

# 岩石力学中的 Fuzzy 数学方法<sup>1)</sup>

李文秀

(冶金工业部长沙矿冶研究院)

**提要** 鉴于岩石力学问题中的许多因素具有强烈的“模糊性”,本文利用 Fuzzy 数学来研究工程中的岩体力学问题;并针对露天矿山岩体变形破坏问题,应用 Fuzzy 概率测度理论导出了岩体变形破坏的 Fuzzy 概率公式,且给出了数值方法。实例计算表明,本方法适用于分析和研究岩石力学尤其是矿山岩体力学问题。

**关键词** 岩石力学、Fuzzy 数学、Fuzzy 概率测度、岩体变形、数值方法

随着岩土工程的增多,岩石力学问题如矿山岩体变形(或移动)等已引起更广泛的重视。近年来矿山岩体变形破坏或失稳问题也有专著进行研究<sup>[1]</sup>。本文针对矿山岩体变形破坏问题提出一种新的理论研究和工程分析方法。

由于矿山岩体的复杂性,影响岩体稳定的诸种因素均难以精确观测或确定。因而岩体稳定问题在客观上属于具有“模糊性”的一类非确定性问题;其中许多工程参数的取值从不合理到合理这二者之间有一个中介过渡,而此过程并没有严格的界限,故传统方法难以描述这一具有“模糊性”的过程,而利用 Fuzzy 数学理论则可较好地予以刻画<sup>[2-3]</sup>。

## 一、Fuzzy 数学理论及工程评价

为分析问题方便,给出与本文讨论研究有关的 Fuzzy 数学定义<sup>[2-4]</sup>。

**定义 1** 假定  $\Omega$  为一空间,而  $(\Omega, \mathcal{D}, P)$  为一概率空间(非 Fuzzy 空间),其中  $\mathcal{D}$  是集合  $\Omega$  中 Borel 集合的  $\sigma$ -域,而  $P$  是  $\Omega$  上的概率测度; $\Omega$  中的点(或样本)是由  $x$  所定义的。从而,我们可将  $x$  视为客观问题中的样本、变量或参变量。

**定义 2** 设  $A$  是一个由某些样本所构成的集合(Fuzzy 子集合),且  $A \in \mathcal{D}$ ,则 Fuzzy 集合  $A$  的概率即可用下面的公式表示:

$$\tilde{P}(A) = \int_{\Omega} \mu_A(x) dp(x) \quad (1)$$

$$\int_{\Omega} dp(x) \equiv 1.0 \quad (2)$$

此处,  $\mu_A(x): \Omega \rightarrow [0, 1]$  为“隶属函数”(即 Membership function),  $\mu_A(x)$  为 Borel 可测的;  $dp(x)$  表示分布密度函数。

实际上,只需确定出  $\mu_A(x)$  和  $dp(x)$  的表达式,使得它们在实际工程问题中具有

1) 本课题受中国科学院青年奖励研究基金资助。

本文于 1989 年 1 月 26 日收到,1989 年 6 月 30 日收到修改稿。

一定的物理意义, 则即可计算该系统的 Fuzzy 概率值。

公式(1)为 Lebesgue-Stieltjes 积分。

在一维情形下, 若  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 则有:

$$\tilde{P}(A_1; x) \equiv \tilde{P}[x_{A_1} \leq x] = \int_{D_1} \mu_{A_1}(x) dp(x) \quad (3)$$

其中,  $x_{A_1}$  是 Fuzzy 随机变量, 积分区域  $D_1 \in Q$ 。

在高维情形下, 对于  $x_i \in (-\infty, +\infty)$  和  $Q$  中所有的  $i$ , 下面恒等式成立。

$$\tilde{P}[(x_{1A} \leq x_1) \cap \cdots \cap (x_{nA} \leq x_n)] \equiv \int_{D_1} \cdots \int_{D_n} \mu_A(X) dp(X) \quad (4)$$

定义 3 假定在  $n$  维情况下, 有下式成立:

$$\mu_A(X) \rightarrow \mu_A(X(t), t) \quad (5)$$

若事先给定概率密度函数  $dp(X(t))$ , 则我们可限定  $\tilde{P}_A(t)$  为如下表达式:

$$\tilde{P}_A(X, t) = \int_Q \mu_A(X, t) dp(X) \quad (6)$$

依上述理论, 可对岩体稳定程度进行评价。

根据工程实例计算分析(见本文实例)和文献[5]的研究结果, 在考虑爆破动力及地下水影响的情形下, 可按下列评价准则来判断岩体的稳定程度。

1. 当  $0 < \tilde{P}_A \leq 0.05$  时, 边坡稳定;
2. 当  $0.05 < \tilde{P}_A \leq 0.11$  时, 边坡表面岩体可能沿节理面出现小裂缝等较小变形, 但边坡仍保持基本稳定;
3. 当  $0.11 < \tilde{P}_A \leq 0.18$  时, 边坡将发生小区段局部失稳, 如出现大裂缝或局部垮落等;
4. 当  $0.18 < \tilde{P}_A \leq 0.30$  时, 边坡将出现大区段失稳破坏, 如大区段滑坡或崩塌等破坏现象;
5. 当  $0.30 < \tilde{P}_A$  时, 边坡可能发生大规模滑坡或整体破坏, 此时边坡将完全失稳。

## 二、岩体变形破坏的 Fuzzy 数学模型

我们主要考虑节理发育或风化岩体, 并从安全系数着眼, 以便于工程应用。

根据国内外许多人的研究, 对于土质的或节理化岩质边坡, 其变形破坏模式可按圆弧式(见图 1)考虑<sup>[5, 10]</sup>。

假定岩体在统计意义上具有各向同性性质, 则依 Bishop 公式可得下式:

$$F_s \sum_{i=1}^n W_i \sin \alpha = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{C_i d_i + W_i (1 - R_{ui}) \lg \phi_i}{\cos \alpha + \frac{\sin \alpha \cdot \lg \phi_i}{F_i}} \right] \quad (7)$$

其中,  $F_s$ 、 $F_i$  为边坡岩体安全系数;  $n$  为潜在滑体条块数;  $W_i = S_i \gamma$  为条块自重;  $S_i$  为条块体积;  $\gamma$  为介质的容重;  $C_i$  为岩体内聚力;  $d_i$  为条块宽度;  $\phi_i$  为介质的内摩擦角;  $R_{ui}$  为孔隙压力比的平均值。

考虑  $F \equiv 1$  的情形, 并引入内聚力与介质密度之比的概念, 令  $g_i \equiv c_i / \gamma$ ; 从而有:

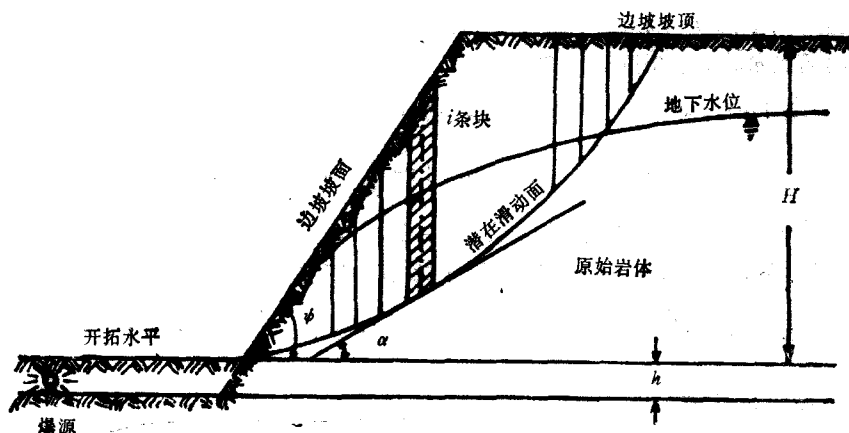


图1 岩体破坏模式

$$\sum_{i=1}^n S_i \cdot \sin \alpha = \sum_{i=1}^n \frac{g_i d_i + S_i (1 - R_{ui}) \operatorname{tg} \phi_i}{\cos \alpha + \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \phi_i} \quad (8)$$

$$g_i = \frac{\sum_{i=1}^n S_i \cdot \sin \alpha - \sum_{i=1}^n \frac{S_i (1 - R_{ui}) \operatorname{tg} \phi_i}{\cos \alpha + \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \phi_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\cos \alpha + \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \phi_i}} \quad (9)$$

用  $f_1(\phi_i)$  表示(9)式分子,  $f_2(\phi_i)$  表示分母, 则:

$$g_i = \frac{f_1(\phi_i)}{f_2(\phi_i)} \quad (10)$$

基于上述分析, 我们考虑密度函数。根据工程实践知, 影响岩体稳定的各种因素彼此相互影响制约, 而任何单一因素都不可能决定整体之稳定。根据 Tobutt 等人的研究<sup>[6]</sup>, 关于  $g_i$  的分布密度函数具有如下形式:

$$f_g(g_{ii}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_g}} \exp \left[ - \left( \frac{\lg \bar{g} - \lg g_{ii}}{\sqrt{2}\sigma_g} \right)^2 \right] \quad (11)$$

其中,  $\sigma_g$  为  $g_i$  的方差,  $\bar{g}$  为  $g_i$  的数学期望。

由于生产爆破贯穿于金属矿开采过程之始末, 不同距离处的装药量大小对边坡岩体的影响是必须考虑的。由于传统方法对此不便分析而未能考虑, 而 Fuzzy 数学方法则可具体地分析这一难题。

利用 Fuzzy 数学方法, 需要确定与距离相关的隶属函数。根据 Constantinou, M. C., Gazetas, G. 和 Tadjbakhsh, I. 等人的研究<sup>[11]</sup>, 可确定隶属函数为:

$$\mu_A(x_i) = \exp(-\delta\beta x_i^n), \quad (x_i \geq 0; n \approx 1.0) \quad (12)$$

其中,  $A$  是由  $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$  构成的 Fuzzy 子集;  $x_i$  为地表坐标点;  $\delta, \beta$  为与爆破有关的参数;  $n$  为综合影响指数(分析表明  $n = 1$  即可满足实际工程需要)。

根据定义 2, 可确定出岩体变形破坏 Fuzzy 概率(与  $g_i$  有关)表达式  $\tilde{P}_A(g_{ii}, x_i)$ 。

$$\tilde{P}_A(g_{ii}, x_i) = \int_{-\infty}^{\lg \frac{f_1(\phi)}{f_2(\phi)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_g}} \exp(-\delta\beta x_i^n) \exp \left[ - \left( \frac{\lg \bar{g} - \lg g_{ii}}{\sqrt{2}\sigma_g} \right)^2 \right] d \lg g_{ii}. \quad (13)$$

为考虑更多的影响因素, 需给出  $R_{ui}$  和  $\phi_i$  的分布密度函数表达式  $f_R(R_{uii})$  和  $f_\phi(\phi_{ii})$ .

$$f_R(R_{uii}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_R} \exp \left\{ - \left[ \frac{\lg R_{uii} - \lg \bar{R}}{\sqrt{2}\sigma_R} \right]^2 \right\} \tilde{P}_A(g_{ii}, x_i) \quad (14)$$

$$f_\phi(\phi_{ii}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\phi} \exp \left\{ - \left[ \frac{\lg(\lg \phi_{ii}) - \lg(\lg \bar{\phi})}{\sqrt{2}\sigma_\phi} \right]^2 \right\} \tilde{P}_A(g_{ii}, x_i) \quad (15)$$

综合上述各种情况, 可计算在诸种因素影响下与距离相关的岩体变形破坏 Fuzzy 概率  $\tilde{P}_A$ .

$$\begin{aligned} \tilde{P}_A = & \frac{1}{2\pi\sigma_R\sigma_\phi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ - \left[ \left( \frac{\lg \left( \frac{R_{uii}}{\bar{R}} \right)}{\sqrt{2}\sigma_R} \right)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( \frac{\lg \left( \frac{\lg \phi_{ii}}{\lg \bar{\phi}} \right)}{\sqrt{2}\sigma_\phi} \right)^2 \right] \right\} \tilde{P}_A(g_{ii}, x_i) d \lg R_{uii} d \lg(\lg \phi_{ii}). \\ & (\tilde{P}_A = \tilde{P}_A(g_{ii}, R_{uii}, \phi_{ii}, x_i)) \end{aligned} \quad (16)$$

### 三、数值解法

鉴于公式(13)、(16)均为广义积分, 且被积函数之原函数不能用初等函数的有限形式所表示, 故必须采用数值方法求解. 为此将(13)式写成:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_A(g_{ii}, x_i) = & \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} \exp(-\delta\beta x_i^n) \exp \left\{ - \left[ \frac{\lg \bar{g} - \lg g_{ii}}{\sqrt{2}\sigma_t} \right]^2 \right\} d \lg g_{ii} \\ & + \int_0^{\lg \frac{f_1(\phi)}{f_2(\phi)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} \exp(-\delta\beta x_i^n) \exp \left\{ - \left[ \frac{\lg \bar{g} - \lg g_{ii}}{\sqrt{2}\sigma_t} \right]^2 \right\} d \lg g_{ii} \end{aligned} \quad (17)$$

由(17)式可导出:

$$\tilde{P}_A(g_{ii}, x_i) = \frac{\exp(-\delta\beta x_i^n)}{2} - \int_0^{\frac{\lg \bar{g} - \lg f_1(\phi) + \lg f_2(\phi)}{\sqrt{2}\sigma_t}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\delta\beta x_i^n - \xi^2) d\xi \quad (18)$$

对于(18)式可通过变换使之可进行数值积分.

$$\begin{aligned} \tilde{P}_A = & \frac{\mu_A}{2} - \int_{-1}^{+1} \frac{\mu_A [\lg \bar{g} - \lg (f_1(\phi)f_2(\phi))]}{2\sqrt{2\pi}\sigma_t} \\ & \times \exp \left\{ - \left[ \frac{\lg - \lg (f_1(\phi)f_2(\phi))}{2\sqrt{2}\sigma_t} (\xi_B + 1) \right]^2 \right\} d\xi_B \end{aligned} \quad (19)$$

对(19)式使用 Gauss-Legendre 求积公式<sup>[12]</sup>, 则有:

$$\tilde{P}_A(g_{ii}, x_i) \approx \frac{\mu_A}{2} - \sum_{k=1}^3 \mu_A \cdot A_k \cdot f(\xi_{BK}) \quad (20)$$

其中,  $A_k$  为 Gauss 型系数;  $f(\xi_{BK})$  为  $\xi_B = \xi_{BK}$  时公式(19)中积分号下的函数表达式.

根据公式(20)推导出下面公式.

$$\tilde{P}_A(R_{uij}, x_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_R}} \exp \left\{ - \left[ \frac{\lg R_{uij} - \lg \bar{R}}{\sqrt{2\sigma_R}} \right]^2 \right\} \tilde{P}_A(g_{ij}, x_i) d \lg R_{uij} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_A(R_{uij}, x_i) = & \int_0^{+\infty} \frac{2\mu_A}{\sqrt{2\pi R_{uij}\sigma_R}} \exp \left\{ - \left[ \frac{\lg R_{uij} - \lg \bar{R}}{\sqrt{2\sigma_R}} \right]^2 \right\} d \lg R_{uij} \\ & - \int_0^{+\infty} \frac{2A_1\mu_A}{\sqrt{2\pi R_{uij}\sigma_R}} \exp \left\{ - \left[ \frac{\lg R_{uij} - \lg \bar{R}}{\sqrt{2\sigma_R}} \right]^2 \right\} \\ & \cdot \frac{\lg \bar{g} - \lg f_1(\phi) + \lg f_2(\phi)}{2\sqrt{2\sigma_g}} \\ & \cdot \exp \left\{ - \left[ \frac{\lg \bar{g} - \lg f_1(\phi) + \lg f_2(\phi)}{2\sqrt{2\sigma_g}} (\xi_{E1} + 1) \right]^2 \right\} d \lg R_{uij} \\ & - \int_0^{+\infty} \frac{2A_2\mu_A}{\sqrt{2\pi R_{uij}\sigma_R}} \exp \left\{ - \left[ \frac{\lg R_{uij} - \lg \bar{R}}{\sqrt{2\sigma_R}} \right]^2 \right\} \\ & \cdot \frac{\lg \bar{g} - \lg f_1(\phi) + \lg f_2(\phi)}{2\sqrt{2\sigma_g}} \\ & \cdot \exp \left\{ - \left[ \frac{\lg \bar{g} - \lg [f_1(\phi)f_2(\phi)]}{2\sqrt{2\sigma_g}} (\xi_{E2} + 1) \right]^2 \right\} d \lg R_{uij} \\ & - \int_0^{+\infty} \frac{2A_3\mu_A}{\sqrt{2\pi R_{uij}\sigma_R}} \exp \left\{ - \left[ \frac{\lg R_{uij} - \lg \bar{R}}{\sqrt{2\sigma_R}} \right]^2 \right\} \\ & \cdot \frac{\lg \bar{g} - \lg [f_1(\phi)f_2(\phi)]}{2\sqrt{2\sigma_g}} \\ & \cdot \exp \left\{ - \left[ \frac{\lg \bar{g} - \lg [f_1(\phi)f_2(\phi)]}{2\sqrt{2\sigma_g}} (\xi_{E3} + 1) \right]^2 \right\} d \lg R_{uij} \quad (22) \end{aligned}$$

由公式(22)又可导出:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_A(R_{uij}, x_i) = & \int_0^{+\infty} \frac{2\mu_A}{\sqrt{2\pi R_{uij}\sigma_R}} e^{-t_1^2} d \lg R_{uij} - \int_0^{+\infty} \frac{2A_1 t_2 \mu_A}{\sqrt{2\pi R_{uij}\sigma_R}} e^{-t_1^2 - t_2^2 (\xi_{E1} + 1)^2} d \lg R_{uij} \\ & - \int_0^{+\infty} \frac{2A_2 t_2 \mu_A}{\sqrt{2\pi R_{uij}\sigma_R}} e^{-t_1^2 - t_2^2 (\xi_{E2} + 1)^2} d \lg R_{uij} \\ & - \int_0^{+\infty} \frac{2A_3 t_2 \mu_A}{\sqrt{2\pi R_{uij}\sigma_R}} e^{-t_1^2 - t_2^2 (\xi_{E3} + 1)^2} d \lg R_{uij} \quad (23) \end{aligned}$$

其中,

$$t_1 = \frac{\lg R_{uij} - \lg \bar{R}}{\sqrt{2\sigma_R}}; \quad t_2 = \frac{\lg \bar{g} - \lg f_1(\phi) + \lg f_2(\phi)}{2\sqrt{2\sigma_g}}$$

将(23)式中的积分式分别记为  $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$ 、 $I_4$ ，并分别使用 Gauss-Legendre 求积公式，则可得:

$$I_1 \approx \mu_A + \sum_{\kappa=1}^3 \frac{\mu_A \cdot B_{\kappa} \lg \bar{R}}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_R} \exp \left\{ - \left[ \frac{\lg \bar{R}}{2\sqrt{2\sigma_R}} (\eta_{EK} + 1) \right]^2 \right\} \quad (24)$$

$$I_2 \approx \frac{A_1 t_2 \mu_A}{\sqrt{\pi}} \exp\{-[t_2(\xi_{E1} + 1)]^2\} + \sum_{K=1}^3 \frac{B_K A_1 t_2 \lg \bar{R} \cdot \mu_A}{\sqrt{2\pi\sigma_R}} \cdot \exp\{-[t_2(\xi_{E1} + 1)]^2\} \cdot \exp\left\{-\left[\frac{\lg \bar{R}}{2\sqrt{2\sigma_R}}(\eta_{EK} + 1)\right]^2\right\} \quad (25)$$

$$I_3 \approx \frac{A_2 t_2 \mu_A}{\sqrt{\pi}} \exp\{-[t_2(\xi_{E2} + 1)]^2\} + \sum_{K=1}^3 \frac{B_K A_2 t_2 \lg \bar{R} \cdot \mu_A}{\sqrt{2\pi\sigma_R}} \cdot \exp\{-[t_2(\xi_{E2} + 1)]^2\} \cdot \exp\left\{-\left[\frac{\lg \bar{R}}{2\sqrt{2\sigma_R}}(\eta_{EK} + 1)\right]^2\right\} \quad (26)$$

$$I_4 \approx \frac{A_3 t_2 \mu_A}{\sqrt{\pi}} \exp\{-[t_2(\xi_{E3} + 1)]^2\} + \sum_{K=1}^3 \frac{B_K A_3 t_2 \lg \bar{R} \cdot \mu_A}{\sqrt{2\pi\sigma_R}} \cdot \exp\{-[t_2(\xi_{E3} + 1)]^2\} \cdot \exp\left\{-\left[\frac{\lg \bar{R}}{2\sqrt{2\sigma_R}}(\eta_{EK} + 1)\right]^2\right\} \quad (27)$$

以上诸式中,  $A_K$ 、 $B_K$  为 Gauss 系数,  $\xi_{EK}$ 、 $\eta_{EK}$  为 Gauss 型节点<sup>[22]</sup>。对于(16)的计算,可按式考虑:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_A = & \frac{1}{2\pi\sigma_R} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sigma_\phi} \exp\left\{-\left[\frac{\lg\left(\frac{R_{uij}}{\bar{R}}\right)}{\sqrt{2\sigma_R}}\right]^2\right. \\ & \left. + \left(\frac{\lg\left[\frac{\lg\phi_{ij}}{\lg\phi}\right]}{\sqrt{2\sigma_\phi}}\right)^2\right\} \tilde{P}_A(g_{ij}, x_i) d\lg R_{uij} d\lg(\lg\phi_{ij}) \\ & (\tilde{P}_A = \tilde{P}_A(g_{ij}, R_{uij}, \phi_{ij}, x_i)). \end{aligned} \quad (28)$$

根据公式(28)及前面推导的结果,我们有:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_A(g_{ij}, R_{uij}, \phi_{ij}, x_i) = & \int_0^{+\infty} \frac{I_1 - I_2 - I_3 - I_4}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt, \\ & + \int_0^{\frac{\lg(\lg\phi)}{\sqrt{2\sigma_\phi}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} (I_1 - I_2 - I_3 - I_4) e^{-t^2} dt, \end{aligned} \quad (29)$$

其中;

$$t_3 = \frac{\lg(\lg\phi_{ij}) - \lg(\lg\phi)}{\sqrt{2\sigma_\phi}}.$$

综上分析,问题归结为(29)的计算。为此,我们用  $J_1$  和  $J_2$  分别表示(29)式中的第一个和第二个积分表达式;并用  $J_{21}$ 、 $J_{22}$ 、 $J_{23}$ 、 $J_{24}$  表示如下诸积分表达式:

$$J_{21} = \int_{-1}^{+1} \frac{I_1 \lg(\lg\phi)}{2\sqrt{2\pi\sigma_\phi}} \exp\left\{-\left[\frac{\lg(\lg\phi)}{2\sqrt{2\sigma_\phi}}(\zeta_E + 1)\right]^2\right\} d\zeta_E \quad (30)$$

$$J_{22} = \int_{-1}^{+1} \frac{-I_2 \lg(\lg\phi)}{2\sqrt{2\pi\sigma_\phi}} \exp\left\{-\left[\frac{\lg(\lg\phi)}{2\sqrt{2\sigma_\phi}}(\zeta_E + 1)\right]^2\right\} d\zeta_E \quad (31)$$

$$J_{23} = \int_{-1}^{+1} \frac{-I_3 \lg(\lg\phi)}{2\sqrt{2\pi\sigma_\phi}} \exp\left\{-\left[\frac{\lg(\lg\phi)}{2\sqrt{2\sigma_\phi}}(\zeta_E + 1)\right]^2\right\} d\zeta_E \quad (32)$$

$$J_{21} = \int_{-1}^{+1} \frac{-I_4 \lg(\overline{\lg \phi})}{2\sqrt{2\pi\sigma_\phi}} \exp \left\{ - \left[ \frac{\lg(\overline{\lg \phi})}{2\sqrt{2\sigma_\phi}} (\zeta_E + 1) \right]^2 \right\} d\zeta_E \quad (33)$$

对公式(30)至(33)再次使用 Gauss-Legendre 求积公式,则可获得下列公式:

$$J_{21} \approx \sum_{k=1}^3 \frac{C_k I_1}{2\sqrt{2\pi\sigma_\phi}} \exp \left\{ - \left[ \frac{\lg(\overline{\lg \phi})}{2\sqrt{2\sigma_\phi}} (\zeta_{EK} + 1) \right]^2 \right\} \lg(\overline{\lg \phi}) \quad (34)$$

$$J_{22} \approx \sum_{k=1}^3 \frac{-C_k I_2}{2\sqrt{2\pi\sigma_\phi}} \exp \left\{ - \left[ \frac{\lg(\overline{\lg \phi})}{2\sqrt{2\sigma_\phi}} (\zeta_{EK} + 1) \right]^2 \right\} \lg(\overline{\lg \phi}) \quad (35)$$

$$J_{23} \approx \sum_{k=1}^3 \frac{-C_k I_3}{2\sqrt{2\pi\sigma_\phi}} \exp \left\{ - \left[ \frac{\lg(\overline{\lg \phi})}{2\sqrt{2\sigma_\phi}} (\zeta_{EK} + 1) \right]^2 \right\} \lg(\overline{\lg \phi}) \quad (36)$$

$$J_{24} \approx \sum_{k=1}^3 \frac{-C_k I_4}{2\sqrt{2\pi\sigma_\phi}} \exp \left\{ - \left[ \frac{\lg(\overline{\lg \phi})}{2\sqrt{2\sigma_\phi}} (\zeta_{EK} + 1) \right]^2 \right\} \lg(\overline{\lg \phi}) \quad (37)$$

最后,我们获得下面公式:

$$J_1 = \frac{1}{2} (I_1 - I_2 - I_3 - I_4) \quad (38)$$

$$J_2 = J_{21} + J_{22} + J_{23} + J_{24} \quad (39)$$

根据(38)和(39)式,即可对(16)式进行计算,以逼近其真值。

#### 四、工程实例分析

我国西北某露天铅锌矿。该矿岩体受水和生产爆破震动影响较甚,边坡岩体节理发育。1986年7月,北部边坡揭露部分已高达240米。我们仅考虑第37号地质剖面,该剖面西北部已开挖204米,边坡组合剖面角为 $46^\circ 30'$ ,台阶剖面角 $65^\circ - 75^\circ$ ;岩体由石英片岩和黑云母石英片岩组成,节理裂隙发育,局部风化。

利用本文方法对边坡岩体变形破坏 Fuzzy 概率进行计算,部分结果列入表1。

在计算过程中,有关参数是根据文献[5]、[13]给出的方法确定的。根据文献[13]确定岩体的孔隙压力比为0.15;而 $\delta$ 、 $\beta$ 分别按下式确定<sup>[5]</sup>:

$$\delta = \frac{\alpha}{K}; \quad \alpha = \frac{\ln V - \ln K}{\ln(\sqrt[3]{Q/R})}; \quad K = \frac{V}{(\sqrt[3]{Q/R})^a}; \quad \beta = \frac{H\nu \operatorname{tg} \Phi \operatorname{tg} \Psi}{h}$$

其中, $\alpha$ 、 $K$ 可按最小二乘法确定; $V$ 为震速实测值; $Q$ 为装药量; $R$ 为爆区距测点的垂直距离; $H$ 为边坡高度; $h$ 为开挖阶段高度; $\nu$ 为岩体泊桑比; $\Phi$ 为岩体内摩擦角; $\Psi$ 为边坡总剖面角。这些参数均视为“数量化模糊参数”。

根据实测资料<sup>1)</sup>,确定出如下参数值:

$$\alpha = 1.827; \quad K = 198.5; \quad \delta = \frac{\alpha}{K} = 0.009204 \approx 0.009;$$

$$\beta = \frac{(1658 - 1538) \times \operatorname{tg} 39^\circ 50' \times 0.19 \times \operatorname{tg} 46^\circ 30'}{14.50} = 1.382012848 \approx 1.382.$$

1) 冶金部长沙矿冶研究院,厂坝露天矿生产爆破震动影响的综合分析(1986)。

从表1结果可见,所取上述参数基本符合实际工程情况。这可通过边坡岩体实际变形破坏情况予以证实。

表 1

$-x_i$	$\mu_A(x_i)$	$\bar{P}_A(x_i)$	$-x_i$	$\mu_A(x_i)$	$\bar{P}_A(x_i)$
500	0.0019912355	0.0004055539	24	0.7419213788	0.1511067533
490	0.0022549669	0.0004592680	23	0.7512070246	0.1529979561
480	0.0025536285	0.0005200962	22	0.7606088865	0.1549128286
470	0.0028918467	0.0005889810	21	0.7701284191	0.1568516670
460	0.0032748605	0.0006669892	20	0.7797670950	0.1588147712
450	0.0037086031	0.0007553293	19	0.7895264055	0.1608024451
400	0.0069071374	0.0014067732	18	0.7994078603	0.1628149960
350	0.0128642903	0.0026200635	17	0.8094129882	0.1648527354
300	0.0239592694	0.0048797723	16	0.8195433370	0.1669159784
250	0.0446232614	0.0090883972	15	0.8298004739	0.1690050443
200	0.0831091895	0.0169268067	14	0.8401859858	0.1711202563
150	0.1547878205	0.0315255574	13	0.8507014794	0.1732619416
100	0.2882866446	0.0587151956	12	0.8613485815	0.1754304315
90	0.3264690918	0.0664917954	11	0.8721289392	0.1776260615
80	0.3697086559	0.0752983756	10	0.8830442203	0.1798491713
70	0.4186751325	0.0852713532	9	0.8940961136	0.1821001048
60	0.4741270288	0.0965652130	8	0.9052863287	0.1843792103
50	0.5369233135	0.1093549007	7	0.9166165970	0.1866868403
40	0.6080367225	0.1238385328	6	0.9280886711	0.1890233519
30	0.6885688265	0.1402404659	5	0.9397043260	0.1913891065
29	0.6971867292	0.1419956698	4	0.9514653587	0.1937844701
28	0.7059124907	0.1437728412	3	0.9633735886	0.1962098132
27	0.7147474611	0.1455722552	2	0.9754308580	0.1986655112
26	0.7236930070	0.1473941900	1	0.9876390322	0.2011519439

该矿北部 1538—1658 区段,在下部生产爆破时,1984 年 9 月在 1610 平台上已出现了长 28 米,宽 10—40 厘米的大裂缝。此时 1538 水平开挖距永久性边坡 30 米,但边坡上部岩体仍发生移动变形,此时边坡岩体破坏 Fuzzy 概率  $\bar{P}_A = 0.1402404659$ ;而靠近边坡 2 米处开挖时 ( $x_i = 2$ ),破坏 Fuzzy 概率  $\bar{P}_A = 0.1986655112 \approx 0.2$ ;边坡发生了较大的区段滑坡,总滑动量近三万立方米,整个滑动过程约 25 分钟(据现场地测人员记录的资料,滑动从 7 月 28 日下午 4 点 20 分至 4 点 45 分结束),使 1574 水平的开采平台被整个破坏。

而在此区段滑坡前,我们曾利用极限平衡方法计算了该区段边坡安全系数。在考虑爆破动力作用情况下,安全系数  $F_s = 1.1645 > 1.0$ ;表明边坡是稳定的;这显然与实际情况不符。利用 Fuzzy 数学方法,考虑了多种因素的综合影响,故计算结果较为切合工程实际。由此可见,对于工程地质等条件比较复杂的节理化岩体稳定问题,采用 Fuzzy 数学方法进行分析评价是适宜的。

随着岩石力学学科的发展和数学与力学间的相互浸透,随着工程实测资料的不断积



累,本文所提出的方法将日臻完善。

本研究课题得到马光教授的指导和帮助,李文东同志协助收集了大量工程实测资料,在此一并致谢。

### 参 考 文 献

- [1] 孙玉科,牟会彪,姚宝魁著,边坡岩体稳定性分析,科学出版社(1988).
- [2] Kandel, A., and Bystems, W. J., *Fuzzy Processes, Fuzzy Sets and Systems*, 4(1980), 117—152.
- [3] Zadeh, L. A., *Probability Measures of Fuzzy Events*, *J. Math. Anal. Appl.*, 23(1968), 421—427.
- [4] 李文秀,中国科学(B辑), 9(1986), 971—980.
- [5] 李文秀,土木工程学报, 21, 3(1988), 81—89.
- [6] Tobutt, D. C., et al., *Int. J. for Numerical and Anal. Methods in Geomechanics*, 3(1979), 323—354.
- [7] Einstein, H. H., et al., *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. and Geomech. Abstr.*, 20, 5(1983), 227—236.
- [8] Vanmarcke, E. H., *J. Geotech. Eng. Div., Proc. Am. Soc. Civ. Eng.* (1977).
- [9] Glynn, E. F., *A Probabilistic Approach to the Stability of Rock Slopes*, Ph. D. Dissertation, M. I. T. (1979, 2).
- [10] Hoke, E., et al., *Rock Slope Engineering*, Inst. of Min. and Metal., London (1977).
- [11] Constantinou, M. C., et al., *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 12, (1984), 777—793.
- [12] 李文秀,隧道工程, 2(1984), 33—38.
- [13] 李文秀,西安矿业学院学报, 3(1987).

## FUZZY MATHEMATICAL METHOD IN ROCK MECHANICS

Li Wenxiu

(Changsha Research Institute of Mining and Metallurgy)

**Abstract** In view of the marked “Fuzziness” in the factors that have effect on the problems of rock mechanics, the deformation failure of rock mass in mining engineering is studied by using the Fuzzy mathematical theory in the paper. In accordance with the deformation failure of rock mass in open-pit mines, by applying the theory of Fuzzy probability measures, the Fuzzy probability formula is derived for the deformation failure of rock masses, and the numerical method is given to calculate the Fuzzy probability. The practical calculation shows that the method can be applied to analyzing and studying the problems of the rock mechanics, especially the mining rock mechanics.

**Key words** rock mechanics, fuzzy mathematics, fuzzy probability measures, rock mass deformation, numerical method