第22卷 第4期　　力学学报　　Vol. 22, No. 4
1990年7月　　ACTA MECHANICA SINICA　　July, 1990

一种求解非线性振动系统渐近解的新方法[1)]
——计算向量场 Normal Form 系数的简单方法

陈予恕　　张琪昌
（天津大学）

提要　利用非线性变换，本文推导出了一种只需通过简单代数运算即可算出 Hopf 分叉 Normal Form 系数的简单方法．用这种方法求解非线性振动问题，只需把原方程变换成本文讨论的典则形式的一阶微分方程组，然后进行简单的代数运算即可得到原非线性振动方程的解，这种方法简单方便容易掌握．

关键词　Hopf 分叉，Normal Form，非线性振动，自治系统

一、引　言

中心流形方法是研究分叉问题的主要方法之一，通过这种方法可以将一个高维方程简化为一个低维方程．但仍不能由此方程直接获知分叉解特性，必须通过一系列繁难的坐标变换将此方程简化为更简单的形式 Normal Form．它可给出分叉解的周期、幅值、稳定性等信息．在 J. Guckenheimer 和 P. Holmes 的著作[1]及其它一些学者的文章中[2,3]，从理论上给出了 Normal Form 的形式，但将一个真实系统变换为 Normal Form 的方法却不明确．本文给出一种简单实用的计算 Hopf 分叉 Normal Form 的新方法．用本文的结果，只需通过简单的代数运算，就可以计算出 Hopf 分叉的 Normal Form 及自治系统的定常解．该法较已有的方法简单，其精度与 K-B 平均法一次近似精度相同[5]．

二、Hopf 分叉的 Normal Form

现有方程组

$$Y' = f(Y) \tag{2.1}$$

其中：$f: R^2 \mapsto R^2$，$f \in C^\infty$，$f(0) = 0$

所有的与(2.1)等价的方程组中最简单的那一个称为(2.1)的 Normal Form．由那

1) 国家自然科学基金资助课题．
高等学校博士学科点专项科研基金资助课题．
本文于1988年10月19日收到第一稿，1989年7月12日收到修改稿．

个方程组可以很明显地得到(2.1)解的各种特性。为求(2.1)的 Normal Form 首先我们将它展为下述幂级数形式

$$Y' = AY + f_{k-1}(Y) + h_k(Y) + Q(Y) \qquad (2.2)$$

其中：$A = D_Y f(0)$

$f_{k-1}(Y)$ 为 $2 \sim k-1$ 阶齐次多项式

$h_k(Y)$ 为 k 阶齐次多项式

$Q(Y)$ 为大于 k 阶的多项式

假设 (2.2) 线性部分已化简成 Jordan 标准形，为简化其非线性部分，取这样一系列近似恒等的非线性变换

$$Y = X + P_k(X),\ P_k(X) \in H_2^k,\ k \geqslant 2 \qquad (2.3)$$

H_2^k 表示所有两个变量 k 阶齐次多项式的集合。

此种变换保持原方程在平衡点附近的拓扑性质不变。把上述变换代入到 (2.2) 并整理得

$$X' = AX + f_{k-1}(X) + [AP_k(X) - DP_k(X) \cdot AX + h_k(X)] + \bar{Q}(X) \qquad (2.4)$$

其中 $\bar{Q}(X)$ 即包含了原高于 k 阶的项，又包含了变换对高于 k 阶项"贡献"的部分。

定义线性算子 ad_A^k: $H_2^k \longmapsto H_2^k$

$$ad_A^k P_k(X) = DP_k(X) \cdot AX - AP_k(X)$$

假设 R^k 是 ad_A^k 的值域，W^k 是 R^k 在 H_2^k 上的正交补空间，即 $H_2^k = R^k \oplus W^k$。令 $h_k = r_k(X) + w_k(X)$，其中 $r_k \in R^k$、$w_k \in W^k$。如果选择 $P_k(X)$ 使得 $ad_A^k P_k(X) = r_k(X)$ 则(2.4)成为

$$X' = AX + f_{k-1}(X) + w_k(X) + h.o.t. \qquad (2.5)$$

特殊地，若 $h_k(X) = r_k(X)$，则(2.5)中 $w_k = 0$。

定理 2.1 假设对于 $k = 2, 3, \cdots, r$，有正交补空间 W^k。对 (2.2) 取一系列近似恒等的变换 $Y = X + P_k(X)$，$P_k(X) \in H_2^k$，$k = 2, 3, \cdots, r$，则 (2.2) 变成

$$X' = AX + w_2(X) + w_3(X) + \cdots + w_r(X) + h.o.t. \qquad (2.6)$$

其中 $w_k(X) \in W^k$，$k = 2, 3, \cdots, r$

显然(2.6)是(2.2)直到 r 阶齐次多项式的最简单形式。

由泛函知识可知当 ad_A^k 可逆时，存在 $P_k(X)$ 使得 $ad_A^k P_k(X) = h_k$ 则 (2.6) 中 $w_k(X) = 0$，下面对 ad_A^k 的可逆性进行讨论。

定理 2.2 [Poincare] 若存在 m 阶齐次单项式 $x^m = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}$，$m_i \geqslant 0$，$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \geqslant 2$，并存在 $s = \{s \in \mathrm{Z} | s > 0\}$，$A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$，使得 $\langle m, \lambda \rangle - \lambda_s = \sum_{i=1}^{n} m_i \lambda_i - \lambda_s = 0$，称为 Poincare 共振情况，$ad_A^k$ 是不可逆的。反之，$\langle m, \lambda \rangle - \lambda_s \neq 0$，称为非共振情况，$ad_A^k$ 是可逆的。因此，方程组(2.1)的 Normal Form 为其全体共振单项式的线性组合。

线性算子 ad_A^k 与 $A = D_Y f(0)$ 有关，对于不同类型的分叉，A 矩阵是不同的。因此，它的 Normal Form 也不相同。下面从理论上推导 Hopf 分叉的 Normal Form。

对于 Hopf 分叉系统，根据中心流形可将原 n 维系统化成二维系统

$$Y' = f(Y,\mu),\ Y\in R^2,\ \mu\in R \tag{2.7}$$

且 $f(o,\mu_0)=0$，$D_Y f(o,\mu_0)=\begin{bmatrix} o & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{bmatrix}$

复化(2.7)式 $R+Ri \Longleftrightarrow C$

令 $\begin{cases} z=y_1+iy_2 \\ \bar{z}=y_1-iy_2 \end{cases}$ 则由(2.7)得

$$\begin{pmatrix} z' \\ \bar{z}' \end{pmatrix} = A_0\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g(z,\bar{z},\mu) \\ \overline{g(z,\bar{z},\mu)} \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

其中：

$$g=o(|z|^2),\quad A_0=\begin{bmatrix} \omega_0 i & 0 \\ 0 & -\omega_0 i \end{bmatrix}$$

特征值 $\lambda_1=\omega_0 i$，$\lambda_2=-\omega_0 i$。根据 Poincare 共振条件 $\langle m,\lambda\rangle-\lambda_s=0$，知当 $m_1-m_2=1$，$m_1+m_2=m$ 时，即当 m 为奇数时满足共振条件；当 m 为偶数时不满足共振条件。因此 Normal Form 中只有奇数阶的项。(2.8) 的复 Normal Form 为：

$$z'=i\omega_0 z+c_3 z^2\bar{z}+c_5 z^3\bar{z}^2+h.o.t. \tag{2.9}$$

在直角坐标系下实数 Normal Form 为：

$$U'=AU+W(U)+h.o.t. \tag{2.10}$$

其中：

$$A=\begin{bmatrix} d\mu & -(c\mu+\omega_0) \\ c\mu+\omega_0 & d\mu \end{bmatrix};\ U=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix};\ W(U)=(u_1^2+u_2^2)\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}U$$

在极坐标系下为：

$$\left.\begin{aligned} r' &= (d\mu+ar^2)r+h.o.t. \\ \theta' &= \omega_0+c\mu+br^2+h.o.t. \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

分叉解的稳定性由 a 确定，$a<0$ 分叉解稳定，$a>0$ 分叉解不稳定。分叉解的周期由 ω_0、b、c、r 确定。分叉解的幅值由 a，d 确定。分叉解的方向由 d 确定。

系数 c、d 是由方程(2.8)的线性部分确定的。系数 a、b 是由方程 (2.8) 的二、三阶齐次多项式的系数确定的。

三、Hopf 分叉 Normal Form 系数与原方程系数的关系

设原 n 维系统经中心流形化简后的方程为：

$$X'=A(\mu)X+F^{(2)}(X)+F^{(3)}(X)+h.o.t. \tag{3.1}$$

其中：$X\in R^2$，$F^{(k)}(X)$ 表示实变量 X 的 k 阶齐次多项式，

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ A(\mu)=\begin{bmatrix} d\mu & -(c\mu+\omega_0) \\ c\mu+\omega_0 & d\mu \end{bmatrix},\ A_0=A(0)$$

$$F^{(k)}(X)=\begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{k} a_{ij}x_1^i x_2^j \\ \sum_{j=0}^{k} b_{ij}x_1^i x_2^j \end{pmatrix},\ k=2、3,\ i=k-j$$

我们称 (3.1) 为典则形式的一阶微分方程组．由上节的分析可知对于我们所研究的非退化系统，只要计算出 Normal Form 中 a、b，则就可知道分叉解的特性．在我们利用近于恒等的非线性变换消掉二阶齐次多项式时(根据 Normal Form 理论知可以消去)，这种变换对高阶项有“贡献”．因此，我们必须把这种变换解出来，然后继续再取一次变换才能计算出 a、b.

首先对(3.1)式取变换:

$$X = Y + P_2(Y),\quad P_2(Y) \in H_2^2$$

其中:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix};\quad P_2(Y) = \begin{pmatrix} c_{20}y_1^2 + c_{11}y_1y_2 + c_{02}y_2^2 \\ d_{20}y_1^2 + d_{11}y_1y_2 + d_{02}y_2^2 \end{pmatrix}$$

将上述变换代人到(3.1)并整理得:

$$\begin{aligned} Y' = AY &+ [F^{(2)}(Y) + A\cdot P_2(Y) - DP_2(Y)\cdot A\cdot Y] \\ &+ \{F^{(3)}(Y) + DF^{(2)}(Y)\cdot P_2(Y) + [DP_2(Y)]^2\cdot A\cdot Y \\ &- DP_2(Y)\cdot[AP_2(Y) + F^{(2)}(Y)]\} + h.o.t. \end{aligned} \tag{3.2}$$

上式中第一个中括号表示二阶齐次多项式，它应等于零．第一个大括号表示新的三阶齐次多项式，它包含了变换对三阶项“贡献”的部分．

1. 求 $P_2(Y)$ 系数与 $F^{(2)}(Y)$ 系数间的关系

令(3.2)中第一个中括号等于零

$$ad_A^2 P_2(Y) = F^{(2)}(Y) \tag{3.3}$$

为了简化上式在 H_2^k 上定义一组新的基，这组基为: $\{x^\alpha e_j = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}e_j \mid \alpha = \alpha_1 + \alpha_2\}$，它的顺序规定为反字典顺序．

定义 3.1 反字典排列法：设 $x^\alpha e_i$ 及 $x^\beta e_j$ 为 H_n^k 中的任两个单项式，e_i、e_j 为标准单位列向量．我们称 $x^\alpha e_i < x^\beta e_j$，如果 $i > j$ 或者 $i = j$ 而第一个不同分量 $\alpha_l > \beta_l$.

按照上述定义 $\{e'_s = x_1^i x_2^j e_m \mid i + j = k;\ m = 1,2;\ s = (3-m)(k+1) - i\}$ 是一组在 H_2^k 上反字典顺序排列的基，它的维数为 $2(k+1)$．在这组基下线性算子 ad_A^k 可用矩阵 $[L_A^k]_{2(k+1)\cdot(k+1)}$ 表示．L_A^k 的列向量 L_s^k 为:

$$L_s^k = ad_A^k e'_s = [-ie'_{s+1} + je'_{s-1} + (-1)^m e'_{m(k+1)-i}]\omega_0 \tag{3.4}$$

在 H_2^2 上，集合 $\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ x_1x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1x_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ 是一组反字典顺序排列的基，在这组基下根据(3.4)则(3.3)可写为下述矩阵形式

$$\omega_0 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{20} \\ d_{11} \\ d_{02} \\ c_{20} \\ c_{11} \\ c_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{20} \\ b_{11} \\ b_{02} \\ a_{20} \\ a_{11} \\ a_{02} \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

求解上式可得到 $P_2(Y)$ 系数与 $F^{(2)}(Y)$ 系数间关系的代数表达式，其解为

$$\begin{bmatrix} d_{20} \\ d_{11} \\ d_{02} \\ c_{20} \\ c_{11} \\ c_{02} \end{bmatrix} = \frac{1}{3\omega_0}\begin{bmatrix} a_{20} - b_{11} + 2a_{02} \\ 2b_{20} - a_{11} - 2b_{02} \\ 2a_{20} + b_{11} + a_{02} \\ -b_{20} - a_{11} - 2b_{02} \\ 2a_{20} + b_{11} - 2a_{02} \\ -2b_{20} + a_{11} - b_{02} \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

2. 求 Normal Form 系数与 $F^{(2)}(Y)$、$F^{(3)}(Y)$ 系数间的关系。

在(3.2)中令:

$$\begin{aligned} \bar{F}^{(3)}(Y) = F^{(3)}(Y) + DF^{(2)}(Y) \cdot P_2(Y) + [DP_2(Y)]^2 \cdot A \cdot Y \\ - DP_2(Y) \cdot [A \cdot P_2(Y) + F^{(2)}(Y)] \end{aligned} \tag{3.7}$$

其中:

$$\bar{F}^{(3)}(Y) = \begin{pmatrix} \bar{a}_{30}y_1^3 + \bar{a}_{21}y_1^2y_2 + \bar{a}_{12}y_1y_2^2 + \bar{a}_{03}y_2^3 \\ \bar{b}_{30}y_1^3 + \bar{b}_{21}y_1^2y_2 + \bar{b}_{12}y_1y_2^2 + \bar{b}_{03}y_2^3 \end{pmatrix}$$

将(3.7)代入到(3.2)得:

$$Y' = A \cdot Y + \bar{F}^{(3)}(Y) + h.o.t. \tag{3.8}$$

为化简三阶项引入变换

$$Y = U + P_3(U) \tag{3.9}$$

其中:

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}; \quad P_3(U) = \begin{pmatrix} c_{30}u_1^3 + c_{21}u_1^2u_2 + c_{12}u_1u_2^2 + c_{03}u_2^3 \\ d_{30}u_1^3 + d_{21}u_1^2u_2 + d_{12}u_1u_2^2 + d_{03}u_2^3 \end{pmatrix}$$

将(3.9)代入到(3.8)得

$$U' = AU + \bar{F}^{(3)}(U) - ad_A^{(3)}P_3(U) + h.o.t. \tag{3.10}$$

比较(3.10)与(2.10)得

$$ad_A^3 P_3(U) = \bar{F}^{(3)}(U) - W(U) \tag{3.11}$$

根据定义 3.1 (3.11)式可写为下述矩阵形式:

$$\omega_0 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{30} \\ d_{21} \\ d_{12} \\ d_{03} \\ c_{30} \\ c_{21} \\ c_{12} \\ c_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_{30} - b \\ \bar{b}_{21} - a \\ \bar{b}_{12} - b \\ \bar{b}_{03} - a \\ \bar{a}_{30} - a \\ \bar{a}_{21} + b \\ \bar{a}_{12} - a \\ \bar{a}_{03} + b \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

求解上式得:

$$\left.\begin{aligned} a = (\bar{b}_{21} + 3\bar{a}_{30} + 3\bar{b}_{03} + \bar{a}_{12})/8 \\ b = (-\bar{a}_{21} + 3\bar{b}_{30} - 3\bar{a}_{03} + \bar{b}_{12})/8 \end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

将 $F^{(2)}$、$F^{(3)}$ 及 P_2 的系数代入到 $\bar{F}^{(3)}$ 的系数中去，利用 REDUCE 语言推导(3.13)得:

$$\left.\begin{aligned} a &= (b_{21}\omega_0 + 3a_{30}\omega_0 + 3b_{03}\omega_0 + a_{12}\omega_0 - b_{02}b_{11} + 2a_{02}b_{02} \\ &\quad + a_{11}\cdot a_{02} + a_{11}\cdot a_{20} - b_{20}\cdot b_{11} - 2b_{20}a_{20})/(8\omega_0) \\ b &= (3b_{12}\omega_0 - 9a_{03}\omega_0 - 3a_{21}\omega_0 + 9b_{30}\omega_0 - 4b_{02}^2 + 5b_{02}a_{11} \\ &\quad - 10b_{02}b_{20} - a_{11}^2 + a_{11}b_{20} - 10b_{20}^2 - 10a_{02}^2 + a_{02}b_{11} \\ &\quad - 10a_{02}\cdot a_{20} - b_{11}^2 + 5b_{11}\cdot a_{20} - 4a_{20}^2)/(24\omega_0) \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

(3.14)建立了典则形式的一阶微分方程组(3.1)的系数与 Normal Form (2.11) 的系数间的代数关系。利用(3.14)可迅速计算出 Normal Form 的系数。此式还可用来计算非线性自治振动系统的渐近解析解。

四、算　例

求 Van Der Pol 方程的解

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - \alpha)\dot{x} + x = 0 \tag{4.1}$$

令 $\dot{x} = \mu x - y$。则当 $\mu = \dfrac{\alpha}{2}$ 并略去高于三阶的项时，(4.1)可写为典则形式的一阶微分方程组

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mu & -1\\ 1 & \mu\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ -\varepsilon x^2 y\end{bmatrix} \tag{4.2}$$

参照(3.1)式得：$c = 0$，$d = 1$，$b_{21} = -1$ 其它系数等于零，代入到(3.14)得：$a = -1/8$、$b = 0$。因为 $a < 0$，所以定常解是稳定的。将 a、b 代入到(2.11)得其渐近解：

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ \dot{r} = \left(\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{1}{8}r^2\right)r \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

定常解为 $\dot{r} = 0$ 即 $r^2 = 4\alpha$；当 $\alpha = 1$ 时 $r = 2$，周期为 $T = \dfrac{2\pi}{1} = 2\pi$。与文献[5]用 K-B 平均法算得结果完全相同，而其求解过程极为简单、方便。

五、结　论

用本文方法可迅速方便地计算 Hopf 分叉的 Normal Form 和非线性自治振动系统的解。这种方法比以往的任何一种非线性渐近方法都简单方便容易掌握。其求解步骤为：

1. 将原方程化为本文讨论的典则形式的一阶微分方程组 (3.1)。
2. 将其系数代入到(3.14)通过简单代数运算算出其 Normal Form 的系数 a、b。
3. 将 a、b 值代入到表达式(2.11)中，则得其 Normal Form (向量场标准形)。

因此，本文介绍的方法，原则上是只进行代数运算。

参　考　文　献

[1] Guckenheimer, J. & Holmes, P., Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields, Springer—Verlag, (1983).

[2] Chow, S. N. & Hale, J. K., Method of Bifurcation Theory, (1982).
[3] Hassard, B. D., Kazarinoff, N. D. and Wan, Y. H., Theory and Application of Hopf Bifurcation (1981).
[4] Henk Broer., Formal Normal Form Theorems for Vector Fields and Some Consequences for Bifurcation in the Volume Preserving Case, Dynamical System and Turbulence (1980).
[5] 陈予恕，非线性振动，天津科学技术出版社，(1983).
[6] Ronald E. Mickens, An Introduction to Nonlinear Oscillations (1983).

A NEW METHOD OF CALCULATING THE ASYMPTOTIC SOLUTION OF NONLINEAR VIBRATION SYSTEMS ——A SIMPLE METHOD OF CALCULATING THE COEFFICIENTS OF NORMAL FORM

Chen Yushu　Zhang Qichang
(*Tianjin University*)

Abstract Applying nonlinear transformation, the simple method for calculating the coefficients of Normal Form by simple algebra has been derived. This method can also be used to solve nonlinear vibration problems. The process are as follows: first, to transform the original equations to the standard first order differential equations discussed in this paper, then to find the solution of nonlinear vibration equation by simple algebra calculation. This method is easy to learn and to use.

Key words hopf bifurcation, normal form, nonlinear vibration, autonomous system