.1}$$

这里

$$\hat{\boldsymbol{D}}=\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^T\left(\sum_{i,j}d_{ij}\boldsymbol{n}_i\otimes\boldsymbol{n}_j\right)\boldsymbol{R}=\sum_{i,j}d_{ij}\boldsymbol{N}_i\otimes\boldsymbol{N}_j \tag{3.2}$$

在 $\boldsymbol{U}$ 的主标架 $\{\boldsymbol{N}_i\}$ 下,记

$$\dot{\boldsymbol{U}}=\sum_{i,j}\dot{U}_{ij}\boldsymbol{N}_i\otimes\boldsymbol{N}_j,\text{(符号 }\dot{U}_{ij}\text{ 是形式的)}$$

则方程(3.1)的解 $\dot{\boldsymbol{U}}$ 的主轴表示为

$$\dot{U}_{ij}=\frac{2\lambda_i\lambda_j}{\lambda_i+\lambda_j}d_{ij} \tag{3.3}$$

另一方面,容易从(3.1)看出,对称张量 $\dot{\boldsymbol{U}}$ 是对称张量 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 的各向同性函数,关于 $\boldsymbol{D}$ 为线性. 根据张量函数表示定理[8], $\dot{\boldsymbol{U}}$ 的标准表示是

$$\dot{\boldsymbol{U}}=\alpha_1\boldsymbol{I}+\alpha_2\boldsymbol{U}+\alpha_3\boldsymbol{U}^2+\alpha_4\hat{\boldsymbol{D}}+\alpha_5(\boldsymbol{U}\hat{\boldsymbol{D}}+\hat{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{U})+\alpha_6(\boldsymbol{U}^2\hat{\boldsymbol{D}}+\hat{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{U}^2), \tag{3.4}$$

其中 $\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6$ 是 $\boldsymbol{U}$ 的主不变量 I,II,III 的函数，而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 则是 I,II,III 以及 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 的，关于 $\boldsymbol{D}$ 为线性的公共不变量：

$$J_0 = tr\hat{\boldsymbol{D}} = d_{11} + d_{22} + d_{33},$$
$$J_1 = tr\boldsymbol{U}\boldsymbol{D} = \lambda_1 d_{11} + \lambda_2 d_{22} + \lambda_3 d_{33},$$
$$J_2 = tr\boldsymbol{U}^2\boldsymbol{D} = \lambda_1^2 d_{11} + \lambda_2^2 d_{22} + \lambda_3^2 d_{33}$$

的函数．合并上面各式为矩阵形式

$$\begin{pmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{pmatrix} = M^T \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{22} \\ d_{33} \end{pmatrix}$$

其中

$$M := \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}$$

是 van der Monde 矩阵．$\dot{\boldsymbol{U}}$ 关于 $\boldsymbol{D}$ 的线性使得，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 必需是 J_0, J_1, J_2 的线性组合：

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{pmatrix} = AM^T \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{22} \\ d_{33} \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

其中矩阵 $A:=(\alpha_{ij})$ 的各元素 α_{ij} 只是 I,II,III 的函数．于是，求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 就归结为求矩阵 A．这种引进矩阵 A 使求依赖于 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,d_{11},d_{22},d_{33}$ 的函数组 $\{\alpha_i\}$ 变成求只依赖于 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的函数组 $\{\alpha_{ij}\}$ 的方法，我们称为"分离技巧"．它将使我们能直接应用不变量表达而轻易地最终得到 $\dot{\boldsymbol{U}}$ 的抽象表示．将(3.4)的主轴分量形式和(3.3)比较，就得

$$\alpha_1 + \alpha_2\lambda_i + \alpha_3\lambda_i^2 + \alpha_4 d_{ii} + 2\alpha_5 d_i d_{ii} + 2\alpha_6\lambda_i^2 d_{ii} = \lambda_i d_{ii}, i = 1,2,3, \tag{3.6}$$

$$\alpha_4 d_{ij} + \alpha_5(\lambda_i + \lambda_j)d_{ij} + \alpha_6(\lambda_i^2 + \lambda_j^2)d_{ij} = \frac{2\lambda_i\lambda_j}{\lambda_i + \lambda_j} d_{ij}, i \neq j. \tag{3.7}$$

$\boldsymbol{D}$ 的任意性使(3.7)等价于

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_2 + \lambda_3 & \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ 1 & \lambda_3 + \lambda_1 & \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2\lambda_2\lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3} \\ \dfrac{2\lambda_3\lambda_1}{\lambda_3 + \lambda_1} \\ \dfrac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

方程组(3.8)关于主伸缩度 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为对称，即任何两个主伸缩度的互换不改变方程组．若各主伸缩度不同，则系数矩阵行列式

$$\Delta = (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0, \tag{3.9}$$

(3.8)有唯一解．解 $\{\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6\}$ 是 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的对称有理函数，应用不变量表达算法(见附录)，可以表成 I,II,III 的有理函数：

$$\alpha_4 = \frac{2(\mathrm{I\,III} - \mathrm{II}^2)}{\mathrm{I\,II} - \mathrm{III}}, \quad \alpha_5 = 2, \quad \alpha_6 = \frac{-2\mathrm{II}}{\mathrm{I\,II} - \mathrm{III}} \tag{3.10}$$

将(3.10)代回(3.6)，我们有

$$M\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}d_{11}\\ d_{22}\\ d_{33}\end{pmatrix} \tag{3.11}$$

其中

$$N:=\mathrm{diag}(\nu_1,\nu_2,\nu_3),$$

$$\nu_i=\lambda_i-\alpha_4-2\alpha_5\lambda_i-2\alpha_6\lambda_i^2=a_0+a_1\lambda_i+a_2\lambda_i^2,$$

$$a_0=\frac{2(\mathrm{II}^2-\mathrm{I\,III})}{\mathrm{I\,II}-\mathrm{III}},\quad a_1=-3,\quad a_2=\frac{4\mathrm{II}}{\mathrm{I\,II}-\mathrm{III}}$$

记

$$E=\mathrm{diag}(1,1,1),\quad U=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$$

并将 (3.5) 代入 (3.11)，考虑到 $\{d_{ii}\}$ 的任意性，我们有

$$MAM^T=a_0E+a_1U+a_2U^2$$

即

$$A=M^{-1}(a_0E+a_1U+a_2U^2)M^{-T}$$

A 是对称矩阵，并可表为

$$A=a_0A^{(0)}+a_1A^{(1)}+a_2A^{(2)} \tag{3.12}$$

其中

$$A^{(\xi)}:=M^{-1}U^{\xi}M^{-T},\quad \xi=0,1,2 \tag{3.13}$$

容易算出

$$M^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}\lambda_2\lambda_3(\lambda_3-\lambda_2) & \lambda_3\lambda_1(\lambda_1-\lambda_3) & \lambda_1\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)\\ \lambda_2^2-\lambda_3^2 & \lambda_3^2-\lambda_1^2 & \lambda_1^2-\lambda_2^2\\ \lambda_3-\lambda_2 & \lambda_1-\lambda_3 & \lambda_2-\lambda_1\end{pmatrix}$$

可以看出，$A^{(\xi)}$的元素都是分母为Δ^2的对称有理函数．计算表明，每元素的分子都有因子Δ^2．从而 $A^{(\xi)}$ 各元素都是对称多项式．利用不变量表达和(3.12)，最终得

$$A=\frac{1}{\mathrm{I\,II}-\mathrm{III}}\begin{pmatrix}2\mathrm{II}^2-\mathrm{I\,III} & \mathrm{III}-2\mathrm{I\,II} & 2\mathrm{II}\\ \mathrm{III}-2\mathrm{I\,II} & \mathrm{I}^2+\mathrm{II} & -\mathrm{I}\\ 2\mathrm{II} & -\mathrm{I} & 1\end{pmatrix} \tag{3.14}$$

于是，将 (3.10, 14) 代回(3.4)，得 $\dot{U}$ 的抽象表达式：

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{U}}=\frac{1}{\mathrm{I\,II}-\mathrm{III}}\{&[(2\mathrm{II}^2-\mathrm{I\,III})tr\hat{\boldsymbol{D}}+(\mathrm{III}-2\mathrm{I\,II})tr\boldsymbol{U}\hat{\boldsymbol{D}}+2\mathrm{II}tr\boldsymbol{U}^2\hat{\boldsymbol{D}}]\boldsymbol{I}\\ &+[(\mathrm{III}-2\mathrm{I\,II})tr\hat{\boldsymbol{D}}+(\mathrm{I}^2+\mathrm{II})tr\boldsymbol{U}\hat{\boldsymbol{D}}-\mathrm{I}tr\boldsymbol{U}^2\boldsymbol{D}]\boldsymbol{U}\\ &+[2\mathrm{II}tr\boldsymbol{D}-\mathrm{I}tr\boldsymbol{U}\hat{\boldsymbol{D}}+tr\boldsymbol{U}^2\hat{\boldsymbol{D}}]\boldsymbol{U}^2+2[(\mathrm{I\,III}-\mathrm{II}^2)\hat{\boldsymbol{D}}\\ &+(\mathrm{I\,II}-\mathrm{III})(\boldsymbol{U}\hat{\boldsymbol{D}}+\hat{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{U})-\mathrm{II}(\boldsymbol{U}^2\hat{\boldsymbol{D}}+\hat{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{U}^2)]\}\end{aligned} \tag{3.15}$$

由于分母(参阅附录)

$$\mathrm{I\,II}-\mathrm{III}=(\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_3+\lambda_1)(\lambda_1+\lambda_2)>0 \tag{3.16}$$

在条件(3.9)下得到的解(3.15)可以连续延拓至有重主伸缩度的情形，即 $\dot{U}$ 的抽象表示(3.15)普遍有效，条件(3.9)是可去的．当然，在重主伸缩度情形，譬如 $\lambda_1\neq\lambda_2=\lambda_3=\lambda_0$，

可以利用

$$U^2 = (\lambda_1 + \lambda_0)U - \lambda_1\lambda_0 I$$

将(3.15)的次数降低。而当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ 时,将 $U = \lambda I$ 代入(3.15),有 $\dot{U} = \lambda\hat{D}$. 如直接微商 $U = \lambda \sum_i N_i \otimes N_i$,则有 $\dot{U} = \dot{\lambda} I$. 比较两结果,得熟知公式

$$\dot{\overline{\ln\lambda}} I = \hat{D}.$$

四、$\dot{V}$ 的抽象表示

将$(2.1)_2$对 t 微商,应用(2.2),得 $\dot{V}$ 应满足的张量方程:

$$\begin{aligned} V\dot{V} + \dot{V}V &= LV^2 + V^2L^T \\ &= (DV^2 + V^2D) + (WV^2 - V^2W). \end{aligned} \tag{4.1}$$

由于线性,(4.1)的解可写成

$$\dot{V} = \dot{V}^d + \dot{V}^w, \tag{4.2}$$

其中 $\dot{V}^d = \sum_{i,j} \dot{V}^d_{ij} n_i \otimes n_j$ 是方程(4.1)右端仅为 $B^d = DV^2 + V^2D$ 时的解,而 $\dot{V}^w = \sum_{i,j} \dot{V}^w_{ij} n_i \otimes n_j$ 则仅为 $B^w = WV^2 - V^2W$ 时的解。

在 V 的主标架$\{n_i\}$下,右端为 B^d 的(4.1)的解 $\dot{V}^d$ 的主轴表示为

$$\dot{V}^d_{ij} = \frac{\lambda_i^2 + \lambda_j^2}{\lambda_i + \lambda_j} d_{ij}. \tag{4.3}$$

类似于(3.4), $\dot{V}^d$ 的标准表示是

$$\dot{V}^d = \beta_1 I + \beta_2 V + \beta_3 V^2 + \beta_4 D + \beta_5(VD + DV) + \beta_6(V^2D + DV^2), \tag{4.4}$$

其中 $\beta_4, \beta_5, \beta_6$ 是 V 的主不变量 I, II, III 的函数,而 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 则是 I, II, III 以及 V 和 D 的,关于 D 为线性的公共不变量的函数。这些公共不变量也是 J_0, J_1, J_2, 因为

$$trV^\xi D = trU^\xi\hat{D},\ \xi = 0,1,2.$$

将(4.4)的主分量形式和(4.3)比较,得

$$\beta_1 + \beta_2\lambda_i + \beta_3\lambda_i^2 + \beta_4 d_{ii} + 2\beta_5\lambda_i d_{ii} + 2\beta_6\lambda_i^2 d_{ii} = \lambda_i d_{ii},\quad i = 1,2,3 \tag{4.5}$$

$$\beta_4 d_{ij} + \beta_5(\lambda_i + \lambda_j)d_{ij} + \beta_6(\lambda_i^2 + \lambda_j^2)d_{ij} = \frac{\lambda_i^2 + \lambda_j^2}{\lambda_i + \lambda_j} d_{ij}, i \neq j \tag{4.6}$$

D 的任意性使(4.6)等价于

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_2 + \lambda_3 & \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ 1 & \lambda_3 + \lambda_1 & \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda_2^2 + \lambda_3^2}{\lambda_2 + \lambda_3} \\ \dfrac{\lambda_3^2 + \lambda_1^2}{\lambda_3 + \lambda_1} \\ \dfrac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{\lambda_1 + \lambda_2} \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

在条件(3.9)下,(4.7)有唯一解。但是,不必直接去解(4.7)。只要将(3.8)和(4.7)相加,我们有

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_2+\lambda_3 & \lambda_2^2+\lambda_3^2 \\ 1 & \lambda_3+\lambda_1 & \lambda_3^2+\lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_1+\lambda_2 & \lambda_1^2+\lambda_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_4+\beta_4 \\ \alpha_5+\beta_5 \\ \alpha_6+\beta_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2+\lambda_3 \\ \lambda_3+\lambda_1 \\ \lambda_1+\lambda_2 \end{pmatrix}$$

由此轻易地得

$$\alpha_4+\beta_4=1,\ \alpha_5+\beta_5=1,\ \alpha_6+\beta_6=0 \tag{4.8}$$

利用(3.10)，就得(4.7)的解

$$\beta_4=\frac{2(\mathrm{II}^2-\mathrm{I\,III})}{\mathrm{I\,II}-\mathrm{III}},\ \beta_5=-1,\ \beta_6=\frac{2\mathrm{II}}{\mathrm{I\,II}-\mathrm{III}} \tag{4.9}$$

类似地，将(3.6)和(4.5)相加，考虑到(4.8)，又有

$$M\begin{pmatrix} \alpha_1+\beta_1 \\ \alpha_2+\beta_2 \\ \alpha_3+\beta_3 \end{pmatrix}=0$$

这方程组仅有平凡解，从而

$$\left.\begin{aligned} \beta_1=-\alpha_1&=\frac{1}{\mathrm{III}-\mathrm{I\,II}}[(2\mathrm{II}^2-\mathrm{I\,III})J_0+(\mathrm{III}-2\mathrm{I\,II})J_1+2\mathrm{II}J_2], \\ \beta_2=-\alpha_2&=\frac{1}{\mathrm{III}-\mathrm{I\,II}}[(\mathrm{III}-2\mathrm{I\,II})J_0+(\mathrm{I}^2+\mathrm{II})J_1-\mathrm{I}J_2], \\ \beta_3=-\alpha_3&=\frac{1}{\mathrm{III}-\mathrm{I\,II}}[2\mathrm{II}J_0-\mathrm{I}J_1+J_2]. \end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

右端为 $\boldsymbol{B}^w$ 的(4.1)的解 $\dot{\boldsymbol{V}}^w$ 有主轴表示

$$\dot{V}^w_{ij}=(\lambda_j-\lambda_i)w_{ij} \tag{4.11}$$

由方程(4.1)，对称张量 $\dot{\boldsymbol{V}}^w$ 是对称自变量 $\boldsymbol{V}$ 和反称自变量 $\boldsymbol{W}$，关于 $\boldsymbol{W}$ 为线性的各向同性函数．根据张量函数表示定理[8]，$\dot{\boldsymbol{V}}^w$ 的标准表示是

$$\dot{\boldsymbol{V}}^w=\gamma_1(\boldsymbol{VW}-\boldsymbol{WV})+\gamma_2(\boldsymbol{V}^2\boldsymbol{W}-\boldsymbol{WV}^2)+\gamma_3(\boldsymbol{V}^2\boldsymbol{WV}-\boldsymbol{VWV}^2) \tag{4.12}$$

其中 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 是 $\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III}$ 的函数．(4.12)有主轴表示：

$$\dot{V}^w_{ij}=\gamma_1(\lambda_i-\lambda_j)w_{ij}+\gamma_2(\lambda_i^2-\lambda_j^2)w_{ij}+\gamma_3\lambda_i\lambda_j(\lambda_i-\lambda_j)w_{ij} \tag{4.13}$$

(4.11)和(4.13)的对角分量均为零．比较其余分量，在条件(3.9)下，由 $\boldsymbol{W}$ 的任意性，得方程组

$$\gamma_1+(\lambda_i+\lambda_j)\gamma_2+\gamma_i\lambda_j\gamma_3=-1,i\neq j \tag{4.14}$$

系数矩阵行列式

$$-\Delta=-(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_2)\neq 0$$

(4.14)有唯一解

$$\gamma_1=-1,\ \gamma_2=0,\ \gamma_3=0 \tag{4.15}$$

将 (4.9,10,15) 依次代回 (4.4,12) 和 (4.2)，最终得 $\dot{\boldsymbol{V}}$ 的抽象表达式：

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{V}}=&\boldsymbol{WV}-\boldsymbol{VW} \\ &+\frac{1}{\mathrm{III}-\mathrm{I\,II}}\{[(2\mathrm{II}^2-\mathrm{I\,III})tr\boldsymbol{D}+(\mathrm{III}-2\mathrm{I\,II})tr\boldsymbol{VD}+2\mathrm{II}tr\boldsymbol{V}^2\boldsymbol{D}]\boldsymbol{I} \\ &+[(\mathrm{III}-2\mathrm{I\,II})tr\boldsymbol{D}+(\mathrm{I}^2+\mathrm{II})tr\boldsymbol{VD}-\mathrm{I}tr\boldsymbol{V}^2\boldsymbol{D}]\boldsymbol{V} \end{aligned}$$

$$+ [2\mathrm{II}\,tr\boldsymbol{D} - \mathrm{I}\,tr\boldsymbol{V}\boldsymbol{D} + tr\boldsymbol{V}^2\boldsymbol{D}]\boldsymbol{V}^2$$
$$+ 2(\mathrm{I}\,\mathrm{III} - \mathrm{II}^2)\boldsymbol{D} + (\mathrm{I}\,\mathrm{II} - \mathrm{III})(\boldsymbol{V}\boldsymbol{D} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{V}) - 2\mathrm{II}(\boldsymbol{V}^2\boldsymbol{D} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{V}^2)\} \tag{4.16}$$

和(3.15)类似,这个解也可以连续延拓至有重主伸缩度的情形.条件(3.9)是可去的. 对重主伸缩度情形,也可作类似于 $\dot{\boldsymbol{U}}$ 的讨论. (4.16)是新的.

五、$\dot{\boldsymbol{U}}$ 和 $\dot{\boldsymbol{V}}$ 的关系式

从(3.15)和(4.16)可以看到: $\dot{\boldsymbol{U}}$ 依赖于 $\boldsymbol{U}$ 和 $\hat{\boldsymbol{D}}$,或者说,除了 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{D}$,还依赖于转动 $\boldsymbol{R}$;类似地,除了 $\boldsymbol{V}$ 和 $\boldsymbol{D}$,$\dot{\boldsymbol{V}}$ 还依赖于自旋 $\boldsymbol{W}$.

如果引入符号

$$Q(\boldsymbol{H},\boldsymbol{K}) := \frac{1}{\mathrm{I}\,\mathrm{II} - \mathrm{III}}\{[(2\mathrm{II}^2 - \mathrm{I}\,\mathrm{III})tr\boldsymbol{K} + (\mathrm{III} - 2\mathrm{I}\,\mathrm{II})tr\boldsymbol{H}\boldsymbol{K} + 2\mathrm{II}\,tr\boldsymbol{H}^2\boldsymbol{K}]\boldsymbol{I}$$
$$+ [(\mathrm{III} - 2\mathrm{I}\,\mathrm{II})tr\boldsymbol{K} + (\mathrm{I}^2 + \mathrm{II})tr\boldsymbol{H}\boldsymbol{K} - \mathrm{I}\,tr\boldsymbol{H}^2\boldsymbol{K}]\boldsymbol{H}$$
$$+ [2\mathrm{II}\,tr\boldsymbol{K} - \mathrm{I}\,tr\boldsymbol{H}\boldsymbol{K} + tr\boldsymbol{H}^2\boldsymbol{K}]\boldsymbol{H}^2$$
$$+ 2(\mathrm{I}\,\mathrm{III} - \mathrm{II}^2)\boldsymbol{K} + (\mathrm{I}\,\mathrm{II} - \mathrm{III})(\boldsymbol{H}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{H}) - 2\mathrm{II}(\boldsymbol{H}^2\boldsymbol{K} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{H}^2)\} \tag{5.1}$$

其中 $\boldsymbol{H},\boldsymbol{K}$ 是对称张量,而 I,II,III 是 $\boldsymbol{H}$ 的主不变量,则关系式

$$\boldsymbol{R}Q(\boldsymbol{U},\hat{\boldsymbol{D}})\boldsymbol{R}^T = Q(\boldsymbol{V},\boldsymbol{D}),\quad Q(\boldsymbol{U},\hat{\boldsymbol{D}}) = \boldsymbol{R}^TQ(\boldsymbol{V},\boldsymbol{D})\boldsymbol{R} \tag{5.2}$$

成立. 利用(5.1),$\dot{\boldsymbol{U}}$ 和 $\dot{\boldsymbol{V}}$ 可表为

$$\dot{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{U}\hat{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{U} + Q(\boldsymbol{U},\hat{\boldsymbol{D}}),\quad \dot{\boldsymbol{V}} = -\boldsymbol{V}\boldsymbol{W} + \boldsymbol{W}\boldsymbol{V} - Q(\boldsymbol{V},\boldsymbol{D})$$

关系式(5.2)给出 $\dot{\boldsymbol{U}}$ 和 $\dot{\boldsymbol{V}}$ 间的两个关系式:

$$\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{R}^T + \dot{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{L}^T + \boldsymbol{L}\boldsymbol{V} \tag{5.3}$$
$$\dot{\boldsymbol{U}} + \boldsymbol{R}^T\dot{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{U}\hat{\boldsymbol{L}}^T + \hat{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{U} \tag{5.4}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{L}} := \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{L}\boldsymbol{R}$ 类似于(3.2)式. 关系式(5.3,4)是新的. 它们也可以从(1.1)求得. 事实上,将(1.1)微商,得

$$\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{L}\boldsymbol{V} - \dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{U}\boldsymbol{R}^T,\quad \dot{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^T$$

将两式的对称化相加,考虑到 $\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^T = -\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{R}}^T$,就得(5.3). 类似地,亦可得(5.4).

六、结 束 语

本文用主轴内蕴法得到的 $\dot{\boldsymbol{U}}$ 抽象表达式(3.15)和[5]的(8.17)式一致.在文[6],(3.15)式已有反映,但篇幅关系使关键性的分离技巧和不变量表达算法以及 $\dot{\boldsymbol{V}}$ 的表达式未被提及. 在本文,分离技巧的意义和作用已在引进矩阵 A 时详细阐明,而不变量表达算法则在附录举例说明. "技巧"和"算法"都是实现主轴内蕴法的重要环节,使能顺利地应用张量函数标准表示及最终地将各系数表成不变量的函数. 在其他问题,如共轭应力等,主轴内蕴法及其"技巧"和"算法"也显出其潜在能力.

本文是1989年郭仲衡和梁浩云访问德国期间进行关于主轴内蕴法的合作研究的一部分. 在此,他们对洪堡基金会(Alexander von Humboldt-Stiftung)和德意志研究联合会(Deutsche Forschungsgemeinschaft)的支持表示谢意.

附 录（不变量表达算法）

方程组(3.8)的解 $\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6$ 是 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的对称有理函数．任何对称有理函数可表成两个对称多项式的商，因为在必要时，只需分子分母同时乘一个简单反称多项式，例如 $\Delta=(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_2)$．在(3.13)，$A^{(5)}$各元素也都是 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的对称多项式．对称多项式基本定理[9]保证，任何 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的对称多项式可表达为 I,II,III 的多项式．下面以3次齐次对称多项式

$$S=(\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_3+\lambda_1)(\lambda_1+\lambda_2)$$

为例介绍一个容易实现不变量表达的算法．分四步：

(i) 找出 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的所有3次齐次基本对称多项式：

$$A=\lambda_1\lambda_2\lambda_3,$$
$$B=\lambda_2^2\lambda_3+\lambda_2\lambda_3^2+\lambda_3^2\lambda_1+\lambda_3\lambda_1^2+\lambda_1^2\lambda_2+\lambda_1\lambda_2^2,$$
$$C=\lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3.$$

(ii) 将 I,II,III 的所有关于 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为3次的单项式展开，合并同类项．并用(i)的基本多项式表达：

$$\mathrm{III}=A,$$
$$\mathrm{I\,II}=3A+B,$$
$$\mathrm{I}^3=6A+3B+C.$$

(iii) 解上述对角元均为1的三角形系数矩阵的方程组，得用 I, II, III 表达的各基本对称多项式：

$$A=\mathrm{III},$$
$$B=\mathrm{I\,II}-3\mathrm{III},$$
$$C=\mathrm{I}^3-3\mathrm{I\,II}+3\mathrm{III}.$$

(iv) 将 S 展开，归并为基本对称多项式的线性组合，利用(iii)的结果，最终得表达式，即(3.16)：

$$S=2A+B=\mathrm{I\,II}-\mathrm{III}.$$

应注意，非对称多项式，如反称多项式 Δ，无不变量表达．

参 考 文 献

[1] Hill, R. Aspects of invariance in solid mechanics. Adv. in Appl. Mech. (ed. C. -S. Yih), Acad. Press, New York, 1978, 18.

[2] 郭仲衡，R. N. Dubey. 非线性连续介质力学中的"主轴法"，力学进展，1983 13(3): 1—17。

[3] Guo Zhong-heng, Rates of stretch tensors, J. Elasticity, 1984, 14(3): 263—267.

[4] A. Hoger, D. E. Carlson, On the derivative of the square root of a tensor and Guo's rate theorems, J. Elasticity, 1984 14(3): 329—336.

[5] M. M. Mehrabadi, S. Nemat-Nasser, Some basic kinematic relations for finite deformations of continua, Mech. Materials, 1987, 6: 127—138.

[6] 郭仲衡，梁浩云，从主轴表示到抽象表示，力学进展，1990 20(3): 303—315。

[7] 王文标，段祝平，自旋张量的绝对表示及其在有限变形理论的应用，力学学报，1990 22(5): 566—573; The invariant representation of spins with applications in the theory of finite deformations, Acta Mech. Sinica, 1990, 6(2): 133—140; On the invariant representation of spin-tensors with applications, Int. J. Solid Structures, (1991), 27(3): 329—341.

[8] Spencer, A. J. M. Theory of invariants, Continuum Physics (ed. A. C. Eringen) Acad. Press, New York, 1971, 1.

[9] 北京大学数学系编写组，高等代数讲义，高教出版社，北京，1965。

THE ABSTRACT REPRESENTATION OF RATES OF STRETCH TENSORS

Guo Zhongheng

(*Department of Mathematics, Peking University, Beijing, 100871, China*)

Th. Lehmann

(*Institut für Mechanik, Ruhr-Universität*)

Liang Haoyun

(*Department of Mechanics, Zhongshan University, Guangzhou, 510275, China*)

Abstract The present paper provides the representation for time derivatives $\dot{U}$ and $\dot{V}$ of right-and left stretch tensors U and V by means of principal-axis intrinsic method. The so-called "separation technique" introduced in this paper enables to use effectively standard representations of tensor functions. The expression for $\dot{V}$ is new. Two new relations between $\dot{U}$ and $\dot{V}$ are given as well.

Key words principal-axis method, principal-axis intrinsic method, rates of stretch tensors, separation technique, expression in terms of invariants