

变结构多刚体系统的动力学问题

王 奋 飞

(北京控制工程研究所)

提要 本文深入地研究了多刚体系统结构变化的动力学问题,建立了相应的数学模型,讨论了有关的数字仿真,并给出了一个算例,结果是满意的。对所论课题,本文工作同以往相比更准确完整,更便于计算机编程。

关键词 多体动力学,数字仿真

1. 引言

所谓变结构多刚体系统是指系统自由度在其运动过程中不断变化的多刚体系统,其动力学是实际工程中很重要的问题。如卫星太阳帆板的展开与锁定,空间多体飞行器的碰撞对等问题的姿态动力学,抽象出来的力学问题都是一个多刚体系统在运动过程中某些铰链或被解锁或被锁定,从而导致其运动状态发生突变,这样连续地运动下去,直到某个运动状态结束,这里“锁定”是广义的,包括铰链变量的单面约束情况。由于多刚体系统的变结构问题是针对铰链的解锁与锁定而言的,其特点是铰链旋转矢量为主导因素,故采用直接通路法建模。这样一则可以利用直接通路法和系统运动学关系的优点,直接推出系统动力学方程,而不再需要冗长的内力和内力矩的消去过程;二则可以使各铰链的约束力矩相互解耦,从而把结构的变化转化为系统动力学微分方程组系数阵的维数变化,更便于复杂程序的编制,作为完整描述一般多刚体系统变结构运动的数学模型,有标称、碰撞和误差扰动等运动方程,以及方程和程序的检验方程。文末给出了一个卫星太阳帆板展开问题的仿真算例。

2. 动力学方程

模型的建立要求全面地了解问题的对象,选择适当的方法和独立变量,准确地描述铰链特性及决定挠性的取舍,总的来说就是要充分接近实际结构并方便计算机编程和保证精度的要求。

直接通路法是用来研究描述所有可能的系统拓扑结构的复杂运动学关系的处理方法,它同增广体法的一个重要区别就是体坐标系原点前者放在铰链点上且广义变量取为分体间的相对角速度,而后者却是放在质心上,广义变量取的是各体的绝对角速度。

动力学公式的线性化可通过扰动法来进行,即认为整个运动是标称运动和受扰运动的迭加。当暂时忽略物体中的所有分布结构挠性,这样的系统动力学就是标称的。由于

本文于1988年5月7日收到第一次稿于1989年3月1日收到修改稿。

附加结构挠性, 整个系统就从它的标称位置和指向受扰而产生受扰运动, 一般受扰运动与标称运动相比是很小的, 它的二阶影响可以忽略。对初始误差也可用此法分析。

一般多刚体碰撞问题可分为内碰撞和外碰撞两种情况。前者是指一个多刚体系内部物体间的碰撞, 而后者是指一个以上多体系物体间的碰撞。一般认为在碰撞瞬间所有物体的位置和方位都保持不变, 只有碰撞力会引起速度和角速度的非连续改变。碰撞冲量的矩称为碰撞冲量偶。运动约束为完整约束。对锁定问题的碰撞而言, 不外乎两类情况: 对于一个多体系一是已知某一部分铰的相对角速度增量, 来求其它广义坐标的速度增量, 进而求得锁定铰的碰撞冲量偶; 二是已知某些物体上所受的碰撞冲量, 来求所有广义坐标的速度增量。

闭环多刚体系统可包含闭环非运动链和闭环运动链。一般可以切除一部分铰来形成树状的减缩系统。在所有切除铰中, 应包含尽可能多的没有运动约束的铰。这个减缩系统是可以树状系统的方程来描述的, 也就是说对于一个树状多刚体系统, 由于在一些铰上附加了约束力矩, 使得这些铰变量间不再独立, 只有找到一个消去附加约束力矩的规律, 便可得出相应的减缩系统的方程。根据直接通路法列写动量矩方程的特点, 对于一个具体对象是很容易找出这个规律的, 并且不难用计算机实现这个消去过程。

一个无限多刚体系统在合外力矩为零时, 满足角动量守恒规律。这样利用系统角动量守恒的首次积分就可以很方便地检验复杂多刚体程序的调试和运动微分方程计算的正确性。

(1) 标称运动方程

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\varepsilon'_o \cdot \varepsilon'_r}{\varepsilon_{\mu}^{\mu} \cdot \bar{G}^{\mu(T)} \cdot \bar{D}^{\mu} \times \varepsilon'_r} \left| \frac{-\varepsilon'_o \cdot \bar{D}^{\nu} \times \bar{G}^{\nu} \cdot \varepsilon'_1}{\varepsilon_{\mu}^{\mu} \cdot \bar{G}^{\mu(T)} \cdot \bar{I}^{\mu\nu} \cdot \bar{G}^{\nu} \cdot \varepsilon'_1} \right. \right] \left\{ \frac{R_{1r}}{\theta'_1} \right\} \\ & + \left[\begin{array}{c|c} 0 & -\varepsilon'_o \cdot (\bar{D}^{\nu} \times \overset{\circ}{\bar{G}}^{\nu} + \bar{D}^{\nu} \times \overset{\circ}{\bar{G}}^{\nu}) \cdot \varepsilon'_1 \\ \hline 0 & \varepsilon_{\mu}^{\mu} \cdot \bar{G}^{\mu(T)} \cdot (\bar{I}^{\mu\nu} \cdot \overset{\circ}{\bar{G}}^{\nu} + \overset{\circ}{J}^{\mu\nu} \cdot \bar{G}^{\nu}) \cdot \varepsilon'_1 + \frac{1}{M} \delta^{\mu\nu} \delta_{\mu\lambda} V_{1\lambda}^{\nu} \end{array} \right] \left\{ \frac{R_{1r}}{\theta'_1} \right\} \\ & + \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{M} \delta^{\mu\nu} \delta_{\mu\lambda} K_{1\lambda}^{\nu} \end{array} \right] \left\{ \frac{R_{1r}}{\theta'_1} \right\} - \left[\frac{\frac{1}{M} \varepsilon'_o \cdot \bar{F}^r}{\frac{1}{M} (K_{\mu}^{\mu} \Theta_{\mu}^{\mu} + \varepsilon_{\mu}^{\mu} \cdot T_{\mu}^{\mu})} \right] \end{aligned}$$

(2) 受扰运动方程

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\varepsilon'_o \cdot \varepsilon'_r}{\varepsilon_{\mu}^{\mu} \cdot \bar{G}^{\mu(T)} \cdot \bar{D}^{\mu} \times \varepsilon'_r} \left| \frac{-\varepsilon'_o \cdot \bar{D}^{\nu} \times \bar{G}^{\nu} \cdot \varepsilon'_1}{\varepsilon_{\mu}^{\mu} \cdot \bar{G}^{\mu(T)} \cdot \bar{I}^{\mu\nu} \cdot \bar{G}^{\nu} \cdot \varepsilon'_1} \right. \right] \left\{ \frac{\Delta R_{1r}}{\Delta \theta'_1} \right\} \\ & + \left[\begin{array}{c|c} 0 & -2\varepsilon'_o \cdot \{\bar{D}^{\nu} \times \overset{\circ}{\bar{G}}^{\nu} + \overset{\circ}{\bar{D}}^{\nu} \times \overset{\circ}{\bar{G}}^{\nu}\} \cdot \varepsilon'_1 \\ \hline 0 & 2\varepsilon_{\mu}^{\mu} \cdot \bar{G}^{\mu(T)} \cdot \{\bar{I}^{\mu\nu} \cdot \overset{\circ}{\bar{G}}^{\nu} + \overset{\circ}{J}^{\mu\nu} \cdot \bar{G}^{\nu}\} \cdot \varepsilon'_1 + \frac{1}{M} \delta^{\mu\nu} \delta_{\mu\lambda} V_{1\lambda}^{\nu} \end{array} \right] \left\{ \frac{\Delta R_{1r}}{\Delta \theta'_1} \right\} \end{aligned}$$

$$+ \left[\begin{array}{c|c} 0 & \varepsilon'_\sigma \cdot \{\bar{D}^\nu \times \bar{C}^\nu + 2\bar{D}^\nu \times \bar{C}^\nu + \bar{D}^\nu \times \bar{C}^\nu\} \cdot \varepsilon'_\lambda \\ \hline 0 & \varepsilon''_\mu \cdot \bar{C}^{\mu(T)} \cdot \{\bar{I}^{\mu\nu} \cdot \bar{C}^\nu + 2\bar{J}^{\mu\nu} \cdot \bar{C}^\nu + \bar{S}^{\mu\nu} \cdot \bar{C}^\nu\} \cdot \varepsilon'_\lambda + \frac{1}{M} \delta^{\mu\nu} \delta_{\mu\lambda} K_{12}^{\nu\sigma} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \Delta R_{1\nu} \\ \Delta \theta'_\lambda \end{array} \right\} \\ - \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{M} \varepsilon'_\sigma \cdot \Delta \bar{F}^\sigma \\ \frac{1}{M} \varepsilon''_\mu \cdot \Delta T_{\mu\sigma} \end{array} \right\}$$

(3) 碰撞运动方程

$$\left[\begin{array}{c|c} \varepsilon'_\sigma \cdot \varepsilon'_\tau & -\varepsilon'_\sigma \cdot \bar{D}^\nu \times \bar{C}^\nu \cdot \varepsilon'_\lambda \\ \hline \varepsilon''_\mu \cdot \bar{C}^{\mu(T)} \cdot \bar{D}^\nu \times \varepsilon'_\tau & \varepsilon''_\mu \cdot \bar{C}^{\mu(T)} \cdot \bar{I}^{\mu\nu} \cdot \bar{C}^\nu \cdot \varepsilon'_\lambda \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \Delta R_{1\nu} \\ \Delta \theta'_\lambda \end{array} \right\} \\ - \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{M} \varepsilon''_\mu \delta^{\mu i} T^i \end{array} \right\}$$

其中 $(\sigma = 1, 2, 3, \mu = 1, 2, \dots, N; \nu = 1, 2, 3; \tau = 1, 2, 3, \lambda = 1, 2, \dots, N; \lambda = 1, 2, 3)$

(4) 检验方程

$$H_0 = \sum_{j=1}^N \bar{K}^j \cdot \omega^j$$

(5) 上面方程各矢量张量的定义

$$\begin{aligned} \bar{D}_\sigma &= \sum_{i=\nu}^{\mu} \varepsilon^{\sigma i \mu_j} \bar{C}^{\nu i} \\ \bar{D}^\nu &= \sum_{i=\nu}^N \varepsilon^{\nu i \mu_j} \bar{C}^{\nu i} \\ \bar{I}^i &= \frac{1}{m_i} \int [(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i) \bar{\delta} - \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i] dm_i \\ \bar{J}^i &= -\omega^j \times \int \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i dm_i \\ \bar{S}^j &= -[\omega^j \cdot \bar{I}^i \cdot \omega^i] \bar{\delta} - \bar{I}^j \cdot \frac{1}{m_i} \int \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i dm_i \\ \bar{I}^{\mu\nu} &= \sum_{j=\max(\mu,\nu)}^N \varepsilon^{\mu i \nu j} \mu_j [\bar{I}^i + \mathbf{d}_j \times (\mathbf{d}_j \times -\mathbf{C}^{\mu i} \times (\mathbf{C}^{\nu j} \times)] \\ \bar{J}^{\mu\nu} &= \sum_{j=\max(\mu,\nu)}^N \varepsilon^{\mu i \nu j} \mu_j [\bar{J}^j \cdot + \mathbf{d}_j \times (\mathbf{d}_j \times -\mathbf{C}^{\mu i} \times (\bar{\mathbf{C}}^{\nu j} \times)] \\ \bar{S}^{\mu\nu} &= \sum_{j=\max(\mu,\nu)}^N \varepsilon^{\mu i \nu j} \mu_j [\bar{S}^j \cdot + \mathbf{d}_j \times (\mathbf{d}_j \times -\bar{\mathbf{C}}^{\mu i} \times (\bar{\mathbf{C}}^{\nu j} \times)] \\ \bar{E}^{ij} &= -M \sum_{\nu=\max(i,j)}^N \varepsilon^{i\nu} \varepsilon^{j\nu} \mu_\nu \mathbf{l}^{i\nu} \times (\mathbf{l}^{j\nu} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^j &= \sum_{\nu=1}^N \varepsilon^{i\nu\mu} \mathbf{l}^{i\nu} \\ \bar{\mathbf{F}}^{ij} &= -M \mathbf{g}^i \times (\mathbf{g}^j \times \\ \bar{\mathbf{B}}^j &= \sum_{i=1}^N (\bar{\mathbf{E}}^{ij} - \bar{\mathbf{F}}^{ij}) \\ \bar{\mathbf{K}}^j &= \bar{\mathbf{B}}^j + \bar{\mathbf{I}}_j \end{aligned}$$

3. 计算机仿真

1) 通用程序的设计

在多刚体的数值计算中,由于大量的非线性三角函数和矢量、张量上下标的引入,大大增加了求解的困难,但对于结构上下标的任何简化都会降低程序的通用性。对于变结构多刚体动力学问题,要提高程序效率,须注意:

- (1) 要选择一个变步长的积分算法;
- (2) 先计算所有单体特性再计算系统整体特性;
- (3) 对于自由度的缩减,尽可能用更简单形式的方程以避免约束力矩的同时计算;
- (4) 注意减少乘零或加零等虚运算。

我们的目的是能够在一次运行中自动地完成标称、冲击、扰动等全部计算等,并建立相应的数据文件。应以采用动态分配数组方式为主,少量地采用定长数值的数组,将程序尽量模块化。总的仿真办法是:

i) 对标称运动由标称运动方程来进行计算,需要注意初始位置的单面约束,终值位置的碰撞锁定以及铰角约束(闭环)等问题的处理,碰撞使标称运动的积分值有非连续的改变;

ii) 各时刻的碰撞所引起的各广义坐标的速度增量以及碰撞铰链的内冲量偶可由碰撞方程算出;

iii) 碰撞引起的积分初值改变的误差对系统运动的影响由扰动方程算出,不同时刻的碰撞速度增量误差看成扰动方程的初值改变,注意积分是围绕标称轨迹来计算的;

iv) 综合整个运动过程,可利用迭加定理将碰撞扰动和标称运动在对应的时刻上迭加起来;

v) 用检验方程验证程序的正确性。

作者依据本文的模型和方法开发了一个卫星太阳帆板展开姿态动力学研究的通用分析软件,应用是成功的。

2) 仿真

如图 1 所示的某卫星算例,在实际的帆板设计中都有一绳索闭环联动机构保证各展开角一致,这种约束展开的帆板各展开角不是独立的,始终有关系 $2\theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \theta_5$ 。

下面分别给出自由和约束两种展开方式的仿真结果(见表 1)和曲线(见图 3—图 8),自由展开过程见图 2。

根据仿真结果,我们认为自由展开方式虽然结构简单,但闭锁负荷和姿态误差都远大于约束展开方式,故在实际工程中不宜采用。从中我们也可以了解变结构多刚体动力学问题的特殊性和复杂性,本文的模型和解决方法是正确而且成功的。

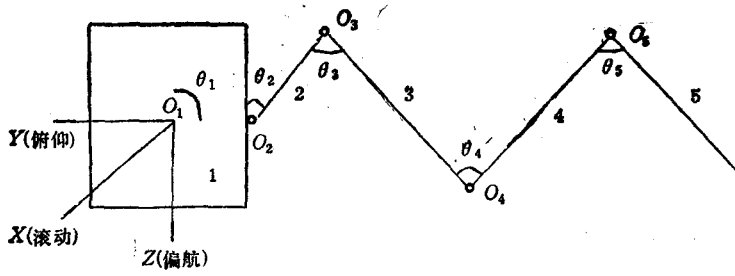


图 1 卫星的计算结构简图

表 1 算例帆板展开动力学的部分仿真结果

| 展开方式 | 碰 撞 锁 定 | | | 姿 态 误 差 (最 大 值) | | | | | |
|--------------|------------|---------|--------------------------------------|-----------------|---------------|---------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| | 时 间 (秒) | 铰 链 标 号 | 碰 撞 冲 量 偶 ($N \cdot m \cdot S$) | θ_{1x} | θ_{1y} | θ_{1z} | $\dot{\theta}_{1x}$ | $\dot{\theta}_{1y}$ | $\dot{\theta}_{1z}$ |
| | | | | (度) | | | (度/秒) | | |
| 自 由 (树 状) | 4.75 | 2 | 4.39 | | | | | | |
| | 8.09 | 5 | -4.23 | 21.82 | 0 | 0 | 5.09 | 0 | 0 |
| | 11.98 | 4 | 11.34 | | | | | | |
| | 24.73 | 3 | -20.74 | | | | | | |
| 约 束 (闭 链) | 13.05 | 2 | -1.49 | | | | | | |
| | | 3 | -2.24 | 1.133 | 0.009 | 1.123 | 0.124 | 0.009 | 0.117 |
| | | 4 | 0.72 | | | | | | |
| | | 5 | -3.50 | | | | | | |

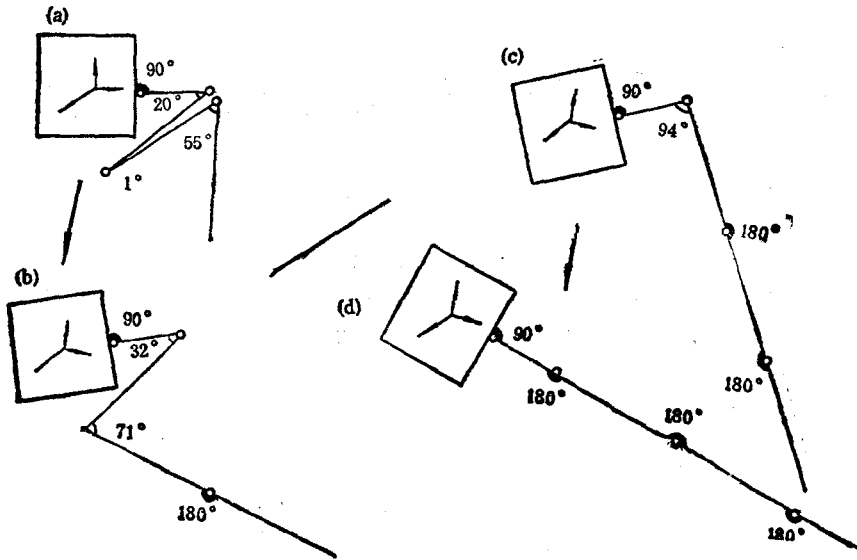


图 2 卫星太阳帆板自由展开过程

- (a) 第一次锁定时间 $t = 4.75$ (秒)
- (b) 第二次锁定时间 $t = 8.09$ (秒)
- (c) 第三次锁定时间 $t = 11.98$ (秒)
- (d) 第四次锁定时间 $t = 24.73$ (秒)

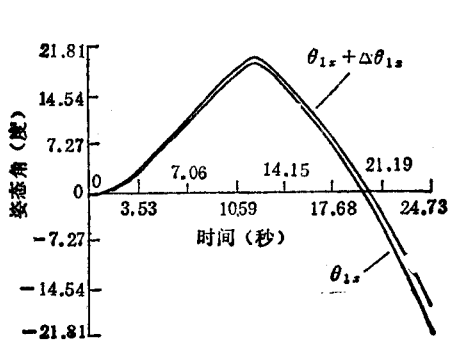


图 3 自由展开卫星姿态角曲线

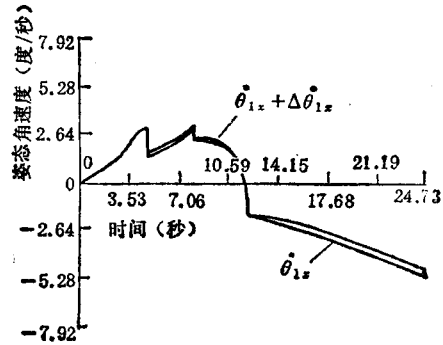


图 4 自由展开卫星姿态角速度曲线

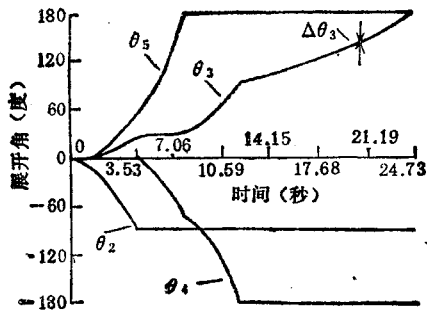


图 5 自由展开卫星帆板展开角曲线

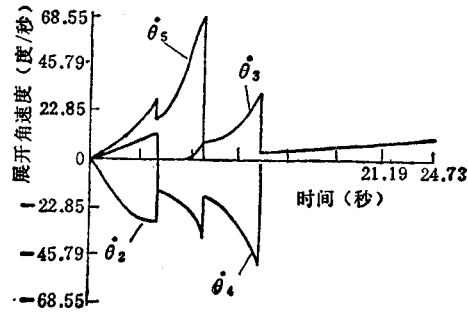


图 6 自由展开卫星帆板展开角速度曲线

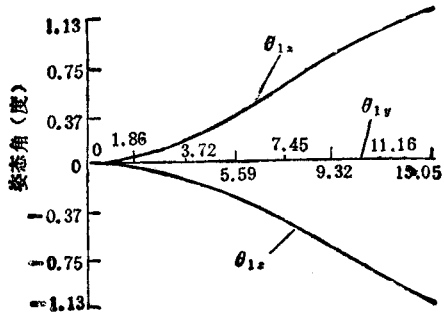


图 7 约束展开卫星姿态角曲线

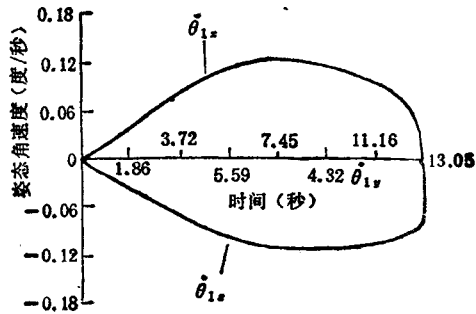


图 8 约束展开卫星姿态角速度曲线

4. 结束语

变结构多刚体动力学是重要的研究课题。本文给出的模型对一般的多刚体系统都是适用的，应用算例的仿真结果是令人满意的。多刚体系统间碰撞对接的姿态动力学问题也可以根据本文的模型而获得解决。

参 考 文 献

[1] 王奋飞, 卫星太阳帆板展开姿态动力学研究及其通用软件设计, 北京控制工程研究所硕士论文(1988.1)

ON THE DYNAMICS OF VARYING STRUCTURE SYSTEM OF RIGID BODIES

Wang Fenfei

(Beijing Institute of Control Engineering)

Abstract This paper has made a detailed study on the dynamics of varying structure system of rigid bodies, offered their mathematical models which are named as nominal, impact, perturbed and verifying equations, discussed the simulation and given an applied example with satisfactory results. Modeling is based on Direct Path Method. The models and methods of this paper are more accurate, more complete and easier to program than most former ones on this topic.

Key words multibody dynamics, simulation