

牛顿迭代一致性算法及其在板弹塑性有限元分析中的应用¹⁾

魏祖健 李明瑞 黄文彬

(北京农业工程大学)

摘要 本文简略讨论了有限载荷增量弹塑性有限元分析中传统切线刚度法丧失精度和牛顿迭代平方收敛速度的原因,并提出保持牛顿迭代平方收敛速度、保证一阶精度和无条件稳定性的一致性算法。一致性算法具备以下两个特征: 1)采用路径无关计算格式; 2)采用一致弹塑性切线模量。根据一致性算法构造出以弯矩和曲率为基本变量的弹塑性板弯曲有限元 NIDKQ 元。数值结果表明 NIDKQ 元具有令人满意的精度,同时验证了有限载荷增量下牛顿迭代一致性算法的平方收敛率特性,而传统切线刚度法随着塑性区的扩展将大大降低收敛速度。

关键词 牛顿迭代,一致性算法,弹塑性,板弯曲有限元

一、引言

牛顿迭代法是目前弹塑性有限元分析所采用的基本方法^[1,2]。理论分析证明^[3],当初值位于精确解的某一邻域内时,完全牛顿迭代法具有平方收敛速度。遗憾的是,由于传统的切线刚度法在有限载荷增量下的条件稳定性以及计算误差的积累,实施中不仅完全丧失了平方收敛速度使计算时间大大增加,而且结果是否可靠也值得怀疑。

近年来以弹性预测-塑性纠正为基本特征的弹塑性有限元求解方法取得重大进展^[4-6],已成功地应用于各种三维和平面问题的弹塑性分析。本文以板弯曲分析为例简单讨论传统切线刚度法在有限载荷增量下丧失精度和牛顿迭代平方收敛速度的原因,并在总结弹性预测-塑性纠正方法的基础上提出一致性算法的思想。与传统切线刚度法相比,一致性算法在有限载荷增量下具有保持牛顿迭代平方收敛速度,保证一阶精度和无条件稳定性的优点。一致性算法在执行中采用与路径无关的变量更新格式和与加载步内速率型本构方程积分算法相一致的弹塑性切线模量。本文根据一致性算法构造出以弯矩和曲率为基本变量的弹塑性板弯曲有限元 NIDKQ 元,并以数值例子验证了采用广义变量的 NIDKQ 元具有足够的精度。数值结果还表明,在有限载荷增量下一致性算法保持了明显的平方级迭代收敛速度,而传统切线刚度法在塑性区发展较快的加载步内将丧失平方收敛速度。

1) 国家自然科学基金资助项目。

本文于 1988 年 8 月 22 日收到第一稿, 1990 年 1 月 13 日收到修改稿。

二、弹塑性板有限元问题的求解

1. 增量牛顿迭代法

假设直至第 n 次加载后的全部结构变量都已经准确地求出, 第 $n+1$ 次加载后的牛顿迭代求解过程可分为三部分内容, 主要包括:

(1) 变量更新: 根据已知的(近似的)第 i 次迭代后的位移增量 Δu^i 求得新的结构变量: 位移 $u_{n+1}^i = u_{n+1}^{i-1} + \Delta u^i$, 弯矩 M_{n+1}^i 和等效塑性曲率 \bar{k}_{n+1}^i . 其中弯矩和等效塑性曲率的计算还依赖于加载历史;

(2) 方程线性化: 依据状态变量 M_{n+1}^i 和 \bar{k}_{n+1}^i , 求出板弯曲弹塑性切线模量(本构矩阵) $D_{\epsilon p n+1}^i$, 形成单元刚度矩阵并组集成总体刚度矩阵

$$K_{n+1}^i = \sum \int_{V_e} B^T D_{\epsilon p n+1}^i B dV;$$

求出结构不平衡力矢量 $R(u_{n+1}^i) = \sum \int_{V_e} B^T M_{n+1}^i dV - Q_{n+1}$. 其中 Q_{n+1} 为外载矢量.

(3) 方程求解: 解方程组求出第 $i+1$ 次迭代后的新的位移增量

$$\Delta u^{i+1} = -[K_{n+1}^i]^{-1} R(u_{n+1}^i).$$

上述第3步是在整体上求解离散的线性代数方程组, 本文不拟讨论. 而第1步和第2步分别涉及对速率型本构关系的积分和弹塑性切线模量的计算, 是迭代求解的核心问题, 也是本文主要讨论的内容.

2. 基本方程和基本问题

本文限于讨论小位移薄板弯曲情况, 以弯矩和曲率为基本变量, 采用广义 Mises 屈服准则和广义 Prandtl-Reuss 相关联的塑性流动准则, 可以避免沿板厚离散. 假设材料为理想弹塑性体, 但全部分析推广到强化材料没有本质困难.

记弯矩矢量和曲率矢量分别为:

$$M = [M_{11} M_{22} M_{12}]^T$$

$$k = [k_{11} k_{22} 2k_{12}]^T$$

定义等效弯矩和等效塑性曲率变化率分别为:

$$\bar{M} = (M_{11}^2 + M_{22}^2 - M_{11}M_{22} + 3M_{12}^2)^{1/2}$$

$$\bar{k}^p = \frac{2}{\sqrt{3}} (k_{11}^p + k_{22}^p + k_{11}^p k_{22}^p + k_{12}^p)^{1/2}$$

式中 $k_{ij}^p (i, j = 1, 2)$ 为塑性曲率分量关于时间(载荷)的变化率. 根据广义 Mises 屈服准则, 可以写出屈服函数:

$$\phi = \bar{M}^2 - e^2(\bar{k}^p) \leq 0$$

其中函数 $e(\bar{k}^p)$ 是等效塑性曲率 \bar{k}^p 的单值连续函数, 反映板从表面屈服逐渐向中面屈服扩展过程中等效弯矩不断增大的强化效应. 函数 $e(\bar{k}^p)$ 的准确表达式不易写出, 本文采用近似关系^[9]:

$$e(\bar{k}^p) = \frac{t^2}{4} \sigma_s \left[1 - \frac{1}{3} \exp\left(-\frac{8}{3} \cdot \frac{k^p}{k_0}\right) \right] \quad (1)$$

式中 $k_0 = \frac{2\sigma_s}{Et}$, E 为弹性模量, t 为板厚, σ_s 为屈服应力.

引入对称矩阵 P 和弹性矩阵 D :

$$P = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}; \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

式中 ν 为泊松比. 可以写出板弯曲弹塑性基本方程:

$$k = k^e + k^p \quad (2.1)$$

$$M = Dk^e \quad (2.2)$$

$$\dot{k}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial M} = \dot{\lambda} P M \quad (2.3)$$

$$\dot{k}^p = \dot{\lambda} \left(\frac{2}{3} M^T P M \right)^{1/2} \quad (2.4)$$

$$\phi = \bar{M}^2 - e^2 (\bar{k}^p) = \frac{3}{2} M^T P M - e^2 (\bar{k}^p) \leq 0 \quad (2.5)$$

式中 $\dot{\lambda}$ 为塑性拉格朗日乘子. 加卸载准则为:

$$\phi \leq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\lambda} \phi = 0$$

对于载荷增量法, 假定第 n 次加载后在载荷 Q_n 作用下结构变量都已准确地求出, 即已知 k_n , k_n^e , k_n^p , M_n , 则基本问题可叙述为, 在载荷 $Q_{n+1} = Q_n + \Delta Q$ 作用下求解满足基本方程(2)的更新变量: k_{n+1} , k_{n+1}^e , k_{n+1}^p , M_{n+1} .

3. 传统切线刚度法

传统切线刚度法是 60—70 年代发展起来的, 为目前各种弹塑性有限元分析程序广泛采用. 它主要采用了与路径有关的增量型变量更新方式和连续弹塑性切线模量.

(1) 连续弹塑性切线模量

对连续型基本方程(2)微分得到连续弹塑性切线模量^[10]. 设某点处于塑性加载状态, 引入塑性相容性条件 $d\phi = 0$, 对式(2.5)微分:

$$d\phi = 3M^T P dM - 2e e' d\bar{k}^p = 0 \quad (2.6)$$

式中 $e' = de/d\bar{k}^p$. 对式(2.2)微分:

$$dM = D(dk - dk^p) = D(dk - d\lambda P M) \quad (2.7)$$

将式(2.4)和式(2.7)代入式(2.6)并从中解出 $d\lambda$:

$$d\lambda = \frac{M^T P D dk}{M^T P D P M + \frac{2}{3} e' M^T P M} \quad (2.8)$$

将式(2.8)代入式(2.7)得到:

$$dM = \left[D - \frac{D P M M^T P D}{M^T P D P M + \frac{2}{3} e' M^T P M} \right] dk = D_T dk \quad (3)$$

式中 D_T 即为连续弹塑性切线模量.

(2) 增量形式的弯矩更新

传统切线刚度法采用在原有弯矩水平上叠加新的弯矩增量的方式求得更新弯矩:

$$M_{n+1}^i = M_{n+1}^{i-1} + \Delta M = M_{n+1}^{i-1} + \int_{\Delta k_D} D_T dk$$

式中 Δk_D 为迭代步的曲率增量,稍后将详细讨论。由于弯矩增量 ΔM 的精确积分式难以求得,通常以增量方式近似计算:

$$\Delta M = D_T \Delta k_D \quad (4)$$

式(4)形式的广义应力更新方式是条件稳定的,对于理想弹塑性材料,保证稳定性的条件是广义应变增量不超过屈服应变的 2 倍^[11]。在有限载荷增量下为了保证稳定性和提高计算精度,往往采用子增量法:

$$\Delta M = \sum \left(D_T \frac{\Delta k_D}{m} \right) \quad (5)$$

式中 m 为子增量个数。由于式(4)和式(5)中的切线模量 D_T 都是根据增量(子增量)开始时的弯矩和等效塑性曲率确定的,一般弯矩增量估计都偏大,使更新弯矩状态落在当前加载面之外,即有 $\phi > 0$, 此时还需进一步作弯矩返回加载面修正。在各种修正方案中,弯矩沿塑性流动方向返回加载面是精度最好的方案之一^[12]:

$$M_{n+1}^i = M' - \frac{\phi P M'}{M'^T P M'} \quad (6)$$

式中 M' 和 ϕ 分别为修正前的弯矩和屈服函数值。

(3) 路径有关格式

对曲率增量可以提出两种不同的定义方式:

$$\Delta k_D = k_{n+1}^i - k_{n+1}^{i-1} \quad (7)$$

$$\Delta k_I = k_{n+1}^i - k_n \quad (8)$$

分别称为路径有关和路径无关曲率增量。与之相应,变量更新也分为路径有关和路径无关两种格式。式(4)和式(5)所示的弯矩更新方式只能是路径有关格式的。从图 1 所示一维情况

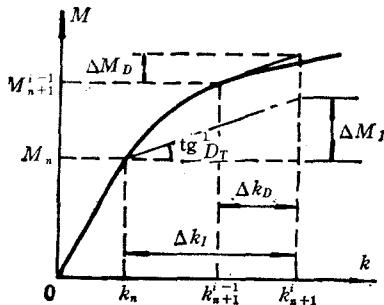


图 1 弯矩增量更新方式比较

的特例可以看出,根据第 $i-1$ 次迭代得到的弯矩 M_{n+1}^{i-1} 计算的连续弹塑性切线模量 D_T 代表弯矩-曲率曲线的切线斜率,第 i 次迭代后由路径有关格式和路径无关格式计算得到的更新弯矩分别为 $M_{n+1}^{i-1} + \Delta M_D$ 和 $M_n + \Delta M_I$,显然当步长较大时路径无关格式可能引入很大误差。如果采用子增量法并按路径无关格式计算,则通常由于增量过大,为保证稳定性需设置大量子增量步,而且结果仍难免出现显著漂移。

路径有关变量更新格式使迭代未收敛值引入的误差积累继承下去,导致计算精度下降。

传统切线刚度法在有限载荷增量下难以求得精确满足基本方程的更新变量,因此弹塑性切线模量的计算也难以保证精度,这事实上破坏了牛顿迭代格式的精度匹配,使收敛

速度大大降低。

三、一致性算法

本文把增量弹塑性有限元分析中在有限载荷增量下保持牛顿迭代平方收敛速度并具有一阶精度和无条件稳定性的算法称为牛顿迭代一致性算法。在实施 2.1 节牛顿迭代法时,一致性算法采用了与传统切线刚度法完全不同的变量更新方式和弹塑性切线模量,从而导致计算方法上的革新。

1. 基本方程的积分替代方程

在载荷增量段 $[Q_n, Q_{n+1}]$ 上对基本方程中的 2 个速率型方程(2.3)和(2.4)式积分,根据广义中点法则^[6,7]有:

$$k_{n+1}^p = k_n^p + \lambda P M_{n+\alpha} \quad (9)$$

$$\bar{k}_{n+1}^p = \bar{k}_n^p + \lambda \left(\frac{2}{3} M_{n+\alpha}^T P M_{n+\alpha} \right)^{1/2} \quad (10)$$

式中 λ 为载荷增量段上的塑性拉格朗日乘子,而

$$M_{n+\alpha} = (1 - \alpha)M_n + \alpha M_{n+1} \quad \alpha \in [0, 1]$$

文献[6]证明,近似积分式(9)和(10)当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时可保证二阶精度,当 $\alpha \approx \frac{1}{2}$ 时可保证一阶精度。并且对于 Mises 屈服准则,当 $\alpha \geq \frac{1}{2}$ 时导出的变量更新递推公式是无条件稳定的。在式(9)和(10)中取 $\alpha = 1$ 并代替原来的 2 个速率型方程,得到如下增量段内的非线性代数方程组:

$$\begin{aligned} k_{n+1} &= k_{n+1}^c + k_{n+1}^p \\ M_{n+1} &= D k_{n+1}^c \\ k_{n+1}^p &= k_n^p + \lambda P M_{n+1} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\bar{k}_{n+1}^p = \bar{k}_n^p + \lambda \left(\frac{2}{3} M_{n+1}^T P M_{n+1} \right)^{1/2}$$

$$\phi_{n+1} = \frac{3}{2} M_{n+1}^T P M_{n+1} - e^2 (\bar{k}_{n+1}^p) \leq 0$$

式(11)描述的是增量型的变量关系,一般而言这种变量关系并不完全等同于原来的基本方程(2),用式(11)代替式(2)可以保证一阶精度。为清晰起见,称式(11)为式(2)的替代方程。下面的任务是解出载荷 Q_{n+1} 作用下满足替代方程(11)的所有基本变量,而不再考虑原先的基本方程(2)。

2. 路径无关的变量更新递推公式

将式(11.3)代入式(11.1)再代入式(11.2)有:

$$M_{n+1} = \Theta(\lambda)(k_{n+1} - k_n^p)$$

式中 $\Theta(\lambda) = [D^{-1} + \lambda P]^{-1}$ 。于是对于载荷增量段上的曲率增量 Δk_l (见式(8)),可导出如下变量更新递推公式:

$$k_{n+1} = k_n + \Delta k_l$$

$$M_{n+1} = \Theta(\lambda)(k_{n+1} - k_n^p)$$

$$\bar{k}_{n+1}^p = k_n^p + \lambda P M_{n+1} \quad (12)$$

$$\bar{k}_{n+1}^p = k_n^p + \lambda \left(\frac{2}{3} M_{n+1}^T P M_{n+1} \right)^{1/2}$$

式(12)中的参数 λ 可以根据载荷为 Q_{n+1} 时的塑性相容性条件来确定:

$$\phi_{n+1}(\lambda) = \frac{3}{2} M_{n+1}^T P M_{n+1} - e^2(\bar{k}_{n+1}^p) = 0 \quad (13)$$

式(13)是 λ 的标量方程, 很容易用局部迭代法求解. 显然根据式(12)得到的全部更新变量将在事先指定的求解 λ 的控制精度范围内精确地满足替代方程(11).

在递推公式(12)中, 变量 $(\cdot)_n$ 代表载荷 Q_n 作用下的收敛值, 而变量 $(\cdot)_{n+1}$ 应理解为载荷 Q_{n+1} 作用下的第 i 次迭代值, 即 $(\cdot)_{n+1}^i$. 由于被更新变量与前次迭代的未收敛值 $(\cdot)_{n+1}^{i-1}$ 没有直接关系, 仅仅依赖于收敛值 $(\cdot)_n$, 所以递推公式(12)是路径无关格式的, 迭代过程中未收敛值引起的误差不会被累积继承下去, 可以保证最后的迭代收敛结果完全满足替代方程(11).

3. 一致弹塑性切线模量

为了得到与积分算法(广义中点法则)相一致的弹塑性切线模量, 将替代方程(11)微分:

$$dk = dk^e + dk^p \quad (14.1)$$

$$dM = Ddk^e \quad (14.2)$$

$$dk^p = d\lambda P M + \lambda P dM \quad (14.3)$$

$$d\bar{k}^p = d\lambda \left(\frac{2}{3} M^T P M \right)^{1/2} + \lambda \left(\frac{2}{3} M^T P M \right)^{-1/2} M^T P dM \quad (14.4)$$

$$d\phi = 3M^T P dM - 2e e' d\bar{k}^p = 0 \quad (14.5)$$

其中省去足标 $n+1$. 将式(14.3)代入式(14.1)再代入式(14.2):

$$dM = \Theta(dk - d\lambda P M) \quad (d)$$

将式(14.4)和式(d)先后代入式(14.5):

$$\begin{aligned} 0 = d\phi &= 3 \left(1 - \frac{2}{3} \lambda e' \right) M^T P dM - 2e' M^T P M d\lambda \\ &= 3\gamma M^T P \Theta dk - (3\gamma M^T P \Theta P M + 2e' M^T P M) d\lambda \end{aligned} \quad (e)$$

式中 $\gamma = 1 - \frac{2}{3} \lambda e'$. 从式(e)中解出 $d\lambda$ 并代入式(d):

$$dM = \left[\Theta - \frac{\Theta P M M^T P \Theta}{M^T P \Theta P M + \frac{2}{3} \left(\frac{e'}{\gamma} \right) M^T P M} \right] dk = D_c dk \quad (15)$$

其中 D_c 即为一致弹塑性切线模量. 显然当载荷增量 $\Delta Q \rightarrow 0$ 时, 有 $\lambda \rightarrow 0$, $\gamma \rightarrow 1$, 从而 Θ 退化为 D , D_c 退化为 D_T , 即一致弹塑性切线模量退化为连续弹塑性切线模量.

4. 一致性算法讨论

一致性算法从载荷增量段上的速率型基本方程近似积分开始, 采用弹性预测-塑性纠正的方式完成基本问题的求解. 将式(12.2)两侧左乘 $D\Theta^{-1} = [I + \lambda DP]$ 有:

$$M_{n+1} = [I + \lambda DP]^{-1} M^E = M^E - \lambda DPM_{n+1}$$

式中 $M^E = D(k_{n+1} - k_n^e)$ 可视为纯弹性预测弯矩。根据相容方程 $\phi_{n+1}(\lambda) = 0$ 求解 λ 的过程相当于更新弯矩从预测状态返回到加载面上的塑性纠正过程, 其中的塑性纠正量为 λDPM_{n+1} 。

在有限载荷增量下, 一致性算法具有以下特征:

(1) 保证一阶精度: 替代方程(11)是基本方程(2)在保证一阶精度的条件下积分得到的。路径无关格式可在事先指定的容许误差内求出精确满足替代方程的更新变量, 因此最终的迭代收敛结果是基本方程的保证一阶精度的解。

(2) 无条件稳定性: 广义中点法则积分式(9)和式(10)中取 $\alpha = 1$, 保证了变量更新的无条件稳定性, 因而保证了最终结果的可靠性。需要指出, 若取 $\alpha = \frac{1}{2}$, 将导致复杂的处理, 并且对于具有尖角的屈服面, 计算的稳定性难以保证。

(3) 保持牛顿迭代平方收敛速度: 每次迭代后对应于近似位移(广义应变)可以得到精确满足替代方程的更新变量以及与替代方程相一致的弹塑性切线模量, 这就保证了牛顿迭代格式的精度, 从而可以保持牛顿迭代法固有的平方收敛速度。

四、数值结果

本文构造了以弯矩和曲率为基本变量, 采用一致性算法的弹塑性板单元 NIDKQ 元,

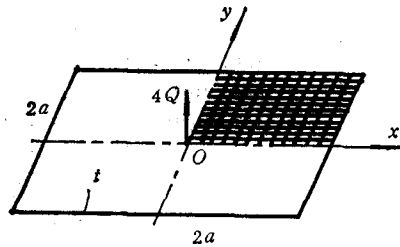


图2 正方形4边固支板

$$E = 10^7 \quad \nu = 0.3 \quad \sigma_y = 178.22 \quad a = 100 \quad t = 6$$

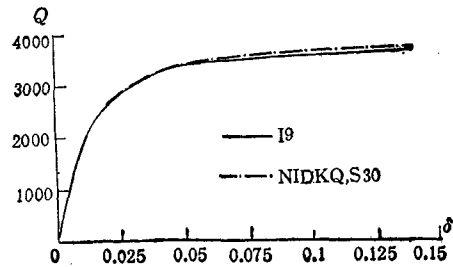


图3 方板中点位移比较

其位移插值列式基于改进的离散 Kirchhoff 假定^[13]。选用另外三种单元与 NIDKQ 元比较, 其中 I9 元是直接以应力和应变为基本变量, 沿板厚 9 点高斯积分的一致性算法单元; s1 元和 s30 元分别是不采用子增量和采用 30 步子增量, 以弯矩和曲率为基本变量的传统切线刚度法单元, 并且都按式(6)作弯矩返回加载面的修正。各种单元均装入微机通用有限元分析软件 FEM^[14]。全部计算是在 APOLLO-DN3000 计算机上完成的。

1. 算例: 4 边固支方板如图 2 所示, 中点 0 受到集中力 $4Q$ 的作用。取 $1/4$ 板作 12×12 均匀剖分。材料常数及板尺寸均见图 2, 假设材料为理想弹塑性体。

2. 取足够小的载荷增量 $\Delta Q = 100$ 计算。板中点 0 的位移 δ 和载荷 Q 的关系曲线如图 3 所示。可以看出, NIDKQ 元和 s30 元的计算结果相当吻合, 说明在小步长情况下传统切线刚度法和一致性算法的计算精度是相当的。而 NIDKQ 元和 I9 元结果之

间的微小差别体现了近似广义应力屈服函数(1)的误差。

表 1 列出从 $Q = 600$ 加载到 $Q = 3600$ 过程中三种单元所用机时和迭代次数。其中 NIDKQ 元所用机时最少。I9 元由于采样点为 NIDKQ 元的 9 倍,所以机时增加约

表 1 机时和迭代次数比较

单 元	NIDKQ	I9	s30
机时(分)	119	143	253
迭代次数	129	124	176

表 2 Energy 收敛情况对照

载 荷	迭代次数	NIDKQ	s30	s1
2500	1	0.2356×10	0.2347×10	0.1144×10
	2	0.1894	0.1243	0.9646
	3	0.4117×10^{-2}	0.1326×10^{-2}	0.1128
	4	0.3010×10^{-3}	0.5825×10^{-3}	0.2585×10^{-2}
	5	0.2003×10^{-11}	0.2810×10^{-12}	0.1389×10^{-3}
	6			0.2928×10^{-12}
3000	1	0.4049×10	0.1141×10	0.1167×10
	2	0.4921	0.2312×10	0.2201
	3	0.2119×10^{-1}	0.2991	0.1197
	4	0.6976×10^{-4}	0.2206×10^{-1}	0.1910
	5	0.8889×10^{-3}	0.4396×10^{-3}	0.5180×10^{-2}
	6	0.1499×10^{-10}	0.2844×10^{-6}	0.8705×10^{-3}
	7		0.1107×10^{-12}	0.1896×10^{-3}
	8			0.6254×10^{-10}
	9			0.2166×10^{-13}
	10			0.4739×10^{-15}
3500	1	0.8389×10	0.1172×10	0.6880×10
	2	0.2738×10	0.5587×10	0.4348
	3	0.4727	0.1611×10	0.8699
	4	0.1954×10^{-1}	0.2981	0.5912×10^{-1}
	5	0.3720×10^{-1}	0.5940×10^{-1}	0.4013
	6	0.1442×10^{-9}	0.8316×10^{-2}	0.3712×10^{-4}
	7	0.2310×10^{-20}	0.2813×10^{-3}	0.1562
	8		0.4590×10^{-7}	0.2774×10^{-4}
	9		0.1330×10^{-11}	0.1251
	10		0.1143×10^{-22}	0.1882×10^{-4}
	11			0.3487×10^{-1}
	12			0.8789×10^{-2}
	13			0.1073×10^{-1}
	14			0.9734×10^{-4}
	15			0.2873×10^{-7}
	16			0.1387×10^{-16}

20%。此外 I9 元所占存贮大约是 NIDKQ 元的 9 倍。s30 元比 NIDKQ 元多用机时 1.1 倍以上, 主要是因为塑性区发展较快的加载步内传统切线刚度法的迭代收敛速度低。

3. 取载荷增量 $\Delta Q = 500$, 从 $Q = 1500$ 开始加载到 $Q = 3500$ 。后三步加载中能量 $\text{Energy} = r^T \cdot \Delta u$ 的收敛情况列于表 2, 此处 r 和 Δu 分别为本次迭代计算得到的不平衡力矢量和位移增量矢量。从表 2 可以看出, NIDKQ 元具有明显的平方收敛速度, 而在塑性区发展较快的加载步内, s30 元和 s1 元的收敛速度都显著降低。

五、结 束 语

一致性算法是有限载荷增量弹塑性有限元分析中保持牛顿迭代平方收敛速度, 保证一阶精度和无条件稳定性的算法。与传统切线刚度法相比, 一致性算法在实施中具有两个主要特征: 1) 采用路径无关的变量更新格式; 2) 采用与增量步内速率型基本方程积分算法相一致的弹塑性切线模量。应用一致性算法构造出以弯矩和曲率为基本变量的板单元 NIDKQ 元。数值实验表明, 一致性算法具有良好的平方收敛速度, 板广义应力屈服函数也达到令人满意的精度。

参 考 文 献

- [1] 龚尧南, 王寿梅, 结构分析中的非线性有限元法, 北京航空学院出版社(1986), 84—96.
- [2] 殷有泉, 固体力学非线性有限元引论, 北京大学出版社, 清华大学出版社(1987), 97—104.
- [3] 奥特加, J.M., 莱因博尔特, W.C. 著;朱季纳译, 多元非线性方程组迭代解法, 科学出版社(1983), 330—332.
- [4] Krieg, R. D., Key, S. W., Implementation of a time dependent plasticity Theory in to structural computer programs. In: Stricklin, J. A., and Saczalski, K. J., Constitutive Equations in Viscoplasticity: Computational and Engineering Aspects, AMD-20, ASME, New York, (1976), 125—137.
- [5] Argyris, J. H., Doltsinis, J. St., Knudson, W. C., Vaz, L. E., Willam, K. S., Numerical solution of transient nonlinear problems, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 17, 18(1979), 341—409.
- [6] Ortiz, M., Popov, E. P., Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive equations, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 21(1985), 1561—1576.
- [7] Simo, J. C., Taylor, R. L., A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 22(1986), 649—670.
- [8] Dodds, R. H., Jr. Numerical techniques for plasticity computations in finite element analysis. *Comput. Struct.*, 26, 5(1987), 767—779.
- [9] Eidsheim, O. M., Larsen, P. K., A study of some generalized constitutive models for elastoplastic shells. In: Wunderlich, W., Stein, E., Bathe, K. J., Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics. Proceedings of the Europe-US Workshop Ruhr-Universitat Bochum, Germany, July 28—31, (1980), 364—384.
- [10] Yamada, Y., Yoshimura, N., Sakurai, T., Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by the finite element method. *Int. J. Mech. Sci.*, 10(1968), 343—354.
- [11] Nagtegal, J. C., Jong, J. E. De., Some computational aspects of elastic-plastic large strain analysis. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 21(1985), 1561—1576.
- [12] Potts, D. M., Gens, A., A critical assessment of methods of correcting for drift from the yield surface in elasto-plastic finite element analysis. *Int. J. Num. Anal. Mech. Geomech.*, 9(1985), 149—159.
- [13] Jeyachandrabose, C., Kirkhope, J., Meekisho, L., An improved discrete kirchhoff quadrilateral thin-plate bending element. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 24(1987), 635—654.
- [14] 李明瑞, 交互式有限元软件 FEM 的功能及设计思想, 北京农业工程大学学报, 6, 2(1986); 59—65.

A CONSISTENT ALGORITHM OF NEWTON ITERATION AND ITS APPLICATION IN PLATE BENDING FINITE ELEMENT ANALYSIS

Wei Zujian, Li Mingrui, Huang Wenbin
(*Beijing Agricultural Engineering University*)

Abstract The reasons in the loss of accuracy and asymptotic rate of quadratic convergency of Newton iteration in finite load increments when using classical tangent stiffness matrix methods of elastoplastic finite element analysis are briefly discussed. A consistent algorithm is proposed which preserves the asymptotic rate of quadratic convergency of Newton iteration and holds a first order accuracy and unconditional stability. It is characterized by the path-independent strategy and the consistent elastoplastic tangent moduli.

Based upon the consistent algorithm, an elastoplastic plate bending element, NIDKQ, is developed with moments and curvatures as basic variables. Numerical results show a satisfactory accuracy of NIDKQ, and have verified the asymptotic rate of quadratic convergency of consistent algorithm of Newton iteration in the finite load increments, whereas the asymptotic convergent rate of classical tangent stiffness matrix methods is greatly reduced along with the expansion of plastic zone.

Key words Newton iteration, consistent algorithm, elastoplasticity, plate bending finite element