第22卷 第2期
1990年3月

力 学 学 报
ACTA MECHANICA SINICA

Vol. 22, No. 2
Mar., 1990

理想塑性介质中平面应力静止裂纹的尖端弹塑性场

章梓茂 马兴瑞
(哈尔滨工业大学)

高玉臣
(哈尔滨船舶工程学院)

提要 本文详细分析了理想塑性介质中平面应力I型静止裂纹的尖端弹塑性场，结果表明：裂纹尖端应力场内可以不包含应力间断线，但含有弹性区．作为这个一般解的特殊情况，当弹性区被两侧的塑性区挤压消失而尖端场成为满塑性区时，便得到 Hutchinson[1] (1968) 给出的解．此外，文中还给出了另一种均匀应力区位于裂纹前方的解，这是[1]未曾得到的．

关键词 理想塑性介质，裂纹尖端场，弹性角区，塑性角区

1. 引言

对于平面应力的I型静止裂纹，Hutchinson[1] 曾给出一个尖端场的渐近解，这个解存在着应力的间断线，Shih[2] 曾研究了I、II混合型静止裂纹的尖端场，但对理想塑性的情况，其结果亦包含着应力间断线并且尖端场是满塑性区的．高玉臣[3]研究了理想塑性材料中I、II混合型平面应变裂纹，得到了含有弹性区但各应力分量为全连续的应力场．众所周知，[1]所给出的尖端场构造与平面应变问题有着显著的差别，各区域的配置也不同．这样，[1]给出的尖端应力场是否为唯一解便是一个值得研究的问题．本文通过对基本方程和边界条件的分析，对以上问题作出了回答．

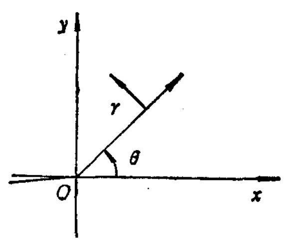

图1 参考坐标系

2. 基本方程

考察平面 (x, y) 上的一个半无限长裂纹，设 $(r、\theta)$ 为平面极坐标，其原点位于裂纹端点，如图1所示．

令 $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_{r\theta}$ 为应力分量，极坐标下的平衡方程为：

$$\left.\begin{aligned}&\partial\sigma_r/\partial r + 1/r\cdot\partial\sigma_{r\theta}/\partial\theta + (\sigma_r - \sigma_\theta)/r = 0\\&1/r\partial\sigma_\theta/\partial\theta + \partial\sigma_{r\theta}/\partial r + 2\sigma_{r\theta}/r = 0\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

本文于1987年12月9日收到，于1989年6月24日收到修改稿．

再引入应力函数 φ,并使得

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= 1/r\cdot\partial\varphi/\partial r + 1/r^2\cdot\partial^2\varphi/\partial\theta^2\\ \sigma_\theta &= \partial^2\varphi/\partial r^2\\ \sigma_{r\theta} &= -\partial(1/r\cdot\partial\varphi/\partial\theta)/\partial r\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

则平衡方程可自动得到满足.

在平面应力条件,对于理想塑性材料采用 Mises 屈服条件,则由(2)式可得:

$$\frac{1}{4}\left[\frac{\partial\varphi}{r\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right]^2+\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)\right]^2$$

$$+\frac{1}{12}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}\right]^2=K^2\tag{3}$$

其中 K 为剪切屈服极限.

本构关系可写为

$$\left.\begin{aligned}\dot\varepsilon_r &= \dot\sigma_r/E-\nu\dot\sigma_\theta/E+\lambda(2\sigma_r-\sigma_\theta)/3\\ \dot\varepsilon_\theta &= \dot\sigma_\theta/E-\nu\dot\sigma_r/E+\lambda(2\sigma_\theta-\sigma_r)/3\\ \dot\varepsilon_{r\theta} &= (1+\nu)\dot\sigma_{r\theta}/E+\lambda\sigma_{r\theta}\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

其中 $\dot\varepsilon_r$、$\dot\varepsilon_\theta$、$\dot\varepsilon_{r\theta}$ 为应变率分量,E 为弹性模量, ν 为泊松比, λ 为塑性流动因子.

极坐标下的协调方程为

$$r\partial(r\partial\varepsilon_\theta/\partial r)/\partial r+\partial^2\varepsilon_r/\partial\theta^2-r\partial(\varepsilon_r-\varepsilon_\theta)/\partial r-2\partial(r\partial\varepsilon_{r\theta}/\partial\theta)/\partial r=0\tag{5}$$

其中 ε_r、ε_θ、$\varepsilon_{r\theta}$ 为应变分量.

各区域间应力全连续的条件,应用[4]的结果,可写成:

$$[\varphi]_\Gamma=[\varphi'_n]_\Gamma=[\varphi''_n]_\Gamma=0\tag{6}$$

其中 Γ 表示区域的交界线,$[\quad]_\Gamma$ 表示交界线两侧函数的差,n 为 Γ 的法线方向.

3. 裂纹尖端应力场的渐近分析

在裂纹尖端附近,我们将应力函数用幂级数展开式

$$\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}r^{n+2}f_n(\theta)\tag{7}$$

将(7)代入(3)并取其首次近似,则有

$$[f_0''(\theta)+f_0(\theta)]^2+3[(f_0'(\theta))^2+f_0^2(\theta)]=3K^2\tag{8}$$

因此,在塑性区,应力函数 $f_0(\theta)$ 的解为

$$f_0(\theta)=A\cos 2(\theta+\theta^*)\pm\sqrt{3}\left(\frac{K^2}{4}-A^2\right)^{1/2}\tag{9}$$

或

$$f_0(\theta)=K\cos(\theta+\theta^{**})\tag{10}$$

(9)的解代表均匀应力区,(10)代表类似扇形的应力区,其中 A、θ^*、θ^{**} 均为积分常数.

当考虑弹性区存在时,将应力函数代入协调方程并取其首次近似,得

$$f_0^{\mathrm{IV}}(\theta)+4f_0''(\theta)=0\tag{11}$$

由此可解得在弹性区的应力函数为:

$$f_0(\theta)=C_1+C_2\theta+C_3\cos 2\theta+C_4\sin 2\theta \tag{12}$$

其中 C_1、C_2、C_3、C_4 均为待定常数.

以下分别对各种可能的应力场构造进行分析.

构造 I：尖端各角区如图 2 所示，即各区的应力函数分别为：

I 区：$f_{01}=\sqrt{3}\left(\dfrac{K^2}{4}-A_1^2\right)^{1/2}+A_1\cos 2\theta \quad 0\leqslant\theta\leqslant\theta_0$

II 区：$f_{02}=K\cos(\theta+\theta^{**}) \quad \theta_0\leqslant\theta\leqslant\alpha$

III 区：$f_{03}=C_1+C_2\theta+C_3\cos 2\theta+C_4\sin 2\theta$

$$\alpha\leqslant\theta\leqslant\pi \tag{13}$$

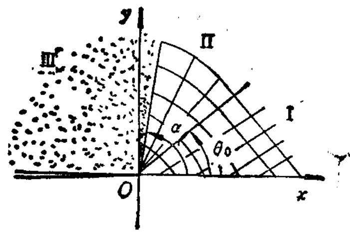

图 2　构造 I 的尖端弹塑性角区划分

并要求

$$0\leqslant\theta_0\leqslant\alpha\leqslant\pi \tag{14}$$

在(13)中已经考虑了 I 型裂纹的对称性条件.

假设应力场在各域间的连接处应力分量是全连续的，则根据(6)式，由 $\theta=\theta_0$ 处的连接条件得：

$$\left.\begin{aligned}&\sqrt{3}\left(\frac{K^2}{4}-A_1^2\right)^{1/2}+A_1\cos 2\theta_0-K\cos(\theta_0+\theta^{**})=0\\&2A_1\sin 2\theta_0-K\sin(\theta_0+\theta^{**})=0\\&4A_1\cos 2\theta_0-K\cos(\theta_0+\theta^{**})=0\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

由于在 $\theta=\theta_0$ 两侧的应力函数均已满足屈服条件，所以在(15)中实际上只有两个方程是独立的. 因此可把 θ_0 看作为一可变参数.

再由 $\theta=\alpha$ 处的连接条件及裂纹面的应力边界条件得：

$$\left.\begin{aligned}&K\cos(\alpha+\theta^{**})-C_1-C_2\alpha-C_3\cos 2\alpha-C_4\sin 2\alpha=0\\&-K\sin(\alpha+\theta^{**})-C_2+2C_3\sin 2\alpha-2C_4\cos 2\alpha=0\\&K\cos(\alpha+\theta^{**})-4C_3\cos 2\alpha-4C_4\sin 2\alpha=0\\&C_1+C_2\pi+C_3=0\\&C_2+2C_4=0\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

由(15)、(16)可解得用 α、θ_0 表示的各常数 A_1、θ^*、C_1、C_2、C_3、C_4，而 α、θ_0 之间满足如下的关系式

$$\frac{(\pi-\alpha)\sin\alpha+\sin\alpha\sin 2\alpha}{(\pi-\alpha)\cos\alpha+\cos\alpha\cos 2\alpha}=(\operatorname{tg}\theta_0)^3 \tag{17}$$

经过数值计算，结果表明：θ_0 可在 $0-\dfrac{\pi}{4}$ 之间任意取值. 特别地，当 $\theta_0=0$ 时裂纹前方的均匀应力区消失而直接与扇形区相接，这时的 $\alpha=39.12°$；另外当 $\theta_0=\dfrac{\pi}{4}$ 时，裂纹前方塑性区的最大范围为 $\alpha=52.03°$. 若 $\theta_0>\dfrac{\pi}{4}$ 则应力的连接条件将被破坏. 因此这样的尖端应力场构造不可能出现满塑性区，也不应有应力间断线. 图 3、4 分别给出了

当 $\theta_0 = 0°$、$45°$ 时各无量纲应力分量随 θ 角的变化曲线.

构造 II: 尖端场各角区如图 5 所示,即各区域的应力函数为:

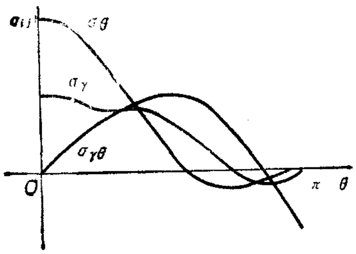

图 3 当 $\theta_0 = 0$ 或 $\bar{\theta}_0 = 39.12°$ 时无量纲应力随 θ 角的变化规律

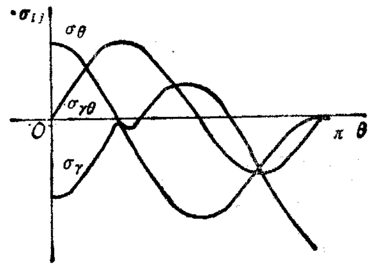

图 4 当 $\theta_0 = 45°$ 时无量纲应力随 θ 角的变化规律

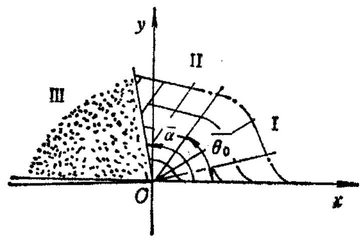

图 5 构造 II 的尖端弹塑性角区划分

I 区: $f_{01} = K\cos\theta \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \bar{\theta}_0$

$$\text{II 区: } f_{02} = A_2\cos 2(\theta + \theta^*) + \sqrt{3}\left(\frac{K^2}{4} - A_2^2\right)^{1/2} \quad \bar{\theta}_0 \leqslant \theta \leqslant \bar{\alpha} \tag{18}$$

III 区: $f_{03} = \bar{C}_1 + \bar{C}_2\theta + \bar{C}_3\cos 2\theta + \bar{C}_4\sin 2\theta \quad \bar{\alpha} \leqslant \theta \leqslant \pi$

并要求:

$$0 \leqslant \bar{\theta}_0 \leqslant \bar{\alpha} \leqslant \pi \tag{19}$$

同样,在(19)式中已经考虑了裂纹前方应力分布的对称性. 利用 $\theta = \bar{\theta}_0$ 及 $\theta = \bar{\alpha}$ 处的连接条件及裂纹表面的应力边界条件可得:

$$\left.\begin{aligned}
&K\cos\bar{\theta}_0 - A_2\cos 2(\bar{\theta}_0 + \theta^*) - \sqrt{3}\left(\frac{K^2}{4} - A_2^2\right)^{1/2} = 0\\
&K\sin\bar{\theta}_0 - 2A_2\sin 2(\bar{\theta}_0 + \theta^*) = 0\\
&K\cos\bar{\theta}_0 - 4A_2\cos 2(\bar{\theta}_0 + \theta^*) = 0\\
&A_2\cos 2(\bar{\alpha} + \theta^*) + \sqrt{3}\left(\frac{K^2}{4} - A_2^2\right)^{1/2} - \bar{C}_1 - \bar{C}_2\bar{\alpha} - \bar{C}_3\cos 2\bar{\alpha} - \bar{C}_4\sin 2\bar{\alpha} = 0\\
&-2A_2\sin 2(\bar{\alpha} + \theta^*) - \bar{C}_2 + 2\bar{C}_3\sin 2\bar{\alpha} - 2C_4\cos 2\bar{\alpha} = 0\\
&A_2\cos 2(\bar{\alpha} + \theta^*) - \bar{C}_3\cos 2\bar{\alpha} - \bar{C}_4\sin 2\bar{\alpha} = 0\\
&\bar{C}_1 + \bar{C}_2\pi + \bar{C}_3 = 0\\
&\bar{C}_2 + 2\bar{C}_4 = 0
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

与(15)式的情况一样，在(20)中可把 $\bar{\theta}_0$ 看作一个参数．由(20)可解用 $\bar{\alpha}$、$\bar{\theta}_0$ 表示的各常数 A_2、θ^*、$\bar{C}_1$、$\bar{C}_2$、$\bar{C}_3$、$\bar{C}_4$，而 $\bar{\alpha}$ 与 $\bar{\theta}_0$ 之间满足如下的关系：

$$\frac{\pi-\bar{\alpha}+\frac{1}{2}\sin 2\bar{\alpha}}{\sin^2\bar{\alpha}}=\frac{(2+\sin^2\bar{\theta}_0)\sin\bar{\theta}_0}{\sin^3\bar{\theta}_0} \tag{21}$$

经过数值计算，结果表明：$\bar{\theta}_0$ 的取值范围为 39.12°—75.5°．特别地，当 $\bar{\theta}_0=39.12°$ 时 $\bar{\alpha}=\bar{\theta}_0$，即这时在扇形区后面的均匀应力区消失而直接与弹性区相连接，所得的结果与 I 中 $\theta_0=0$ 时的情况完全一致．随着 $\bar{\theta}_0$ 的逐渐增大，均匀应力区也随之扩大；但当 $\bar{\theta}_0$ 达到 75.5° 时，弹性区内首先在裂纹表面处出现屈服，这时的 $\bar{\alpha}=120.45°$．

因此，当 $\bar{\theta}_0$ 超过 75.5° 时，必须考虑在裂纹表面处出现的第三个塑性区．

构造 III：尖端场各角区如图 6 所示．设第三个塑性区为均匀应力区，则由裂纹表面的应力边界条件及屈服条件可得到在 IV 区内的应力函数为：

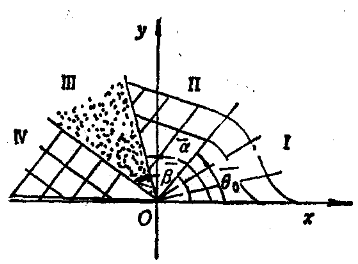

图 6　构造 III 的尖端弹塑性角区划分

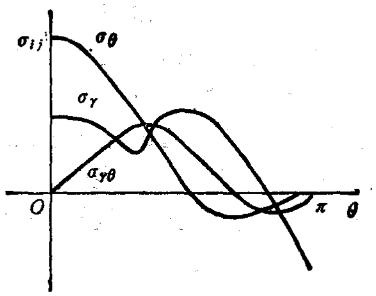

图 7　当 $\bar{\theta}_0=60°$ 时无量纲应力随 θ 角的变化规律

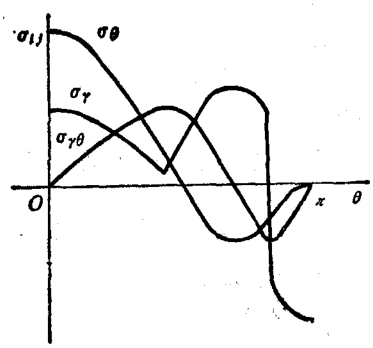

图 8　当 $\bar{\theta}_0=79.8°$ 时无量纲应力随 θ 角的变化规律

$$f_{04}=\frac{\sqrt{3}}{4}K(\cos 2\theta-1)\qquad \bar{\beta}\leqslant\theta\leqslant\pi \tag{22}$$

并要求

$$\bar{\alpha}\leqslant\bar{\beta}\leqslant\pi \tag{23}$$

再由 $\theta=\bar{\beta}$ 处的连接条件得：

$$\left.\begin{aligned}&\bar{C}_1+\bar{C}_2\bar{\beta}+\bar{C}_3\cos 2\bar{\beta}+\bar{C}_4\sin 2\bar{\beta}-\frac{\sqrt{3}}{4}K(\cos 2\bar{\beta}-1)=0\\&\bar{C}_2-2\bar{C}_3\sin 2\bar{\beta}+2\bar{C}_4\cos 2\bar{\beta}+\frac{\sqrt{3}}{2}K\sin 2\bar{\beta}=0\\&4\bar{C}_3\cos 2\bar{\beta}+4\bar{C}_4\sin 2\bar{\beta}-\sqrt{3}K\cos 2\bar{\beta}=0\end{aligned}\right\}\tag{24}$$

则用(24)及(20)式中的前六式可解得由 $\bar{\theta}_0$、$\bar{\alpha}$、$\bar{\beta}$ 表示的各常数，而 $\bar{\theta}_0$、$\bar{\alpha}$、$\bar{\beta}$ 满足如下的关系式:

$$\left.\begin{aligned}&2\operatorname{ctg}(\bar{\alpha}+\bar{\beta})=\frac{(1+2\sin^2\bar{\theta}_0)\cos\bar{\theta}_0-\sqrt{3}}{\sin^3\bar{\theta}_0}\\&\frac{2(\bar{\alpha}-\bar{\beta})}{\sin(\bar{\alpha}+\bar{\beta})\sin(\bar{\beta}-\bar{\alpha})}=\frac{3\cos\bar{\theta}_0+\sqrt{3}}{\sin^3\bar{\theta}_0}\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

经过数值计算，结果表明: 当 $\bar{\theta}_0$ 以 75.5° 继续增大时，$\bar{\alpha}$ 随之增大而 $\bar{\beta}$ 由 π 逐渐减少，这时的弹性区由于受两边塑性区的挤压而迅速地缩小. 最后该弹性区以弹性核的形式存在而使尖端应力场成为满塑性区，同时出现了应力的间断线，这就是[1]所给出的结果，这时的 $\bar{\theta}_0=79.8°$ 而 $\bar{\alpha}=\bar{\beta}=151.2°$. 图 3、7、8 分别给出了当 $\bar{\theta}_0=39.12°$、60°、79.8° 时各无量应力分量随 θ 角的变化曲线.

由以上的分析及计算结果表明: 与平面应变问题的情形相仿，平面应力静止裂纹起始扩展时的尖端应力场也同样是不唯一的，存在几种可传的应力场构造，因此要最后确定还必须借助于远场计算.

4. 结论

(1) 平面应力 I 型静止裂纹的尖端场可以包含有弹性区及塑性区，即使要求在各区域的连接处应力场是全连续的，尖端场仍然不能唯一确定，场中包含一自由参数，它决定着场内弹性区的大小及构造方式.

(2) 在特殊情况下，当弹性区退化为弹性核而使尖端场成为满塑性区时，便得到 Hutchinson[1] (1968) 所给出的解.

(3) 文献[5]给出的应力场为本文构造 I 中当 $\theta_0=0$ 时的特殊情况.

参　考　文　献

[1] Hutchinson, J. W., *J.M.P.S.*, **16**, 5 (1968), 337.
[2] Shih, C. F., ASTM-STP, 560 (1974), 187.
[3] 高玉臣,固体力学学报, 1(1980),69.
[4] 高玉臣,力学学报,1(1980),49.
[5] 靳志和,余寿文,力学学报,**19**,5(1987),483.

ELASTIC-PLASTIC FIELDS AT A CRACK TIP IN PERFECTLY PLASTIC MEDIUM

Zhang Zimao　Ma Xingrui
(Harbin Institute of Technology)

Gao Yuchen
(Harbin Shipbuilding Engineering Institute)

Abstract Based on the basic equations and continuity conditions, the configurations of the near-tip fields for a plane stress tensile crack in a perfectly plastic material have been studied in details in this paper. It is shown that the general solution of the near-tip fields contains an elastic region, and the stresses are continuous. Specially, it is reduced to the solution which is given by Hutchinson[1] (1968) as the elastic region degenerates into an elastic kernel.

Key words perfectly-plastic material. near-tip fields, elastic region, plastic region