

# 压电陶瓷带形中 III 型裂纹的精确分析解

李显方 范天佑 \*

(湖南师范大学理学院, 长沙 410081)

\*(北京理工大学材料科学研究中心, 北京 100081)

**摘要** 分析无限长压电带形中的 III 型裂纹问题. 主要讨论了在带形边界受四种机电组合载荷情况下裂纹位于带形中平面上的情形. 通过积分变换, 与其相应的复合边值问题分别转化为对偶积分方程组. 使用对偶积分方程的熟知结果, 获得了裂纹线上电弹性场的明显的解析表达式及在裂尖处一些量的强度因子和能量释放率公式. 与已知的近似解比较, 所得结果是以封闭形式给出的精确解.

**关键词** 压电陶瓷, 无限带形, 电弹性场, III 型裂纹, 精确分析解

## 引 言

由于压电陶瓷具有良好的机电耦合特性, 即外加载荷不仅能导致弹性变形还能产生电场, 反之, 电场也能引起弹性变形, 这使得压电陶瓷在许多领域有着极为广泛的应用. 近年来, 对内含裂纹的压电陶瓷的断裂行为分析已成为一个相当活跃的研究方向. 其研究的一个主要任务就是要给出压电陶瓷中的电弹性场的分布规律, 尤其是在裂纹尖端处的电弹性场特征.

反平面变形是一种较为简单的变形问题. 对于压电陶瓷中此类问题的研究, Pak<sup>[1]</sup> 和 Li 等<sup>[2]</sup> 分别考虑了在无穷远处受均匀反平面剪应力和平面内电场作用下的 III 型 (反平面) 裂纹问题, 获得了电弹性场的解析表达式及一些相关量的强度因子. 随后, Dunn<sup>[3]</sup> 和 Zhang 等<sup>[4]</sup> 对 III 型裂纹面上的电边界条件的提法进行了精确的考虑, 侯密山等<sup>[5]</sup> 进一步讨论了界面上的反平面裂纹问题. 对此类动态问题, Dascalu 等<sup>[6]</sup>、陈增涛等<sup>[7]</sup>、Li 等<sup>[8,9]</sup> 和 Li 等<sup>[10]</sup> 都分别作了相应的研究.

由于材料的边界效应, 实际工程中更为感兴趣的是有限宽的无限带形压电陶瓷的分析. 最近, Shindo 等<sup>[11]</sup> 研究了无限带形压电陶瓷中的反平面裂纹问题. 使用的方法是将所讨论的问题化为一个第二类 Fredholm 积分方程, 从而给出它的近似解. 然而, 对此类问题, 如果能获得它的封闭形式解, 毫无疑问, 这不仅在理论上而且在工程上都具有重要意义. 本文讨论有限宽的无限带形压电陶瓷中的 III 型裂纹问题, 利用对偶积分方程理论, 获得裂纹线上电弹性场的封闭表达式及相关量的强度因子的明显表达式.

## 1 基本方程及问题的提出

考虑一个宽度为  $2h$  的无限长的压电陶瓷带形. 在其中心处有一平行于边界表面的长度为  $2a$  的 Griffith 裂纹 (如图 1). 记  $x_3$  (或  $z$ ) 方向为压电陶瓷的极化方向, 与之垂直的平面 (即  $ox_1x_2$  或  $oxy$  平面) 为各向同性面. 在线性电弹性理论的框架下, 其本构方程为

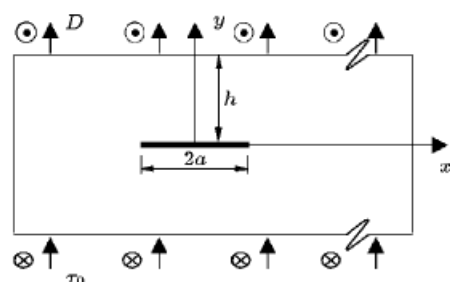


图 1 受反平面剪应力及电场作用的含裂纹的压电带形

Fig.1 A cracked piezoelectric strip subjected to anti-plane stress and electric field

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijkl}s_{kl} - e_{lij}E_l \\ D_i &= \varepsilon_{il}E_l + e_{ikl}s_{kl} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中  $C_{ijkl}$ ,  $\varepsilon_{il}$  和  $e_{lij}$  分别为压电陶瓷的弹性常数, 介电常数和压电常数;  $\sigma_{ij}$  和  $D_i$  分别为应力分量和电位移分量,  $s_{kl}$  和  $E_l$  分别为应变分量和电场强度分量, 它们可由弹性位移分量  $u_i$  和电势  $\phi$  确定, 即

$$\left. \begin{aligned} s_{ij} &= (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) / 2 \\ E_i &= -\partial \phi / \partial x_i \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

由于我们在本文中所研究的问题是反平面变形问题(即沿极化方向的纵向剪切问题), 因而在这种情况下, 所有电弹性场中的物理量均可通过反平面位移  $u_3(x, y)$  和平面内电势  $\phi(x, y)$  这两个量来决定, 即对此问题我们有

$$s_{11} = s_{22} = s_{33} = s_{12} = 0, \quad E_3 = 0 \quad (3)$$

及

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xz} &= c_{44}\partial u_3 / \partial x + e_{15}\partial \phi / \partial x, & \sigma_{yz} &= c_{44}\partial u_3 / \partial y + e_{15}\partial \phi / \partial y \\ D_x &= -\varepsilon_{11}\partial \phi / \partial x + e_{15}\partial u_3 / \partial x, & D_y &= -\varepsilon_{11}\partial \phi / \partial y + e_{15}\partial u_3 / \partial y \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

于是, 由力的平衡方程和电荷平衡方程得到反平面位移  $u_3(x, y)$  和平面内电势  $\phi(x, y)$  满足下列控制微分方程

$$\left. \begin{aligned} c_{44}\nabla^2 u_3 + e_{15}\nabla^2 \phi &= 0 \\ e_{15}\nabla^2 \phi - \varepsilon_{11}\nabla^2 u_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

对一般的压电陶瓷, 有  $c_{44}\varepsilon_{11} + e_{15}^2 \neq 0^{[2]}$ , 所以, 上面的方程可简化为两个独立的调和方程

$$\nabla^2 u_3 = 0, \quad \nabla^2 \phi = 0 \quad (6)$$

下面, 考虑压电陶瓷在其边界表面上受四种组合的机电载荷作用, 分别记为问题 A 到问题 D:

问题 A: 受反平面剪应力和平面内电场作用, 即

$$\sigma_{yz}(x, \pm h) = \tau_0(x), \quad D_y(x, \pm h) = D_0(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (7)$$

问题 B: 两个刚性电极板钳夹住压电陶瓷板的边界, 并沿极化方向有一反平面位移, 即

$$u_3(x, \pm h) = \pm w_0(x), \quad \phi(x, \pm h) = \mp \phi_0(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (8)$$

问题 C: 受反平面剪应力作用, 及板边界面上电势为已知, 即

$$\sigma_{yz}(x, \pm h) = \tau_0(x), \quad \phi(x, \pm h) = \mp \phi_0(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (9)$$

问题 D: 受平面内电场作用, 及板边界为钳夹固连的, 且有一反平面位移, 即

$$u_3(x, \pm h) = \pm w_0(x), \quad D_y(x, \pm h) = D_0(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (10)$$

为了方便起见, 以下的讨论均假设  $\tau_0(x)$ ,  $D_0(x)$ ,  $w_0(x)$  和  $\phi_0(x)$  为偶函数. 在裂纹面上有以下应力边界条件

$$\sigma_{yz}(x, 0) = 0, \quad |x| < a \quad (11)$$

另一方面, 电位移的法向分量和电场强度的切向分量沿裂纹面上应是连续的, 即

$$D_y(x, 0^\pm) = D_y^c(x, 0^\pm), \quad E_x(x, 0^\pm) = E_x^c(x, 0^\pm), \quad |x| < a \quad (12)$$

其中  $D_y^c$ ,  $E_x^c$  分别表示裂纹内空气介质的电位移法向分量和电场强度切向分量. 此类裂纹一般称为电渗透型裂纹. 对于无厚度的线裂纹来说, 由于我们考虑的裂纹位于带形板的正中央, 因此由对称性, 从式 (12) 可以进一步得到下面的电边界条件<sup>[3~5,11]</sup>

$$E_x(x, 0) = 0, \quad |x| < a \quad (13)$$

此外, 对称性也给出裂纹线上还应满足下列边界条件

$$u_3(x, 0) = 0, \quad \phi(x, 0) = 0, \quad |x| > a \quad (14)$$

## 2 问题的求解

为了求得方程 (6) 在上述各边界条件下的解, 从上面的分析可知只需对上半带形压电陶瓷体进行讨论即可. 下面, 为了以下书写方便起见, 引如下列记号

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= (u_3, \phi)^T, \quad \mathbf{T}_y = (\sigma_{yz}, D_y)^T, \quad \mathbf{C}_0(x) = (a_0(x), b_0(x))^T \\ \mathbf{H}_1(y\xi) &= (\sinh(y\xi), \cosh(y\xi))^T, \quad \mathbf{H}_2(y\xi) = (\cosh(y\xi), \sinh(y\xi))^T \\ \mathbf{M}(\xi) &= \begin{pmatrix} A_1(\xi) & A_2(\xi) \\ B_1(\xi) & B_2(\xi) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} c_{44} & e_{15} \\ e_{15} & -\varepsilon_{11} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

其中上标 T 表示矩阵的转置. 由方程 (6), 我们可取  $u_3(x, y)$  和  $\phi(x, y)$  为下列形式

$$\mathbf{W}(x, y) = \int_0^\infty \mathbf{M}(\xi) \mathbf{H}_2(y\xi) \cos(x\xi) d\xi + y \mathbf{C}_0(x) \quad (15)$$

其中,  $\mathbf{C}_0(x)$  为变量  $x$  的未知函数,  $\mathbf{M}(\xi)$  中的  $A_1(\xi)$ ,  $A_2(\xi)$ ,  $B_1(\xi)$  和  $B_2(\xi)$  为变量  $\xi$  的未知函数, 它们均由给定的具体边界条件决定.

这时, 与之相应的反平面剪应力和平面内电场可由关系式 (4) 给出. 尤其, 我们有

$$\mathbf{T}_y(x, y) = \int_0^\infty \xi \mathbf{K} \mathbf{M}(\xi) \mathbf{H}_1(y\xi) \cos(x\xi) d\xi + \mathbf{K} \mathbf{C}_0(x) \quad (16)$$

下面我们将对问题 A 到问题 D 分别予以讨论.

1) 问题 A 的解: 在这种情况下, 由边界条件 (7) 以及式 (11), (13) 和式 (14) 经过一些简单的运算, 我们可以确定

$$\mathbf{C}_0(x) = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{T}_0(x), \quad B_2(\xi) = B_1(\xi) = 0, \quad A_2(\xi) = -A_1(\xi) \tanh(h\xi) \quad (17)$$

其中  $\mathbf{K}^{-1}$  表示  $\mathbf{K}$  的逆矩阵,  $\mathbf{T}_0(x) = (\tau_0(x) \ D_0(x))^T$ , 函数  $A_1(\xi)$  满足下列对偶积分方程

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty \xi A_1(\xi) \tanh(h\xi) \cos(x\xi) d\xi &= \tau_0(x)/c_{44}, & 0 \leq x < a \\ \int_0^\infty A_1(\xi) \cos(x\xi) d\xi &= 0, & x > a \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

利用文献 [12] 中介绍的方法, 我们获得方程 (18) 的解为

$$A_1(\xi) = \xi^{-1} \int_0^a \varphi(t) \sin(t\xi) dt \quad (19)$$

其中

$$\varphi(t) = \frac{-2b \sinh(2bt)}{\pi^2 c_{44} [\sinh^2(ba) - \sinh^2(bt)]^{1/2}} \int_0^a \frac{\tau_0(s) [\sinh^2(ba) - \sinh^2(bs)]^{1/2}}{\sinh^2(bs) - \sinh^2(bt)} ds, \quad 0 < t < a \quad (20)$$

这里及在后文中, 我们记  $b = \pi/(2h)$ .

由此, 容易计算出裂纹线上的反平面剪应力、应变及电位移和电场强度. 它们分别为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{yz}(x, 0) &= \tau_0(x) - m(x), & \gamma_{yz}(x, 0) &= \frac{\varepsilon_{11} \tau_0(x) + e_{15} D_0(x)}{c_{44} \varepsilon_{11} + e_{15}^2} - \frac{1}{c_{44}} m(x) \\ D_y(x, 0) &= D_0(x) - \frac{e_{15}}{c_{44}} m(x), & E_y(x, 0) &= \frac{c_{44} D_0(x) - e_{15} \tau_0(x)}{c_{44} \varepsilon_{11} + e_{15}^2} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

其中  $\gamma_{yz} = \partial w / \partial y$  和

$$m(x) = \frac{b \sinh(2bx)}{\pi [\sinh^2(bx) - \sinh^2(ba)]^{1/2}} \int_0^a \frac{\tau_0(s) [\sinh^2(ba) - \sinh^2(bs)]^{1/2}}{\sinh^2(bs) - \sinh^2(bx)} ds, \quad x > a \quad (22)$$

实际应用时, 感兴趣的常常是  $\tau_0(x) = \tau_0, D_0(x) = D_0$  的情况, 此时, 我们仅需算出函数  $m(x)$  即可, 即

$$m(x) = \frac{\tau_0 \sinh(2bx)}{\pi \cosh(ba) [\sinh^2(bx) - \sinh^2(ba)]^{1/2}} [\Pi(\alpha, \beta) - F(\beta)], \quad x > a \quad (23)$$

其中  $F(\beta) = K(\tanh(ba))$ ,  $\Pi(\alpha, \beta) = \Pi\left(\frac{\sinh^2(ba)}{\sinh^2(bx) - \sinh^2(ba)}, \tanh(ba)\right)$  分别表示第一类和第三类完全椭圆积分. 进一步可以得到这些量的强度因子, 它们是

$$\begin{aligned} (K_{\text{III}}^\sigma, K_{\text{III}}^\gamma, K_{\text{III}}^D, K_{\text{III}}^E) &= \lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{2\pi(x-a)} (\sigma_{yz}(x, 0), \gamma_{yz}(x, 0), D_y(x, 0), E_y(x, 0)) = \\ &= \left(1, \frac{1}{c_{44}}, \frac{e_{15}}{c_{44}}, 0\right) \cdot 2\tau_0 \sqrt{\frac{a}{\pi}} \sqrt{\frac{2h}{\pi a} \tanh \frac{\pi a}{2h}} K\left(\tanh \frac{\pi a}{2h}\right) \end{aligned} \quad (24)$$

2) 问题 B 的解: 这时, 从边界条件 (8) 以及式 (11), (13) 和式 (14), 我们发现

$$C_0(x) = (w_0(x)/h - \phi_0(x)/h)^T, \quad B_2(\xi) = B_1(\xi) = 0, \quad A_2(\xi) = -A_1(\xi)\coth(h\xi) \quad (25)$$

其中函数  $A_1(\xi)$  满足下列对偶积分方程

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty \xi A_1(\xi)\coth(h\xi)\cos(x\xi)d\xi &= \frac{c_{44}w_0(x) - e_{15}\phi_0(x)}{hc_{44}}, & 0 \leq x < a \\ \int_0^\infty A_1(\xi)\cos(x\xi)d\xi &= 0, & x > a \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

类似于上面的分析, 可以给出它的一般解. 特别, 对于  $w_0(x) = w_0$ ,  $\phi_0(x) = \phi_0$  的情况, 方程 (26) 的解为

$$A_1(\xi) = \frac{2[c_{44}w_0 - e_{15}\phi_0]}{\pi hc_{44}\xi} \int_0^a \frac{\sinh(bt)\sin(t\xi)}{[\sinh^2(ba) - \sinh^2(bt)]^{1/2}} dt \quad (27)$$

由此, 容易计算出裂纹线上的反平面剪应力、应变及电位移和电场强度. 它们是

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{yz}(x, 0) &= \frac{c_{44}w_0 - e_{15}\phi_0}{h}n(x), & \gamma_{yz}(x, 0) &= \frac{e_{15}\phi_0}{hc_{44}} + \frac{c_{44}w_0 - e_{15}\phi_0}{hc_{44}}n(x) \\ D_y(x, 0) &= \frac{(c_{44}\varepsilon_{11} + e_{15}^2)\phi_0}{hc_{44}} + \frac{e_{15}(c_{44}w_0 - e_{15}\phi_0)}{hc_{44}}n(x), & E_y(x, 0) &= \frac{\phi_0}{h} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

其中

$$n(x) = \frac{\sinh(bx)}{[\sinh^2(bx) - \sinh^2(ba)]^{1/2}}, \quad x > a \quad (29)$$

这些量在裂纹尖端处对应的强度因子分别为

$$(K_{III}^\sigma, K_{III}^\gamma, K_{III}^D, K_{III}^E) = \left(1, \frac{1}{c_{44}}, \frac{e_{15}}{c_{44}}, 0\right) \cdot \frac{c_{44}w_0 - e_{15}\phi_0}{h} \sqrt{\pi a} \sqrt{\frac{2h}{\pi a} \tanh \frac{\pi a}{2h}} \quad (30)$$

3) 问题 C 的解: 对这种情况, 由边界条件 (9) 以及式 (11), (13) 和式 (14), 我们得到

$$\left. \begin{aligned} C_0(x) &= \left( \frac{h\tau_0(x) + e_{15}\phi_0(x)}{hc_{44}}, -\frac{\phi_0(x)}{h} \right)^T \\ B_2(\xi) &= B_1(\xi) = 0, & A_2(\xi) &= -A_1(\xi)\tanh(h\xi) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

其中函数  $A_1(\xi)$  满足对偶积分方程

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty \xi A_1(\xi)\tanh(h\xi)\cos(x\xi)d\xi &= \tau_0(x)/c_{44}, & 0 \leq x < a \\ \int_0^\infty A_1(\xi)\cos(x\xi)d\xi &= 0, & x > a \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

比较式 (32) 和式 (18), 显然, 这两个方程是一致的. 因此, 利用前面的结果, 我们可得到这种情况下的解. 对于  $\tau_0(x) = \tau_0$ ,  $\phi_0(x) = \phi_0$  的特殊情况, 我们有以下解答

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{yz}(x, 0) &= \tau_0 - m(x), & \gamma_{yz}(x, 0) &= \frac{h\tau_0 + e_{15}\phi_0}{hc_{44}} - \frac{1}{c_{44}}m(x) \\ D_y(x, 0) &= \frac{c_{44}\varepsilon_{11} + e_{15}^2}{hc_{44}}\phi_0 + \frac{e_{15}}{c_{44}}\tau_0 - \frac{e_{15}}{c_{44}}m(x), & E_y(x, 0) &= \frac{\phi_0}{h} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

其中  $m(x)$  由式 (23) 给出. 这种情况下相应量的强度因子仍由式 (24) 给出.

4) 问题 D 的解: 由边界条件 (10) 以及式 (11), (13) 和式 (14), 我们得到

$$\left. \begin{aligned} C_0(x) &= \left( \frac{w_0(x)}{h}, -\frac{hD_0(x) - e_{15}w_0(x)}{h\varepsilon_{11}} \right)^T \\ B_2(\xi) &= B_1(\xi) = 0, \quad A_2(\xi) = -A_1(\xi)\coth(h\xi) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

其中函数  $A_1(\xi)$  满足下列对偶积分方程

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty \xi A_1(\xi)\coth(h\xi)\cos(x\xi)d\xi &= \frac{(c_{44}\varepsilon_{11} + e_{15}^2)}{hc_{44}\varepsilon_{11}}w_0(x) - \frac{e_{15}}{c_{44}\varepsilon_{11}}D_0(x), \quad 0 \leq x < a \\ \int_0^\infty A_1(\xi)\cos(x\xi)d\xi &= 0, \quad x > a \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

类似于情况 B 的讨论, 对于  $w_0(x) = w_0, D_0(x) = D_0$  的特殊情况, 最后可得电弹性解为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{yz}(x, 0) &= \frac{e_{15}^2}{h\varepsilon_{11}}w_0 + \left[ \frac{(c_{44}\varepsilon_{11} + e_{15}^2)}{h\varepsilon_{11}}w_0 - \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}D_0 \right] n(x) \\ \gamma_{yz}(x, 0) &= -\frac{e_{15}^2}{hc_{44}\varepsilon_{11}}w_0 + \frac{e_{15}}{c_{44}\varepsilon_{11}}D_0 + \frac{1}{c_{44}} \left[ \frac{(c_{44}\varepsilon_{11} + e_{15}^2)}{h\varepsilon_{11}}w_0 - \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}D_0 \right] n(x) \\ D_y(x, 0) &= \frac{hD_0 - e_{15}w_0}{h} + \frac{e_{15}^2}{c_{44}\varepsilon_{11}}D_0 + \frac{e_{15}}{c_{44}} \left[ \frac{(c_{44}\varepsilon_{11} + e_{15}^2)}{h\varepsilon_{11}}w_0 - \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}D_0 \right] n(x) \\ E_y(x, 0) &= \frac{hD_0 - e_{15}w_0}{h\varepsilon_{11}} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

其中  $n(x)$  由式 (29) 给出. 这些量在裂纹尖端处对应的强度因子分别为

$$(K_{III}^\sigma, K_{III}^\gamma, K_{III}^D, K_{III}^E) = \left( 1, \frac{1}{c_{44}}, \frac{e_{15}}{c_{44}}, 0 \right) \cdot \left[ \frac{(c_{44}\varepsilon_{11} + e_{15}^2)}{h\varepsilon_{11}}w_0 - \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}D_0 \right] \sqrt{\pi a} \sqrt{\frac{2h}{\pi a} \tanh \frac{\pi a}{2h}} \quad (37)$$

### 3 结果和讨论

上面给出的四种情况的解答可以看出, 电场强度因子总是零, 这表明电场强度在裂纹尖端处是非奇异的, 而电位移分量具有平方根奇异性, 此奇异性来源于压电陶瓷的机电耦合特性, 其强度因子与应力强度因子成正比关系,  $K_{III}^D = e_{15}K_{III}^\sigma/c_{44}$ , 而对弹性场而言, 应变强度因子与应力强度因子则满足:  $K_{III}^\gamma = K_{III}^\sigma/c_{44}$ , 这些结论与文献 [4,11] 中的结论完全一致. 然而, 对于应力强度因子, 文献 [11] 仅给出了它的数值结果, 这里我们对四种情况都获得了精确的解析结果. 并且, 当  $h \rightarrow \infty$  时, 上面的结果将退化为无限平面内的反平面线裂纹问题的解 [4].

对于给定的四种边界条件而言, 计算结果表明其能量释放率  $G_{III}^{[1]}$  和机械应变能释放率  $G_{III}^{M[13]}$  是一致的, 它们都可表示为

$$G_{III} = \frac{1}{2}K_{III}^\sigma K_{III}^\gamma = \frac{1}{2c_{44}}(K_{III}^\sigma)^2 \quad (38)$$

从问题 A 和问题 C 的结论易知, 其对应的强度因子与能量释放率的形式没有改变, 表明它们只与给定的应力有关, 而与其它量无关. 而对给定位移的问题 B 和问题 D 而言, 公式 (30) 和 (37) 表明强度因子与能量释放率还依赖于电场或电位移.

作为例子, 考虑 PZT-5H 压电陶瓷板的中心处有一平行于边界的长度为  $2a = 0.02\text{ m}$  的Ⅲ型穿透裂纹, 有关的材料常数为  $c_{44} = 3.53 \times 10^{10}\text{ N/m}^2$ ,  $e_{15} = 17.0\text{ C/m}^2$ ,  $\varepsilon_{11} = 151 \times 10^{-10}\text{ C/Vm}$ ,  $G_{cr} = 5.0\text{ N/m}^{[11]}$ , 这里,  $G_{cr}$  为临界能量释放率. 在图 2 中, 我们给出了规范应力强度因子  $K_{III}^\sigma/K_{III}^\sigma(\infty)$  和规范能量释放率  $G_{III}/G_{III}(\infty)$  随比率  $h/a$  的变化规律, 它们都随着  $h/a$  的增加而减少, 这里,  $K_{III}^\sigma(\infty)$  和  $G_{III}(\infty)$  分别表示当  $h \rightarrow \infty$  时的应力强度因子和能量释放率. 显然, 当  $h \rightarrow \infty$  时  $K_{III}^\sigma/K_{III}^\sigma(\infty)$  和  $G_{III}/G_{III}(\infty)$  分别趋近于 1. 事实上, 若  $h = 3a$  时, 它们与 1 的误差仅分别为 2.2% 和 4.4%. 而当  $h \rightarrow 0$  时, 它们都趋近于无穷大. 对于  $w_0/h = 9.5 \times 10^{-5}$  的问题 B, 图 3 给出了  $G_{III}/G_{cr}$  与电场强度  $E_y = \phi_0/h$  的依赖关系. 而图 4 则是对  $w_0/h = 6.2 \times 10^{-5}$  的问题 D 给出的  $G_{III}/G_{cr}$  与电位移  $D_y$  的函数关系.

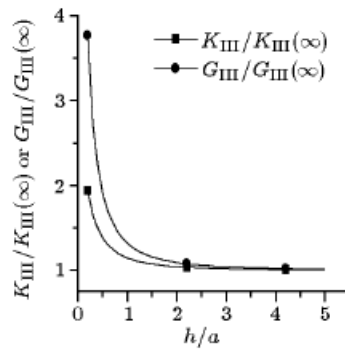


图 2  $K_{III}/K_{III}(\infty)$  和  $G_{III}/G_{III}(\infty)$  随  $h/a$  的变化关系

Fig.2 Variations of  $K_{III}/K_{III}(\infty)$  and  $G_{III}/G_{III}(\infty)$  with the ratio  $h/a$

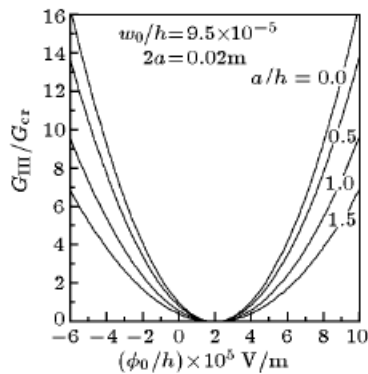


图 3 PZT-5H 压电陶瓷板的规范能量释放率随电场的变化  
Fig.3 Variations of normalized energy release rate of PZT-5H with applied electric field

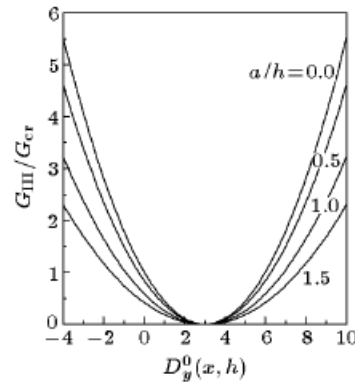


图 4 PZT-5H 压电陶瓷板规范能量释放率随电位的变化  
Fig.4 Variations of normalized energy release rate of PZT-5H with applied electric displacement

### 4 结 论

本文主要考虑了在边界上受四种机电组合载荷情况下, 压电陶瓷带形中的反平面裂纹问题. 利用积分变换和对偶积分方程, 获得了它的封闭解析解. 对在边界上受均匀载荷的特殊情况, 我们给出了裂纹线上电弹性场的明显解析表达式, 及裂纹尖端处一些量的强度因子和能量释放率. 与已知近似解比较, 本文结果是精确的.

## 参 考 文 献

- 1 Pak YE. Crack extension force in a piezoelectric material. *J Appl Mech*, 1990, 57: 647~653
- 2 Li SP et al. Stress and electric displacement distribution near Griffith's type III crack tips in piezoceramics. *Mater Lett*, 1990, 10: 219~222
- 3 Dunn ML. The effects of crack face boundary conditions on the fracture mechanics of piezoelectric solids. *Eng Frac Mech*, 1994, 48: 25~39
- 4 Zhang TY, Tong P. Fracture mechanics for mode III crack in a piezoelectric material. *Int J Solids Structures*, 1996, 33: 343~359
- 5 侯密山, 梅甫良. 不同压电材料反平面应变状态下的电渗透型界面裂纹. 科学通报, 1998, 43: 216~221 (Hou Mishan, Mei Fuliang. Permeable interfacial crack between two dissimilar piezoelectric materials for antiplane strain. *Chin Sci Bull*, 1998, 43: 216~221(in Chinese))
- 6 Dascalu C, Maugin GA. On the dynamic fracture of piezoelectric materials. *Quart J Mech Appl Math*, 1995, 48: 237~255
- 7 陈增涛, 余寿文. 反平面冲击下压电介质的裂纹尖端场. 科学通报, 1997, 42: 1413~1427 (Chen Zengtao, Yu Shouwen. Crack-tip field in a piezoelectric medium subjected to antiplane impacts. *Chin Sci Bull*, 1997, 42: 1413~1427(in Chinese))
- 8 Li SF, Mataga PA. Dynamic crack propagation in piezoelectric materials——Part I. electrode solution. *J Mech Phys Solids*, 1996, 44: 1799~1830
- 9 Li SF, Mataga PA. Dynamic crack propagation in piezoelectric materials——Part II. vacuum solution. *J Mech Phys Solids*, 1996, 44: 1830~1866
- 10 Li XF, Fan TY, Wu XF. A moving mode-III crack at the interface between two dissimilar piezoelectric materials. *Int J Eng Sci*, 2000, 38: 1219~1234
- 11 Shindo Y et al. Singular stress and electric fields of a piezoelectric ceramic strip with a finite crack under longitudinal shear. *Acta Mech*, 1997, 120: 31~45
- 12 Singh BM, Moodie TB, Haddow JB. Closed-form solutions for finite length crack moving in a strip under anti-plane shear stress. *Acta Mech*, 1981, 38: 99~109
- 13 Park S, Sun CT. Fracture criteria for piezoelectric ceramics. *J Am Ceram Soc*, 1995, 78: 1475~1480

## AN EXACT ANALYTICAL SOLUTION FOR A MODE-III CRACK IN A PIEZOELECTRIC STRIP

Li Xianfang Fan Tianyou\*

(College of Science, Hunan Normal University, Changsha 410081, China)

\*(Research Center for Materials Science, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

**Abstract** The problem involving a mode-III crack in a piezoelectric ceramic strip of infinite length is analyzed in this paper. A mode-III crack is assumed to be situated at the mid-plane of this strip in the  $xy$ -plane, where the  $xy$ -plane is the isotropic plane of the piezoelectric ceramic and the  $z$ -axis is the polarizing direction. The situation that the strip is subjected to four cases of combined electromechanical loadings at the boundary surfaces is mainly considered. Making use of the integral transform technique, by introducing an auxiliary function the mixed boundary value problems are converted into a system of simultaneous dual integral equations for the auxiliary



function. With the aid of the known results of dual integral equations, the exact analytic expressions for the electric and elastic fields along the crack line are obtained. Moreover, the formulae for calculating the stress intensity factors strain, and electric displacement, and the energy release rate near the crack tip are given in explicit form. The obtained results reveal that the stress intensity factor and the energy release rate are independent of electric loadings for a piezoelectric strip of stress-free boundary, but they depend on both mechanical loadings and electric loadings for a piezoelectric strip of clamped boundary. Also, the energy release rate is identical to the mechanical strain energy release rate, which implies that these two important parameters characterizing the driving force of a crack from different standpoints in the fracture mechanics of piezoelectric materials agree with each other for the problem considered in this paper. As compared with existing numerical solutions, the present results are given in closed-form and the solutions are exact.

**Key words** piezoelectric ceramics, infinite strip, electroelastic field, mode-III crack, exact analytical solution