

样条积分方程法分析弹塑性板弯曲¹⁾

王有成
(合肥工业大学)

吴建国
(浙江省电力设计院)

摘要 基于形变理论和 Mises 准则本文用虚载法分别导出 Reissner 型和 Kirchhoff 型板弹塑性弯曲方程, 对它们间在多边形简支和轴对称弯曲下的相通性给出论证, 并用弹性板样条积分方程法来求解, 对诸如塑性域的范围和深度以及各点的弹塑性内力和位移等即使在稀疏剖分下也能有良好的计算精度.

关键词 样条积分方程法, 弹塑性板弯曲

文献[1]曾用形变理论和边界元间接法求解薄板的弹塑性弯曲, 理论上有所前进, 但计算结果似较粗糙. 本文则用样条积分方程法^[2]来分析任意板(考虑或不考虑横向剪切变形)的弹塑性弯曲, 计算精度和效率均较高.

1. Reissner 型板弹塑性弯曲

根据形变理论和 Mises 准则, 取泊松比 μ 为 0.5, 并略去挤压应力 σ_z , 可以导出 Reissner 型板的弹塑性弯曲方程^[3](图 1)

$$\frac{1}{4} D \left(\delta_{\alpha\beta} \nabla^2 + 3 \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right) \phi_\beta + C(W_{,\alpha} - \phi_\alpha) + m_\alpha + \delta m_\alpha = 0$$
$$c(\nabla^2 W - \phi_{\alpha,\alpha}) + q + \delta q = 0 \quad (1)$$

式中 $W = W(x_\alpha)$ 和 $\phi_\alpha = \phi_\alpha(x_\alpha)$ 是平均的挠度和转角; q 和 m_α 是中面法载和力矩载集度; $(\cdot)_{,\alpha} = \partial(\cdot)/\partial x_\alpha$; $D = Eh^3/9$, $c = 5Gh/6$ (各向同性) 或 $c = 5G_x h/6$ (横观各向同性); 希腊字母 α, β 取值(1, 2), 同项下标重复表示求和, 但带下杠号的不计入哑标; δq_α 和 δm_α 为虚载集度

$$\delta m_\alpha = (Q M_{\alpha\beta}^c), \quad \beta - Q^c Q_\alpha^c, \quad \delta q = -(Q^c Q_\alpha^c)_{,\alpha} \quad (2)$$

$M_{\alpha\beta}^c$ 和 Q_α^c 是弹塑性内力 $M_{\alpha\beta}$ 和 Q_α 的弹性部分, 即

$$M_{\alpha\beta}^c = (1 - Q) M_{\alpha\beta}, \quad Q_\alpha^c = (1 - Q^c) Q_\alpha^c \quad (3)$$

$$M_{\alpha\beta}^c = -\frac{D}{2} (K_{\alpha\beta} + K_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}), \quad Q_\alpha^c = c \gamma_\alpha \quad (4)$$

而

$$K_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\phi_{x,\beta} + \phi_{\beta,x}), \quad \gamma_\alpha = W_{,\alpha} - \phi_\alpha \quad (5)$$

1) 国家自然科学基金资助课题.

本文于 1988 年 7 月 25 日收到, 1989 年 5 月 24 日收到修改稿.

$$Q = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} \omega z^2 dz, Q^c = \frac{3}{2h} \int_{-h/2}^{h/2} \omega dz - \frac{1}{2} Q \quad (6)$$

ω 由应力应变关系确定

$$\sigma_c = (1 - \omega) E \epsilon_c \quad (7)$$

σ_c 和 ϵ_c 为等效应力和等效应变, 当略去塑性区中的横向剪切变形 $\epsilon_{\alpha\beta}$ 对 ϵ_c 的影响后有^[4]

$$\epsilon_c = z K_c \quad (8)$$

而

$$K_c = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{K_{11}^2 + K_{11}K_{22} + K_{22}^2 + K_{12}^2} \quad (9)$$

塑性域 A_p 和塑性深度 t_p (图2) 确定如下

$$K_c \geq \frac{2}{h} \sigma_s \quad (10)$$

$$t_p = \frac{h}{2} - \frac{\sigma_s}{K_c} \quad (11)$$

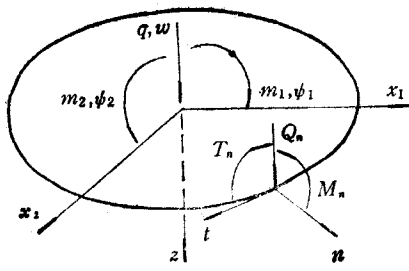


图 1

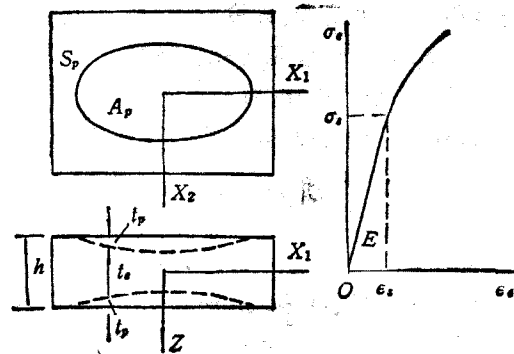


图 2

2. Kirchhoff 型板弹塑性弯曲

在上节中若令 $c = \infty, \phi_{\alpha} = W_{,\alpha}$ 并将 Q_{α} 视为导出量, 就可得出 Kirchhoff 型板的相应公式及其弹塑性弯曲方程

$$D \nabla^2 \nabla^2 W = q - m_{\alpha,\alpha} - (Q M_{\alpha\beta}^c)_{\alpha,\beta} \quad (12)$$

其实若在 Reissner 型板方程中引入函数 F, f 和 ϕ , 使

$$\phi_1 = F_{,1} + f_{,2}, \phi_2 = F_{,2} - f_{,1}, W = F - \frac{D}{C} \nabla^2 F - \phi$$

ϕ 是满足方程(1)的特解, 并要求

$$A: \phi_{,\alpha} = \frac{1}{C} (m_{\alpha} + \delta m_{\alpha}), \quad s: \phi = 0$$

可以证明, 在 polygonal 简支条件下分别按 Reissner 理论和 Kirchhoff 理论计算的弹塑性板弯曲除挠度外其他结果都相同。对轴对称弯曲也有相同的结论。

3. 样条积分方程法

Reissner 型板弹塑性弯曲积分方程写成

$$H_i(P) + \int_i (Q_n^* W - M_n^* \phi_n - T_n^* \phi_t) ds = \int_A (qW^* + m_n \phi_n^*) dA + \int_{A_p} (\delta qW^* + \delta m_n \phi_n^*) dA \quad (13)$$

式中带*号的是第*i*态基本解(下标*i*略); $H_i(P)$ 因辅态*i*和奇点*P*而异,如*P*位在域内且*i*为1~5态时 $H_i(P)$ 分别取 $W(P), \phi_n(P), M_n(P), T_n(P)$ 和 $Q_n(P)$,等等。对边界积分和域积分中的待解函数作样条插值,解算细节阅[5]。塑性域积分可用散度定理化简

$$\int_{A_p} (\delta qW^* + \delta m_n \phi_n^*) dA = \int_{A_p} (Q_n^c Q_n^c r_n^* - Q_n^c M_n^c K_n^c) dA + \int_{i_p} [Q_n^c (M_n^c \phi_n^* + T_n^c \phi_t^*) - Q_n^c Q_n^c W^*] ds \quad (14)$$

塑性半径 r_p 按(10)式搜索(图3)。若令 $r = \xi r_p / m, \beta = \eta \theta / n$,拟扇形域 A_p 就可变换到一矩形域上^[6]。对 A_p, Q 和 Q^c 可在设初值后迭代逼近,从而使问题得以拟线性化。至于轴对称弯曲既可由已知荷载搜索塑性域,也可由给定塑性域反算相应荷载。

Kirchhoff 型板弹塑性弯曲也可仿上进行分析,解算细节参阅[7]。

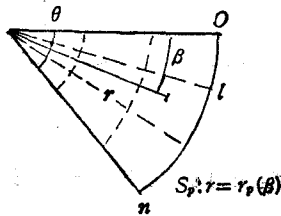


图 3

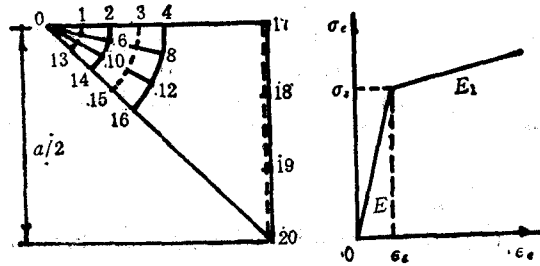


图 4

4. 算例

一简支方板承受均载 q , 已知 $h=1\text{cm}, a=20\text{cm}, E=1 \times 10^6\text{kg/cm}^2, E_1 = \frac{1}{10} E,$

$\sigma_s = 0.0044, \mu = 0.5.$

利用对称性取 1/8 板分析(图4)。计算荷载取 $q = 1.3q_s, q_s = 33.243\text{kg/cm}^2$ 为该板的弹性极限荷载。计算结果列于表 1、2,上算 O 表示弹性解,挠度 W 按 $c = \infty$ 列出。当剪切刚度 c 取不同值时,除 W 外其他值均不变。

表 1

A_p 域 网格	塑性半径				转 角			挠 度	
	$r_p _{\beta=0}$	$r_p _{\beta=\pi/12}$	$r_p _{\beta=\pi/6}$	$r_p _{\beta=\pi/4}$	$10^2 \phi_{17} \frac{D}{qa^3}$	$10^2 \phi_{18} \frac{D}{qa^3}$	$10^2 \phi_{19} \frac{D}{qa^3}$	$10^4 W_0 \frac{D}{qa^4}$	W_0/W_0^e
2×3	5.0902	5.2074	5.5135	5.7310	-1357	-1191	-713	41236	1.0189
4×3	5.0919	5.2082	5.5121	5.7264	-1356	-1191	-713	41217	1.0184

表 2

网格 结点	弹塑性内力						塑性深度		塑性指标			
	$10^6 M_{11} qa^2$		$10^6 M_{22} qa^2$		$10^6 M_{12} qa^2$		$10^6 r_p$		$10^6 Q$		$10^6 Q^c$	
	2×3	4×3	2×3	4×3	2×3	4×3	2×3	4×3	2×3	4×3	2×3	4×3
0	51532	51523	51532	51523	0	0	115960	115840	67001	66866	5992	5974
1		51159		51071		0		110270		60834		5135
2	50000	50014	49624	49612	0	0	92732	92743	43563	43575	3022	3022
3		47690		46771		0		59091		18113		766
4	43254	43280	41533	41522	0	0	0	0	0	0	0	0
5		51134		51048		-189		109950		60496		5089
6	49899	49913	49559	49543	-766	-766	91854	91841	42770	42759	2935	2933
7		47461		46630		-1713		57906		17408		721
8	42890	42906	41315	41302	-2899	-2889	0	0	0	0	0	0
9		51064		51009		-373		109250		59755		4992
10	49614	49626	49401	49384	-1495	-1493	89563	89527	40730	40697	2716	2714
11		46801		46258		-3304		54567		15494		602
12	41827	41832	40784	40782	-5563	-5550	0	0	0	0	0	0
13		50997		50997		-466		108750		59233		4921
14	49340	49340	49340	49340	-1868	-1859	87851	87836	39235	39223	2561	2559
15		46148		46148		-4097		52125		14162		524
16	40712	40725	40712	40725	-6885	-6865	0	0	0	0	0	0

5. 讨论

(1) 本文将塑性影响转换为虚载,并用弹性板样条积分方程法分析板的弹塑性弯曲。板的外形、受载和支承都不受什么限制,且可同时给出全部弹塑性信息。

(2) 拟扇形样条插值用于弹塑性问题是成功的,在少量自由度下就可得到良好的计算精度,但加密 A_p 域的部分可使 r_p 的收敛明显加快,当然这是以加大矩阵体积作为代价的。

(3) 本文将两类板理论的相通性从弹性弯曲且 $m_x = 0^{[8]}$ 推广到弹塑性弯曲的一般受载情况,这在理论上和实用上都是有意义的。

(4) 本法也可推广到扁壳的弹塑性弯曲分析上^[3]。

本文的理论部分是第一作者在西德斯图加特大学访问期间在该校计算机应用所所长 Argyris 教授及其同事们的支持和关心下写成的,在此深致谢意。

参 考 文 献

- [1] 何广乾,林春哲,应用边界积分方程法分析任意形状和边界条件的薄板弹性和弹塑性弯曲问题,建筑结构学报,1(1984),3-15.
- [2] 王有成,圆板非线性分析的样条积分方程法,合肥工业大学学报,2(1985),1-15.
- [3] Wang, Y. C. and Wu, J. G., SIEM for Elastoplastic Bending of Plates and Shallow Shells, Boundary Elements 11, Ed. C. A. Brebbia, Springer-Verlag, Cambridge, USA, (1989).
- [4] 王仁等,塑性力学基础,科学出版社(1987).

- [5] 王有成、王左辉, Reissner 型板样条边界元, 上海力学, 1(1987), 18—30.
[6] 王有成等, Kirchhoff 型扁壳样条边界元, 计算结构力学及其应用, 2(1988) 1—8.
[7] 王有成, Kirchhoff 型板样条边界元, 计算结构力学及其应用, 1(1986), 41—50.
[8] 胡海昌, 弹性力学变分原理及其应用, 科学出版社(1982).

SPLINE INTEGRAL EQUATION METHOD FOR ELASTOPLASTIC BENDING OF PLATES

Wang Youcheng Wu Jianguo

(Hefei University of Technology)

Abstract In view of deformation theory and Mises criterion, we use the fictitious loads formulation to obtain the elastoplastic bending equations of Reissner's plates and Kirchhoff's plates, respectively, and solve them by the spline integral equation method just as the elasto-problems. The equivalence of these two plate models under polygonal simply-supported condition and axisymmetric bending is also studied here. The satisfactory results can be obtained even with a few of degrees of freedom.

Key words Spline integral equation method, elastoplastic bending of plates