

两相速度平衡条件下的两相流声速

刘 大 有

(中国科学院力学研究所,中国科学院多相反应开放研究实验室)

摘要 在两相速度平衡条件下,本文首先给出无相变的两相流中声速的一般表达式。再对相间传热作出热平衡或绝热假设,得到完全平衡的和部分平衡的声速的具体表达式。两相流(速度平衡的)声速的许多现有公式都可以作为特例从一般表达式中导出。本文还研究了相变对声速的影响,给出了一元两相系的和二元两相系的完全平衡(速度平衡、热平衡和相平衡)声速公式。

关键词 声速,两相流,非平衡流动,相变

一、引 言

顾名思义,声速是声音传播的速度。声速也代表压力小扰动传播的速度,因此在可压缩流体动力学中有很重要的意义。由它同流速的大小比较,确定流动属于亚声速、跨声速或超声速流。不同的流动领域,流动特征有很大差别。因此声速在可压缩流体动力学研究中一直受到十分重视。在两相流中,声速也有类似的重要性。

在可压缩流动中,声速可表示为 $\sqrt{\partial p / \partial \rho}$ 。普通气体有两个独立的状态参数,偏导数 $(\partial p / \partial \rho)$ 的含义尚不确定,还需补充一条件。若扰动的特征时间(如周期)很长,在传播过程中被扰介质与周围介质始终处于热平衡,压缩(或膨胀)过程基本上等温,则此声速为等温声速: $a_T = \sqrt{(\partial p / \partial \rho)_T} = \sqrt{RT}$ 。若扰动的特征时间很短,被扰介质与周围介质基本上绝热,则此声速为绝热声速: $a_{ad} = \sqrt{(\partial p / \partial \rho)_{ad}} = \sqrt{\gamma RT}$ 。通常人们说的声速都指绝热声速,因为它很接近声音传播的实际速度,因此下标 ad 也常被略去。

在高温气体中,因分子内部自由度的能量(转动能、振动能等)被激发,确定气体状态的独立变数已不止两个,增加一个或多个标志分子内部能量统计状态的新变量。这时,即使被扰介质与周围介质之间绝热,偏导数 $(\partial p / \partial \rho)$ 的含义仍不确定,尚需补充被扰介质内的能量平衡状况。两个极端情况是:平衡极限和冻结极限。在扰动过程中,内部自由度同平动自由度始终处于热平衡,这是平衡极限;内部自由度的能量水平保持不变,这是冻结极限。

在两相流中,情况就更复杂了。压力扰动在两相介质中的传播速度,不仅依赖于被扰微团同周围介质的热交换、依赖于微团内两相之间的热交换,还依赖于微团内两相之间的动量交换。而动量非平衡(即速度非平衡)对研究声速带来的困难比能量非平衡更大。

本文于 1988 年 9 月 26 日收到第一稿,1990 年 4 月 18 日收到修改稿。

许多作者都研究过两相介质中的声速。Landau & Lifshitz^[1] 研究过一元两相系中速度平衡、温度平衡和相平衡条件下的绝热声速, 给出了包括相变影响的声速表达式。Wallis^[2] 从临界流动条件出发也得出了包括相变的完全平衡声速, 但不是绝热等熵声速, 而是等焓声速。Wallis 还给出了被广泛引用的、无相变的均质流 (homogeneous flow) 的声速公式。他是用各相中的声速来表达混合物中的声速。但在气相声速取何值问题上遇到了困难。Wallis (和引用他的公式的其它许多作者) 曾采用过等熵声速 $\sqrt{\gamma RT}$, 也采用过等温声速 \sqrt{RT} 。Rudinger^[3] 和 Schmitt-V. Schubert^[4] 都研究过气-固两相流中的声速。他们忽略了固相的可压缩性, 得到了两相动量交换平衡或冻结、两相热交换平衡或冻结的共四种组合的声速表达式。

对于团状流 (slug flow), Henry 以及后来的 Nguyen 等^[5] 用简单而直观、但显然不够严谨的方法求得了声速公式。Martin 等^[6] 详细地分析了团状流中压力波的反射与透射, 修正了 Henry 的声速公式, 结果同 Wallis 的均质流声速很接近, 但比 Henry 和 Nguyen 的结果小几倍。

对于分层流 (stratified flow), Wallis^[2] 和 Hancox 等^[7] 都研究过声速。Hancox 等和 Thorley 等^[8] 还详细地研究了悬浮体两相流中引入附加质量力后, 两相流方程组的特征值以及与此相关的冻结声速。

文献上见到的两相流声速公式还有很多。许多作者都是按流型分类来研究声速^[2,5-8], 结果造成很多重复, 因不同流型可能有相同的声速公式。也造成某些混乱, 因同一流型常有多种声速公式。目前的最大问题是: 每个两相流声速公式在它的建立过程中包含了哪些假设以及公式的适用范围, 解释得不够清楚、不够准确。因此, 很有必要用一种统一的观点进行研究、推导。首先提出若干基本假设, 求得在一定范围内普遍适用的声速公式。再根据两个相的密度, 声速等常有的量级上的差别进行简化, 等等。用这样的方式可以得到一系列见诸于文献的各种声速近似式, 以及某些新的近似公式。采用这种方式得到的各种近似式, 它所包含的假设和它的适用范围非常清楚, 各种近似公式之间的联系与差别也很明显。

我们不按流型分类, 而是根据扰动传播过程中两相速度或其它弛豫过程是否平衡来分类。本文研究速度平衡条件下的声速。

本文有四个基本假设: (1) 被扰微团与周围介质绝热; (2) 不计表面张力, 两个相的压强相等; (3) 气相都是完全气体; 在液相 (或固相) 中, 等温声速与等熵声速相等, 这相当于 $(\partial h_s / \partial p)_T = v_s$; (4) 两个相的速度始终保持一致。

第四个假设最重要, 它使问题大为简化, 但同时也限制了结果的适用范围。事实上, 许多作者推导声速公式时都用了这一假设^[1-4], 虽然他们有时没有明确指出这一点^[1,2]。

二、两相速度平衡、但无相变时的声速

两相速度始终平衡, 这意味着

$$u_1 = u_2, \quad du_1 = du_2 \quad (2.1)$$

下标 1、2 分别代表不同的相。这里不必限定每一相是什么物态。当需要指定物态时, 则用下标 g, l, s 分别代表气、液、固态。因液态与固态有许多相似性质, 常可一起讨论, 这

时用下标 d ($d = l$ 或 s) 表示。

由于假设速度始终平衡, 因此可取一封闭的微元体来分析扰动 Δp 到来时体系内各种参数的变化。本文最关心的是密度变化, 因声速由它决定。

设 M_m 、 V_m 、 ν_m 和 ρ_m 为体系中混合物的总质量、总体积、比容和密度, M_k 、 V_k 、 ν_k 、 ρ_k 、 α_k 和 ϕ_k ($k = 1, 2$) 分别为体系中 k 相的质量、所占的体积、比容、相密度、体积分数和质量分数, 则有

$$\nu_k \equiv V_k/M_k \equiv 1/\rho_k \quad (k = 1, 2 \text{ 或 } m) \quad (2.2)$$

$$\alpha_k \equiv V_k/V_m, \quad \phi_k \equiv M_k/M_m \quad (k = 1, 2) \quad (2.3)$$

$$M_m = M_1 + M_2, \quad V_m = V_1 + V_2, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \phi_1 + \phi_2 = 1 \quad (2.4)$$

$$\nu_m = \phi_1\nu_1 + \phi_2\nu_2, \quad \rho_m = \alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2 \quad (2.5)$$

对于封闭体系, 又假设无相变, 则有 $\Delta M_m = \Delta M_1 + \Delta M_2 = \Delta\phi_1 = \Delta\phi_2 = 0$, 所以 $\Delta\rho_m$ 和混合物的(速度平衡)声速 $a_{m,e}$ 可表示为

$$\Delta\rho_m = -\frac{M_m}{V_m} \frac{\Delta V_m}{V_m} = -\rho_m^2 [\phi_1\Delta\nu_1 + \phi_2\Delta\nu_2] \quad (2.6)$$

$$\Delta\rho_m = \rho_m \left[\frac{\rho_m\phi_1}{\rho_1^2} \Delta\rho_1 + \frac{\rho_m\phi_2}{\rho_2^2} \Delta\rho_2 \right] = \rho_m \left(\frac{\alpha_1}{\rho_1} \Delta\rho_1 + \frac{\alpha_2}{\rho_2} \Delta\rho_2 \right) \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} a_{m,e}^{-2} &\equiv \left(\frac{\partial\rho_m}{\partial p} \right)_A = -\rho_m^2 \left[\phi_1 \left(\frac{\partial\nu_1}{\partial p} \right)_A + \phi_2 \left(\frac{\partial\nu_2}{\partial p} \right)_A \right] \\ &= \rho_m \left[\frac{\alpha_1}{\rho_1} \left(\frac{\partial\rho_1}{\partial p} \right)_A + \frac{\alpha_2}{\rho_2} \left(\frac{\partial\rho_2}{\partial p} \right)_A \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

此处 a_m 后的下标 e 表示两相速度平衡条件下的声速, 下标 A 表示微团与周围介质绝热。但对于每一相来说不一定绝热, 因相间可能有热交换。

Wallis^[2] 得到了与式(2.8)类似的结果。在他的公式中 $(\partial\rho_k/\partial p)_A$ 被 a_k^{-2} 代替了, 并称 a_k 是 k 相的声速。他对 a_k 没有给出确切定义。例如, 对于气相声速 a_g , 他曾采用过绝热声速: $a_g = \sqrt{(\partial p/\partial\rho_g)_{ad}} = \sqrt{\gamma RT}$, 也采用过等温声速: $a_g = \sqrt{(\partial p/\partial\rho_g)_T} = \sqrt{RT}$ 。下面我们来讨论 $(\partial\rho_k/\partial p)_A$ 的值同相间传热过程的关系。

1. 相间绝热

由于微团与外界绝热, 相间又绝热, 因此每一相都处于绝热状态, 由此得到

$$\begin{aligned} (\partial\rho_k/\partial p)_A &= (\partial\rho_k/\partial p)_{ad} = a_{k,ad}^{-2} \\ a_{m,e}^{-2} &= \rho_m \left[\frac{\alpha_1}{\rho_1 a_{1,ad}^2} + \frac{\alpha_2}{\rho_2 a_{2,ad}^2} \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

a_m 后的第二个下标 f 表示相间热交换冻结。

对于液相和固相, 由于等熵声速与等温声速相等, 下标 ad 可略去。因此对于液-固和液-液两相流, 式(2.9)简化为

$$a_{m,e}^{-2} = \rho_m \left[\frac{\alpha_1}{\rho_1 a_1^2} + \frac{\alpha_2}{\rho_2 a_2^2} \right] \quad (2.10)$$

对于气相有 $a_{g,ad}^2 = \gamma RT_g$, 因此在气-固和气-液两相流中式(2.9)可简化为 (γ 是气体的比热比)

$$a_{m,d}^{-2} = \rho_m \left[\frac{\alpha_d}{\gamma RT_d \rho_d} + \frac{\alpha_d}{\rho_d a_d^2} \right] \quad (d = l \text{ 或 } s) \quad (2.11)$$

上式与 Wallis 著作^[2]中的式(9.49)和(9.51)的结果和 Martin 等^[6]的式(12)、(13)的结果完全一致。但现在可看出: 气相声速 a_g 采用 $\sqrt{\gamma RT_g}$ 的条件是相间绝热。

下面对式(2.11)作进一步简化。由于气相密度 ρ_g 和声速 $\sqrt{\gamma RT_g}$ 远小于 d 相密度和声速, 所以对于绝大多数气-液和气-固两相流, $a_{m,d}^2$ 可简化为

$$a_{m,d}^2 \approx \frac{\gamma RT_g \rho_g}{\alpha_g \rho_m} = \frac{\phi_g \gamma RT_g}{\alpha_g^2} = \frac{(1 - \phi_g) \gamma p}{(1 - \alpha_g) \alpha_g \rho_d} \quad (2.12)$$

当 $(1 - \alpha_g) \ll 1$ 和 $\phi_g \ll 1$ 时, 上式可进一步简化为

$$a_{m,d}^2 = \phi_g \gamma RT_g \quad (1 - \alpha_g \ll 1) \quad (2.13)$$

$$a_{m,d}^2 \approx \gamma p / [\alpha_g (1 - \alpha_g) \rho_d] \quad (\phi_g \ll 1) \quad (2.14)$$

式(2.14)与 Wallis 著作中的式(9.50)、(9.51), Martin 等^[6]的式(15)一致; 式(2.12)与 Schmitt-V. Schubert^[4]的速度平衡、热交换冻结的声速完全一致

若 α_g 非常小, 以至于 $\alpha_g / \rho_g a_{g,d}^2 \ll \alpha_l / \rho_l a_l^2$ (只有极少量气泡的气-液两相流), 式(2.11)可简化为

$$\rho_m \approx \rho_l, \quad \alpha_l \approx 1 \quad (2.15)$$

$$a_{m,d}^2 \approx a_l^2 / [1 + \alpha_g \rho_l a_l^2 / \gamma p] \quad (2.16)$$

2. 相间热平衡

若在扰动过程中微团与外界绝热, 而微团内部完全平衡, 则微团内是均匀的, 微团的变化是等熵的。运用热力学关系可得

$$\left(\frac{\partial v_k}{\partial p} \right)_A = \left(\frac{\partial v_k}{\partial p} \right)_s = \left(\frac{\partial v_k}{\partial p} \right)_T + \left(\frac{\partial v_k}{\partial T} \right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s &= \left[v_m - \left(\frac{\partial h_m}{\partial p} \right)_T \right] / \left(\frac{\partial h_m}{\partial T} \right)_p \\ &= \left[\phi_1 v_1 + \phi_2 v_2 - \phi_1 \left(\frac{\partial h_1}{\partial p} \right)_T - \phi_2 \left(\frac{\partial h_2}{\partial p} \right)_T \right] / c_{p,m} \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$h_m = \phi_1 h_1 + \phi_2 h_2$$

$$c_{p,m} = \phi_1 c_{p,1} + \phi_2 c_{p,2}$$

下标 s 表示混合物熵不变, h 是(混合物或组元的)焓, c_p 是定压比热。对于 d 相 ($d = l$ 或 s), 定压比热 c_p 等于定容比热 c_v , 并用 c 表示。对于液-液或液-固两相流, 由于 $(\partial h_k / \partial p)_T = v_k$, 结果有

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s &= 0, \quad \left(\frac{\partial v_k}{\partial p} \right)_s = \left(\frac{\partial v_k}{\partial p} \right)_T = -(\rho_k a_k)^{-2} \\ a_{m,d}^{-2} &= \rho_m \left[\frac{\alpha_1}{\rho_1 a_1^2} + \frac{\alpha_2}{\rho_2 a_2^2} \right] \end{aligned} \quad (2.19)$$

对于气-液或气-固两相流, 由于 $(\partial h_g / \partial p)_T = 0$, $v_g = RT/p$, 结果有

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s = \phi_g v_g / c_{p,m}$$

$$-\left(\frac{\partial v_g}{\partial p}\right)_s = \frac{v_g}{p} - \frac{v_g}{T} \frac{\phi_g v_g}{c_{p,m}} = \frac{v_g}{p} \left(1 - \frac{\phi_g R}{c_{p,m}}\right) = \frac{v_g^2}{TRT} \quad (2.20)$$

$$a_{m,ee}^{-1} = \rho_m^2 \left[\frac{\phi_g}{\Gamma RT \rho_g^2} + \frac{\phi_d}{\alpha_d^2 a_d^2} \right] = \rho_m \left[\frac{\alpha_g}{\Gamma RT \rho_g} + \frac{\alpha_d}{\alpha_d^2 a_d^2} \right] \quad (d=l \text{ 或 } s) \quad (2.21)$$

$$\Gamma \equiv c_{p,m}/c_{v,m} = (\phi_g c_{p,g} + \phi_d c_d) / (\phi_g c_{v,g} + \phi_d c_d) = \left(1 + \frac{\phi_g R}{c_{p,m}}\right)^{-1} \quad (2.22)$$

此处 Γ 是混合物的比热比, c_d 是 d 相的比热. 如果 $\Gamma \approx 1$, 则式 (2.21) 与 Wallis 著作的式 (9.49)、(9.52) 一致. 由此可见, Wallis 声速公式中的气相声速 a_g 采用 $\sqrt{RT_g}$ 的条件是: 相间热平衡, 而且 $\phi_g \ll 1$.

下面对式 (2.21) 作进一步简化. 由于 $\rho_g \ll \rho_d$, $\Gamma RT \ll a_d^2$, 所以对于绝大多数气-液和气-固两相流, $a_{m,ee}$ 可近似为

$$a_{m,ee}^2 \approx \frac{\Gamma RT_g \rho_g}{\alpha_g \rho_m} = \frac{\phi_g \Gamma RT}{\alpha_g^2} = \frac{(1 - \phi_g) \Gamma p}{\alpha_g (1 - \alpha_g) \rho_d} \quad (d=l \text{ 或 } s) \quad (2.23)$$

当 $(1 - \alpha_g) \ll 1$ 和 $\phi_g \ll 1$ 时, 上式可进一步简化为

$$a_{m,ee}^2 \approx \phi_g \Gamma RT \quad (1 - \alpha_g \ll 1) \quad (2.24)$$

$$a_{m,ee}^2 \approx p / [\alpha_g (1 - \alpha_g) \rho_d] \quad (\phi_g \ll 1) \quad (2.25)$$

式 (2.25) 与 Wallis 著作^[2]中的式 (9.50)、(9.52) 的结果一致. 式 (2.23) 同 Rudinger^[3]的平衡声速和 Schmitt-v. Schubert^[4]的完全平衡声速一致.

对于 α_g 非常小, 以至于 $\alpha_g / \rho_g a_g^2 \ll \alpha_l / \rho_l a_l^2$ 的气-液两相流, 这时近似式 (2.15) 成立, 并有 $\Gamma \approx 1$, 则由式 (2.21) 可得

$$a_{m,ee}^2 \approx a_l^2 / [1 + \alpha_g \rho_l a_l^2 / p] \quad (2.26)$$

对于气-液和气-固两相流, 完全平衡声速 $a_{m,ee}^2$ 与部分平衡声速 $a_{m,el}^2$ 的两个近似式 (2.23) 和 (2.12) 的差别仅在于: 前者有个因子 Γ —混合物的比热比, 后者有个因子 γ —气

表 1

液-固或液-液 两相流	$a_{m,ee}^{-1} = a_{m,el}^{-1} = a_{m,el}^{-1} = \rho_m \left(\frac{\alpha_l}{\rho_l a_l^2} + \frac{\alpha_s}{\rho_s a_s^2} \right)$				
	$a_{m,el}^{-1} = \rho_m \left[\frac{\alpha_g}{\rho_g} \left(\frac{\partial v_g}{\partial p} \right)_s + \frac{\alpha_d}{\rho_d a_d^2} \right]$				
气-固 或 气-液 两相流	一般形式	$\frac{\alpha_g}{RT_g \rho_g} \ll \frac{\alpha_l}{\rho_l a_l^2}$	$\frac{\alpha_g}{RT_g \rho_g} \gg \frac{\alpha_d}{\rho_d a_d^2}$		
			$\phi_g \ll 1$	一般形式	$(1 - \alpha_g) \ll 1$
	$a_{m,ee}^2$	$\rho_m^{-1} \left[\frac{\alpha_g}{\Gamma RT_g \rho_g} + \frac{\alpha_d}{\rho_d a_d^2} \right]^{-1}$	$a_l^2 / \left[1 + \frac{\alpha_g \rho_l a_l^2}{p} \right]$	$\frac{p}{\alpha_g (1 - \alpha_g) \rho_d}$	$\frac{\Gamma \phi_g RT_g}{\alpha_g^2}$
$a_{m,el}^2$	$\rho_m^{-1} \left[\frac{\alpha_g}{\gamma RT_g \rho_g} + \frac{\alpha_d}{\rho_d a_d^2} \right]^{-1}$	$a_l^2 / \left[1 + \frac{\alpha_g \rho_l a_l^2}{\gamma p} \right]$	$\frac{\gamma p}{\alpha_g (1 - \alpha_g) \rho_d}$	$\frac{\gamma \phi_g RT_g}{\alpha_g^2}$	$\gamma \phi_g RT_g$

$\Gamma \equiv (\phi_g c_{p,g} + \phi_d c_d) / (\phi_g c_{v,m} + \phi_d c_d)$, 下标 $d = l$ 和 s , 下标 A 指微团同外界绝热

$\rho_m = \alpha_l \rho_l + \alpha_s \rho_s$; 下标 g, l 和 s 分别代替气、液和固相.

a_m 后的第一个下标 e 指两相的速度平衡, 第二个下标 e 或 l 指相间热交换平衡或冻结

体的比热比。对于液-固和液-液两相流， $a_{m,ee}^2$ 与 $a_{m,ef}^2$ 的公式 (2.19) 与 (2.10) 完全一样。

表 1 列出了本节的所有主要公式。

以空气-水两相混合物为例，在图 1 和图 2 中画出了由式 (2.11) 和 (2.21) 表示的部分平衡声速 $a_{m,ef}$ 和完全平衡声速 $a_{m,ee}$ 的曲线，在图 1 中是以气相的质量分数 ϕ_g 为横坐标，在图 2 中以体积分数 α_g 为横坐标。

在标准状态下，纯空气中的声速约 340 m/s，纯水中的声速约 1500 m/s，而空气-水混合物中的(速度平衡)声速在大多数情况下仅数十米每秒，在 $\alpha_g = 0.5$ 处达到极小值：

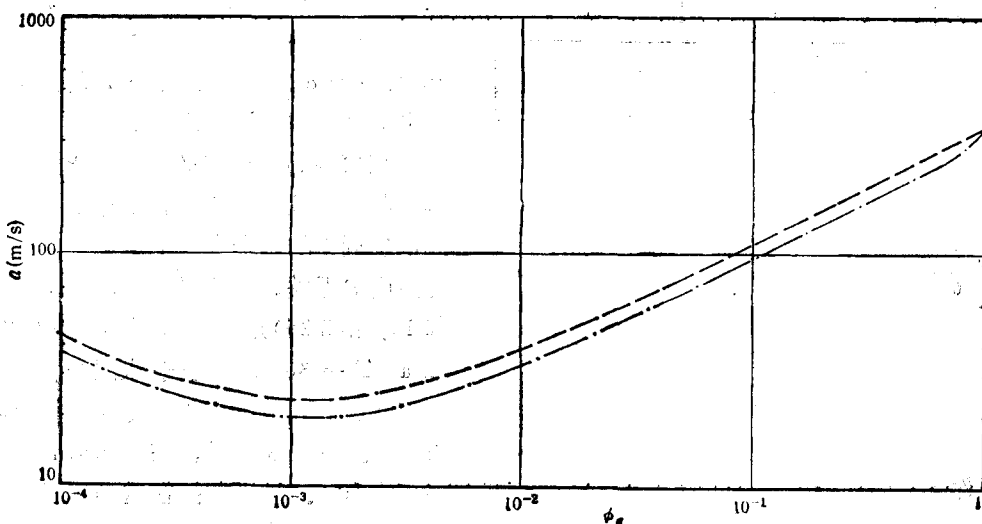


图 1

$p = 10^5 \text{ Pa}$ 空气-水 — · — · — $a_{m,ef}$ $a_{m,ee}$ $a_{m,ef}$

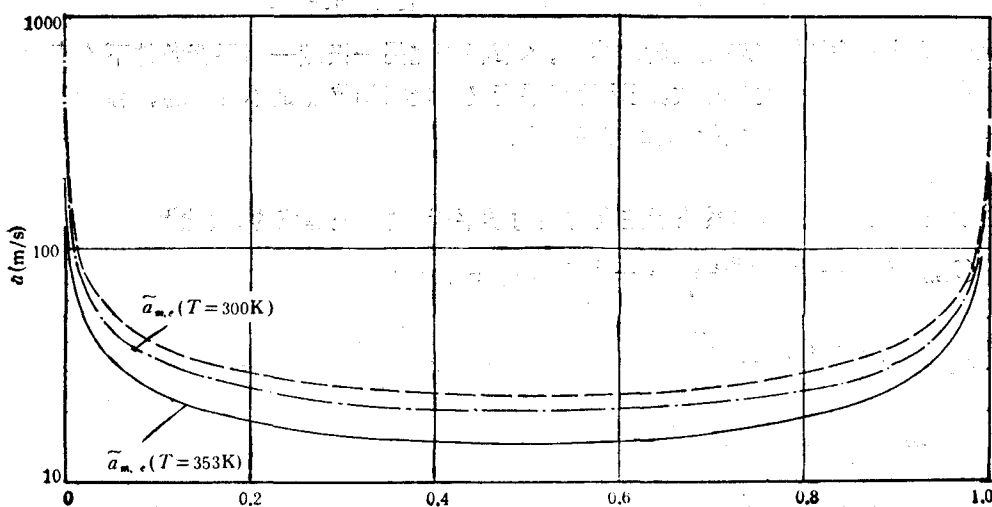


图 2

$p = 10^5 \text{ Pa}$ 空气-水 — · — · — $a_{m,ef}$ $a_{m,ee}$ $a_{m,ef}$

20 m/s. 对此可作如下解释: 体系平均密度的增量 $\Delta\rho_m$ 可表示为体系的压缩性 ($-\Delta V_m/V_m$) 与体系平均密度 ρ_m 的乘积 (见式(2.6)). 在纯水中加入少量气泡 (如 $\alpha_g < 1\%$), 对

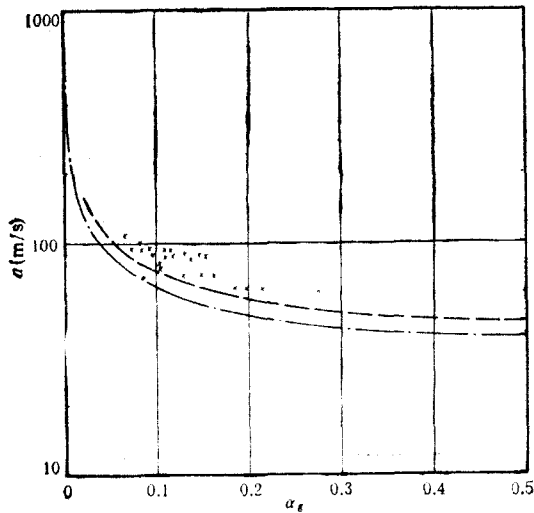


图 3
空气-水
 $p = 0.375 \text{ MPa}$ $\cdots \cdots a_{m,e}$
 $\cdots \cdots a_{m,e'}$

平均密度无太大影响, 而体系的压缩性由于这少量气泡而显著增加. 这就是 $a_{m,e} \sim \alpha_g$ 和 $a_{m,e'} \sim \alpha_g$ 曲线在 $\alpha_g = 0$ 附近随着 α_g 的增加而显著下降的原因. 在纯空气中加入少量液滴 (如 $\alpha_g < 1\%$), 对体系的压缩性无太大影响, 但平均密度因此而显著增加. 这就是 $a_{m,e} \sim \alpha_g$ 和 $a_{m,e'} \sim \alpha_g$ 曲线在 $\alpha_g = 1$ 附近随着 α_g 减小而显著下降的原因.

空气中的声速与 \sqrt{T} 成正比. 而在气-固或气-液两相流中, 除 α_g 很接近 0 或很接近 1 的两个很小范围以外, 声速与温度 T 无关, 而与 \sqrt{p} 成正比 (见式(2.14)和(2.25)). 图 3 画出了 $p = 0.375 \text{ MPa}$ 、 $T = 300 \text{ K}$ 的空气-水混合物中的声速, 以及 Martin 等^[6]测得的团状流中的声速. 从图 3 可见, 在 Martin 的

实验条件下, 团状流的实际声速也很接近两相速度平衡的声速. 这说明: 在这种运行条件下, 在扰动过程中两相速度基本上平衡. 对于悬浮体流动, 当颗粒或液滴直径很小 (如微米级) 时, 也有类似结果.

三、有相变的两相流中的完全平衡声速

上一节研究了完全忽略相变时的声速, 本节将研究另一极端—相平衡条件下的声速. 由于相变伴随着热的吸收与释放, 既认为相平衡又假设相间绝热是不合理的, 因此本节考虑的是热平衡、相平衡条件下的扰动传播速度.

1. 一元两相系

由于假设扰动过程中体系处于完全的热力学平衡, 过程是等熵的, 因此^[3]

$$(\tilde{a}_{m,e})^{-2} = -\frac{1}{v_m^2} \left(\frac{\partial v_m}{\partial p} \right)_s = -\frac{1}{v_m^2} [\phi_g F_g + \phi_l F_l] \quad (3.1)$$

$$F_g \equiv -\left(\frac{\partial v_g}{\partial p} \right)_T - \frac{2T}{q} \left(\frac{\partial v_g}{\partial T} \right)_p (v_g - v_l) + \frac{T c_{p,g}}{q^2} (v_g - v_l)^2$$

$$\approx \left(\frac{1}{R_g T} - \frac{2}{q} + \frac{T c_{p,g}}{q^2} \right) v_g^2$$

$$F_l \equiv -\left(\frac{\partial v_l}{\partial p} \right)_T - \frac{2T}{q} \left(\frac{\partial v_l}{\partial T} \right)_p (v_g - v_l) + \frac{T c_{p,l}}{q^2} (v_g - v_l)^2 \approx \frac{T c_{p,l}}{q^2} v_g^2$$

其中 q 是相变潜热, 混合物声速 a_m 上的 \sim 表示相平衡, 下标 e 仍表示速度平衡, R_g 是蒸

气的气体常数。当 $\phi_l \ll 1$ 和 $\phi_g \ll v_l/v_g$ 时分别有

$$\tilde{a}_{m,g} \approx \left[\frac{1}{R_g T} - \frac{2}{q} + \frac{T c_{p,g}}{q^2} \right]^{-1/2} \quad (\phi_l \ll 1) \quad (3.2)$$

$$\tilde{a}_{m,g} \approx \frac{v_l}{v_g} \frac{q}{\sqrt{T c_{p,l}}} \quad (\phi_g \ll v_l/v_g) \quad (3.3)$$

按式(3.1)计算的、压强为 $p = 10^4, 10^5, 10^6$ 和 10^7 Pa 的水-蒸气系统中的完全平衡声速 $\tilde{a}_{m,g}$ 示于图 4。图上也同时画出了忽略相变时 $p = 10^5$ Pa 的声速 $a_{m,g}$ (热平衡的) 和 $a_{m,l}$ (热冻结的)。通过对比可见, 对于像水-蒸气这样的一元两相系, 在 ϕ_g 很小时, 相变过程对声速影响较大, 而相间热交换的影响相对地较小; 当 ϕ_g 较大时, 相变对声速的影响不大。

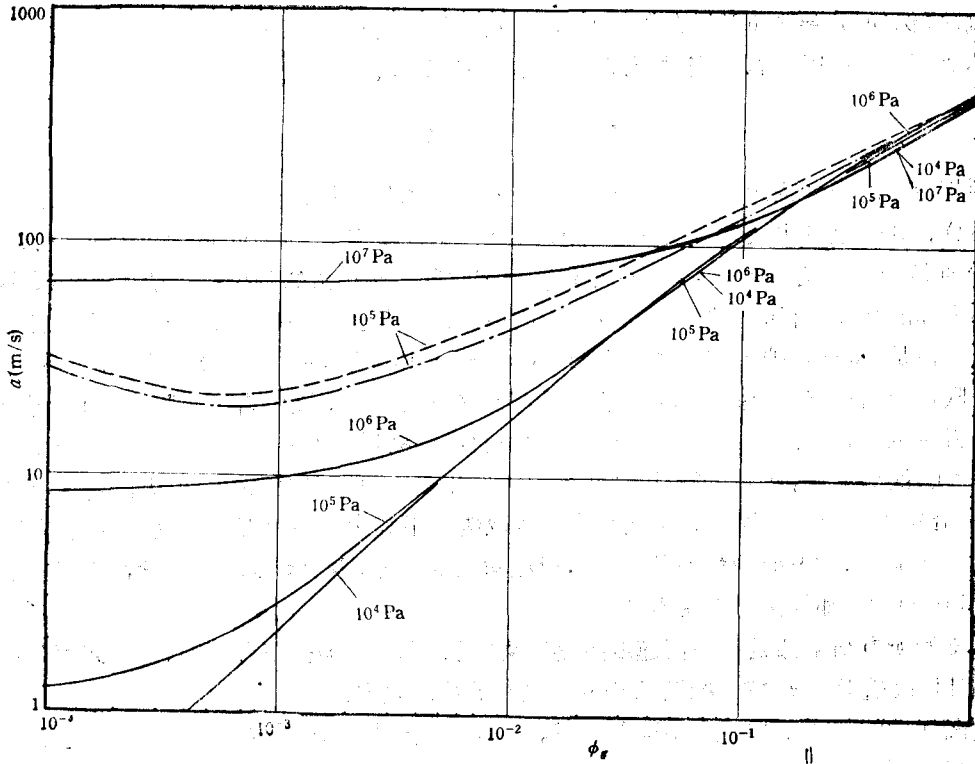


图 4

— $a_{m,g}$ - - - $a_{m,g}$ — $\tilde{a}_{m,g}$

由下式可得到 Wallis^[2] 给出的、考虑了相变后的声速, 显然这是等焓声速

$$-v_m^2 \left(\frac{\partial v_m}{\partial p} \right)_h = -v_m^2 \left[\left(\frac{\partial v_m}{\partial p} \right)_\phi + \left(\frac{\partial v_m}{\partial \phi_g} \right)_p \left(\frac{\partial \phi_g}{\partial p} \right)_h \right]$$

2. 二元两相系

下面讨论像空气-蒸气-水(分别用下标 a 、 v 和 l) 这样的系统中的完全平衡声速, 忽略空气在水中的溶解度。这里气相(用下标 g)是由空气(a)和蒸气(v)组成,

在空气-蒸气-水系统中,完全平衡声速 $\tilde{a}_{m,c}$ 可表示为

$$\begin{aligned} (\tilde{a}_{m,c})^{-2} &= -v_m^2 \left(\frac{\partial v_m}{\partial p} \right)_T = -v_m^2 \left[\left(\frac{\partial v_m}{\partial p} \right)_T + \left(\frac{\partial v_m}{\partial T} \right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_T \right] \\ &= -v_m^2 \left\{ \left(\frac{\partial v_m}{\partial p} \right)_T + \left(\frac{\partial v_m}{\partial T} \right)_p \left[v_m - \left(\frac{\partial h_m}{\partial p} \right)_T \right] / \left(\frac{\partial h_m}{\partial T} \right)_p \right\} \quad (3.4) \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \left(\frac{\partial v_m}{\partial p} \right)_T = -\phi_g v_g / p + \phi_l \left(\frac{\partial v_l}{\partial p} \right)_T - \phi_v \Delta v / p_a,$$

$$\left(\frac{\partial v_m}{\partial T} \right)_p = \phi_g v_g / T + \phi_l \left(\frac{\partial v_l}{\partial T} \right)_p + \phi_v \rho q / \rho_v \rho_a T,$$

$$\left(\frac{\partial h_m}{\partial p} \right)_T = \phi_l v_l - \phi_v q / p_a, \quad \left(\frac{\partial h_m}{\partial T} \right)_p = c_{p,m} + \phi_v q^2 p / (\rho_v \rho_a T \Delta V), \quad \Delta v \equiv v_v - v_l$$

按式(3.5)计算的空气-蒸气-水系统的完全平衡声速曲线示于图 2 ($p = 10^5 \text{ Pa}$)。当温度不太高时(例如 $T = 300\text{K}$),完全平衡声速 $\tilde{a}_{m,c}$ 与忽略相变的声速 $a_{m,c}$ 几乎相等;当温度达到 $T = 353\text{K}$ 时,相变对声速的影响就很显著了。

四、讨 论

两相流中的声速依赖于两相之间各种弛豫过程(动量交换、热交换和相变等)进行得是否充分,其一般表达式必定依赖于 $\omega\tau_p$ 、 $\omega\tau_T$ 和 $\omega\tau_c$ 等,其中 ω 是扰动频率, τ_p 、 τ_T 和 τ_c 分别是动量交换、热交换和相变过程的弛豫时间。两相流的类型、流动参数和颗粒尺寸等方面的变化,对这些弛豫时间数值影响很大。因此,两相流声速的一般表达式必定很复杂。但是,每一种弛豫过程都有平衡 ($\omega\tau \rightarrow 0$) 和冻结 ($\omega\tau \rightarrow \infty$) 两个极限,对于这类极限声速(有三类弛豫过程的复杂问题,可有多达八种不同组合的极限声速)有可能给出分析表达式,而且不依赖于流型(速度弛豫的冻结极限例外)。对于不同流型,由于弛豫时间 τ 的很大差异,结果,可应用这些极限声速公式的频率范围也相差很大。对于某些流型,如分层流,由于 τ 很大,因此在绝大多数情况下其中的声速都很接近于冻结声速。对于另一些流型,如极细颗粒的悬浮体两相流和泡状流等,由于 τ 很小,因此在大多数情况下,其中的声速都很接近平衡声速。

本文的所有结果都是在两相速度始终平衡(见式(2.1))条件下得到的,包括朗道公式(3.1),因此只适用于 τ_c 较小的两相流或 ω 很小的扰动频率。

由图 1-图 4 可见,在速度平衡条件下,不论相间传热、相变过程进行得快或慢,大多数情况下声速都较小,仅数十米每秒,远小于每个单相中的声速。而速度冻结的声速常较大^[3,4],一般介于两个单相声速之间。由此可见,相间速度平衡与否对声速影响很大,相间热交换平衡与否对声速的影响较小(一般不超过 20%),相变的影响有时较大。

五、结 论

1. 本文求得了两相速度平衡、无相变条件下的声速 $a_{m,c}$ 的一般表达式。引入相间热交换平衡或冻结的假设后,分别得到完全平衡声速 $a_{m,c,c}$ 或部分平衡声速 $a_{m,c,l}$ 的一般表达式。然后根据各种两相流的具体情况,可引入不同的简化,结果得到一系列见诸于文献的两相流声速的近似式(详见表 1)。

2. 将 Wallis^[2] 均质流声速公式同本文的结果比较后可得出: (1) Wallis 公式中的气相声速若采用 $\sqrt{\gamma RT_g}$, 这相当于假设相间绝热; 若采用 $\sqrt{RT_g}$, 这相当于假设相间热平衡, 而且包含了近似 $\Gamma \approx 1$; (2) Wallis 公式的适用范围不仅限于均质流, 只要基本上满足: 扰动中两相速度始终平衡、无相变, 它对各种两相流均可用。例如团状流、细颗粒的悬浮体流和泡状流等。

3. 气体中的声速一般说正比于 \sqrt{T} , 而气-固和气-液两相流中的(速度平衡)声速, 在多数情况下正比于 \sqrt{P} (参见式(2.12)和(2.23))。

4. 本文还得到了包括相变影响的一元两相系中的平衡声速和二元两相系中的平衡声速: 式(3.1)和(3.4)。

5. 两相之间的各种弛豫过程对声速都有影响, 其中动量弛豫的影响最大, 热交换的影响较小, 在某些条件下相变也有较大影响。

参 考 文 献

- [1] 朗道, 栗弗席兹, 连续介质力学, 人民教育出版社, (1960) 318—319.
- [2] Wallis, G. B., *One-Dimensional Two-Phase Flow*, McGraw-Hill, New York (1969).
- [3] Rudinger, G., *Fundamentals of Gas-Particle Flow*, Elsevier Scientific Publishing Co. Amsterdam (1980), 47—48.
- [4] Schmitt-v. Schubert, B., *ZAMP*, **20**, 6(1969).
- [5] Nguyen, D. L., Winter, E. R. F. & Greiner, M., *Int. J. of Multiphase Flow*, **7**, (1981), 311—320.
- [6] Martin, C. S. & Padmanabham, M., *Trans. of ASME, J. of Fluids Engineering*, **101**, 1(1979).
- [7] Hancox, W. T., Ferch, R. L., Liu, W. S. & Nieman, R. E., *Int. J. of Multiphase Flow*, **6**, (1980), 25—40.
- [8] Thorley, A. R. D. & Wiggert, D.C., *Int. J. of Multiphase Flow*, **11**, (1985), 149—160.

THE SPEED OF SOUND IN TWO-PHASE FLOWS UNDER THE CONDITION OF VELOCITY-EQUILIBRIUM BETWEEN PHASES

Liu Dayou

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica, Multiphase Reaction Laboratory, Academia Sinica*)

Abstract Under the condition of velocity-equilibrium between phases, a general expression for the speed of sound in two-phase flows without phase change has been obtained. After introducing an adiabatic or thermo-equilibrium assumption between phases, the expression reduces to a particular expression for the complete or partial equilibrium speed of sound. Various expressions for the velocity-equilibrium speed of sound in two-phase flows published in literature can be derived from the general expression as special examples. The influence of phase change on the speed of sound has been studied and the expressions for the complete (velocity-, thermo- and phase-) equilibrium speed of sound in a single-component, two-phase system and in a two-component, two-phase system have been derived.

Key words speed of sound, two-phase flow, non-equilibrium flow, phase change