第 34 卷 第 5 期 力 学 学 报 Vol. 34, No. 5
2002 年 9 月 ACTA MECHANICA SINICA Sep., 2002

双频内共振系统的 Normal Form 及其简化 1)

吴志强 陈予恕
(天津大学力学系，天津 300072)

摘要 讨论双频内共振系统的 Normal Form 及其降维问题. 利用发展的 Normal Form 直接方法，导出了任意双频内共振系统 Normal Form 的一般形式. 指出 Poincaré 共振项分为内共振项和非内共振性两类，并定义了内共振项的阶. 提出了一种普遍适用的降维变换，并证明了该变换可将任意双频内共振系统的 Normal Form 方程降到 3 维. 应用举例表明，该变换不仅适用于半单问题，也适于非半单问题 (即强 1:1 内共振系统).

关键词 Normal Form ，内共振，降维约化

引 言

多自由度非线性系统的内共振动力学是非线性动力学理论研究的重要课题之一. 中心流形定理告诉我们系统的动力学行为的分岔、混沌及复杂程度取决于其中心流形上的动力学方程. 而非线性模态理论的最新发展 [1~3] ，则表明中心流形上的动力学行为可能由其内部维数更低的不变流形上的动力学来确定. 由此可知，较少数目的多自由度系统的动力学的研究，是认识复杂系统动力学的基础和必由之路.

目前为止，人们对单自由度非线性系统已经作了大量的研究，揭示了许多非线性系统共有的现象. 尽管如此，仍然有值得探讨的问题. 比如，研究单自由度系统的共振问题时，不管用那种摄动方法 [4~6] ，在求解分岔问题时都要用平方求和消去相位的办法，这样得到的分岔方程必定具有 Z^2 对称性. 这种处理方法的局限性在于最多只能处理共振重数为 2 的情况.

在两自由度系统的非线性研究当中，已经有不少结果. 基本上都是采用引入相位差的办法，将四维的平均方程转化为三维方程，然后在此基础上分析系统的动力学行为. 而 Langford 和 Zhan[7] 在研究强 1:1 内共振系统的分岔问题时，采用了另一种降维的方法，即引入变换

$$\rho = |z_1|^2, \qquad \rho(u+\mathrm{i}v) = \bar{z}_1 z_2$$

将四维为微分方程化成关于 ρ, u, v 的三维微分方程. 受他们的启发，陈予恕等 [8] 在研究 1:2 内共振系统的分岔时，采用了变换

$$\rho = |z_1|^2, \qquad \frac{1}{\rho}(u+\mathrm{i}v) = \frac{z_2}{z_1^2}$$

达到了同样的目的. 由于在任意内共振系统的分岔研究中，都会遇到上述降维问题. 因此，上述变换能否推广到一般的内共振系统，是一个非常值得讨论的问题.

2000–08–14 收到第一稿， 2002–06–11 收到修改稿.
1) 国家自然科学基金 (19990510) 、国家重点基础研究专项经费 (G1998020316) 和天津市自然科学基金 (013604711) 资助.

本文的主要目的就是讨论双频任意内共振系统的 Normal Form 及其简化问题. 首先用作者在文献 [1] 提出的 Normal Form 直接方法导出双频内共振系统 Normal Form 的一般形式. 然后提出并证明：存在通用的非线性变换，将双频任意内共振系统的 Normal Form 降维到三维. 节 3 中给出例子表明：该方法不仅适于半单内共振还适于非半单内共振 (即强 1:1 内共振)；单自由度多重共振激励非线性系统的周期解分岔是双变量分岔问题，因而人们对此类系统的了解还远未达到全面.

1　双频内共振系统 Normal Form 及其简化

本节首先推导出任意自治非线性常微分方程的双频内共振 Normal Form 的一般形式，进而提出并证明一种通用的降维变换. 为分析各 Poincaré 共振项的作用，将其分成两类：非内共振项和内共振项，并定义了内共振项的阶.

对非线性自治常微分方程

$$\dot{x} = Ax + f(x)\,, \qquad x \in R^n \tag{1}$$

其中 $f(0)=0$. 作者的研究 [1] 表明利用变换

$$x = Tu + H(u) = Tu + \sum_{|m|\geq 2} H_m u^m \tag{2}$$

可得到式 (1) 的 Normal Form

$$\dot{u} = Ju + C(u) \tag{3}$$

其中 J 是由 A 的所有 l 个零实部特征根组成的 Jordan 标准形矩阵，T 是由这些零实部特征根的特征向量依序组成的 $n \times l$ 列阵，$C(u)$ 代表 Poincaré 共振项且 $C(0)=0$，而变换式 (2) 的非线性部分应满足的偏微分方程是

$$DH \cdot Ju - AH = f(x) - DH \cdot C - TC \tag{4}$$

一般而言，无法求得该方程的解析解，只能逐次求得其级数形式的近似解. 若引入如下的记号

$$f(Tu + H(u)) - DH \cdot C = \sum_{|m|\geq 2} \hat{f}_m u^m \tag{5}$$

$$C(u) = \sum_{|m|\geq 2} C_m u^m \tag{6}$$

则对半单分岔问题 ($\boldsymbol{J}$ 是对角阵)，通过比较同类项的系数，可得系数满足的关系式为

$$A_0 H_m = \hat{f}_m - TC_m \tag{7}$$

其中 $A_0 = \langle m, \lambda\rangle I - A$. 若 m 是非共振的，即对所有 $j=1,2,\cdots,l$, $\langle m,\lambda\rangle - \lambda_j \neq 0$ 都成立，则 $C_m = 0$, $H_m = A_0^{-1}\hat{f}_m$；若 m 是共振的，即存在 $j \in \{1,2,\cdots,l\}$ 使得 $\langle m,\lambda\rangle - \lambda_j = 0$ 成立. 我们在文献 [1] 中，给出了方程 (7) 详细的解法. 由于本文主要关心的是 Normal Form 的形式，具体的求解过程此处不再赘述.

下面我们分析双频内共振的一般形式. 不失一般性, 令 $\lambda_1 = \mathrm{i}\omega_1, \lambda_2 = \mathrm{i}\omega_2$, 并假定两频率之间的关系为

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{p}{q} \tag{8}$$

即

$$q\omega_1 - p\omega_2 = 0 \tag{9}$$

此处 p, q 为互质整数. 于是 Poincaré 共振条件 $\langle m, \lambda\rangle - \lambda_j = 0$ 简化为

$$(n_1\omega_1 + n_2\omega_2 - \omega_j) = 0 \tag{10}$$

其中 $n_j = m_j - m_{j+2}(j = 1, 2)$. 求解式 (10) 得:

当 $j = 1$ 时有

$$n_1 = 1, \qquad n_2 = 0 \tag{11}$$

或

$$n_1 = -qk + 1, \qquad n_2 = pk \qquad (k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots) \tag{12}$$

当 $j = 2$ 时有

$$n_1 = 0, \qquad n_2 = 1 \tag{13}$$

或

$$n_1 = qk, \qquad n_2 = -pk + 1 \qquad (k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots) \tag{14}$$

由此可写出双频内共振系统的 Normal Form 的一般形式为

$$\left.\begin{aligned}
\dot{z}_1 = {} & \mathrm{i}p\omega z_1 + f_1(z_1\bar{z}_1, z_2\bar{z}_2)z_1 + \sum_{k=1} g_{1R,k}(z_1\bar{z}_1, z_2\bar{z}_2)\bar{z}_1^{qk-1}z_2^{pk} + \\
& \sum_{k=1} \tilde{g}_{1R,k}(z_1\bar{z}_1, z_2\bar{z}_2)z_1^{qk+1}\bar{z}_2^{pk} \\
\dot{z}_2 = {} & \mathrm{i}q\omega z_2 + f_2(z_1\bar{z}_1, z_2\bar{z}_2)z_2 + \sum_{k=1} g_{2R,k}(z_1\bar{z}_1, z_2\bar{z}_2)z_1^{qk}\bar{z}_2^{pk-1} + \\
& \sum_{k=1} \tilde{g}_{2R,k}(z_1\bar{z}_1, z_2\bar{z}_2)\bar{z}_1^{qk}z_2^{pk+1}
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

其中 $f_j, g_{jR,k}, \tilde{g}_{jR,k}(j = 1, 2)$ 为复函数, 与原系统的结构参数有关. 该两方程右端的前两项为非内共振项, 分别由关系 (11), (13) 确定; 后两项为内共振项, 分别由关系 (12), (14) 确定, 并且称其中的 k 为内共振项的阶.

下面讨论能否将文献 [7] 的变换推广, 以解决双频任意内共振系统的 Normal Form 的降维问题. 为此, 引入如下变换

$$z_1 = \rho\exp(\mathrm{i}\omega_1\theta), \qquad z_2 = (u + \mathrm{i}v)\exp(\mathrm{i}\omega_2\theta) \tag{16}$$

则有

$$\exp(-\mathrm{i}\omega_1\theta)\bar{z}_1^{qk-1}z_2^{pk}=\rho^{qk-1}(u+\mathrm{i}v)^{pk}\exp(\mathrm{i}k\theta(-q\omega_1+p\omega_2))=\rho^{qk-1}(u+\mathrm{i}v)^{pk}$$

$$\exp(-\mathrm{i}\omega_1\theta)z_1^{qk+1}\bar{z}_2^{pk}=\rho^{qk+1}(u-\mathrm{i}v)^{pk}\exp(\mathrm{i}k\theta(q\omega_1-p\omega_2))=\rho^{qk+1}(u-\mathrm{i}v)^{pk}$$

$$\exp(-\mathrm{i}\omega_2\theta)z_1^{qk}\bar{z}_2^{pk-1}=\rho^{qk}(u-\mathrm{i}v)^{pk-1}\exp(\mathrm{i}k\theta(q\omega_1-p\omega_2))=\rho^{qk}(u-\mathrm{i}v)^{pk-1}$$

$$\exp(-\mathrm{i}\omega_2\theta)\bar{z}_1^{qk}z_2^{pk+1}=\rho^{qk}(u+\mathrm{i}v)^{pk+1}\exp(\mathrm{i}k\theta(-q\omega_1+p\omega_2))=\rho^{qk}(u+\mathrm{i}v)^{pk+1}$$

将变换式 (16) 代入式 (15)，同时在方程两端分别乘以 $\exp(-\mathrm{i}\omega_j\theta)(j=1,2)$, 整理可得

$$\dot{\rho}+\mathrm{i}\omega_1\rho\dot{\theta}=G_1(\rho,u,v) \tag{17}$$

$$\dot{u}+\mathrm{i}\dot{v}+\mathrm{i}\omega_2(u+\mathrm{i}v)\dot{\theta}=G_2(\rho,u,v) \tag{18}$$

其中

$$G_1(\rho,u,v)=\lambda_1\rho+f_1(\rho^2,u^2+v^2)\rho+\sum_{k=1}g_{1R,k}(\rho^2,u^2+v^2)\rho^{qk-1}(u+\mathrm{i}v)^{pk}+\sum_{k=1}\tilde{g}_{1R,k}(\rho^2,u^2+v^2)\rho^{qk+1}(u-\mathrm{i}v)^{pk} \tag{19}$$

$$G_2(\rho,u,v)=\lambda_2(u+\mathrm{i}v)+f_2(\rho^2,u^2+v^2)(u+\mathrm{i}v)+\sum_{k=1}g_{2R,k}(\rho^2,u^2+v^2)\rho^{qk-1}(u+\mathrm{i}v)^{pk}+\sum_{k=1}\tilde{g}_{2R,k}(\rho^2,u^2+v^2)\rho^{qk+1}(u-\mathrm{i}v)^{pk} \tag{20}$$

由于上述两方程组的右端中，不显含 θ，因此在变换式 (16) 的作用下，已将 θ 的变化与其它变量解耦

$$\left.\begin{aligned}\dot{\rho}&=\mathrm{Re}(G_1(\rho,u,v))\\ \dot{u}&=\mathrm{Re}(G_2(\rho,u,v))+\frac{\omega_2 v}{\rho\omega_1}\mathrm{Im}(G_1(\rho,u,v))\\ \dot{v}&=\mathrm{Im}(G_2(\rho,u,v))-\frac{\omega_2 u}{\rho\omega_1}\mathrm{Im}(G_1(\rho,u,v))\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

$$\dot{\theta}=\frac{1}{\rho\omega_1}\mathrm{Im}(G_1(\rho,u,v)) \tag{22}$$

由于 θ 代表 z_1 的相位的变化，与稳定性无关. 因此可利用方程 (21) 来研究内共振系统的动力学行为. 这样我们就证明了如下结论：对任何自治双频内共振系统，均可经过通用的变换式 (16)，简化成三维的动力学系统.

2 应用举例

本节分别以多频激励单自由度系统、 2:3 内共振系统、强 1:1 内共振系统为例说明上述方法的可行性.

例 1 多频共振激励单自由度系统

考虑受参数激励的单自由度非线性系统

$$\ddot{x}+\omega^2x=f(x,\dot{x},\cos(2\omega t),\sin(2\omega t)) \tag{23}$$

用 Normal Form 方法讨论此类系统的分岔时，往往采取复化、增维的方法．即令

$$z_1 = x - \mathrm{i}\frac{\dot{x}}{\omega}, \qquad \bar{z}_1 = x + \mathrm{i}\frac{\dot{x}}{\omega}$$

$$z_2 = \exp(\mathrm{i}2\omega t), \qquad \bar{z}_2 = \exp(-\mathrm{i}2\omega t)$$

从而将方程 (23) 化成两自由度的形式

$$\left.\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \mathrm{i}\omega z_1 - \frac{1}{\omega}f\Big(\frac{z_1+\bar{z}_1}{2}, \frac{I\omega(z_1-\bar{z}_1)}{2}, \frac{z_2+\bar{z}_2}{2}, \frac{z_2-\bar{z}_2}{2\mathrm{i}}\Big) \\ \dot{z}_2 &= \mathrm{i}\omega z_2 \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

再根据计算 Normal Form 的方法就可求得式 (24) 的 Normal Form．当系统受双重参数共振激励且 f 满足一定的条件时，其 Normal Form 为

$$\left.\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \mathrm{i}\omega z_1 + (a_1+\mathrm{i}a_2)\bar{z}_1 z_2 + (b_1+\mathrm{i}b_2)\bar{z}_1^3 {z_2}^2 \\ \dot{z}_1 &= 2\mathrm{i}\omega z_2 \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

这里 $\omega_1 = \omega, \omega_2 = 2\omega$, 在变换式 (16) 作用下式 (25) 简化为

$$\left.\begin{aligned} \dot{u} &= a_1\rho u + a_2\rho v + \rho^2(b_1u^3 - 3b_1uv^2 + 3b_2u^2v - b_2v^3) \\ \dot{v} &= a_2\rho u - a_1\rho v + \rho^2(-3b_1u^2v + b_1v^3 + b_2u^3 - 3b_2uv^2) \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

按照通常分析稳态解的思路，令 $\dot{u}=0, \dot{v}=0$ ，则得到稳态解的分岔方程，它是二维的．原因是本例考虑的多重共振的单自由度系统，到目前为止此类系统的研究仍然还比较少．而现有的研究中单自由周期解分岔问题时，分岔方程绝大部分是一维的．从奇异性理论的角度来看，双变量的分岔问题要比单变量分岔问题复杂得多．在此意义上讲，人们对单自由度非线性系统分岔的认识还不全面．

例 2 2:3 内共振系统

$$\dot{z}_1 = 2\mathrm{i}z_1 + (a_1+\mathrm{i}a_2)\bar{z}_1^2 z_2^2, \qquad \dot{z}_2 = 3\mathrm{i}z_2 + (c_1+\mathrm{i}c_2)\bar{z}_1^3 z_2^3 \tag{27}$$

显然有 $\omega_1 = 2, \omega_2 = 3$, 因而根据变换 (16) ，方程 (27) 可化为

$$\left.\begin{aligned} \dot{\rho} &= \rho^2(a_1u^2 - a_1v^2 - 2a_2uv) \\ \dot{u} &= \rho\Big(-\frac{3}{2}a_2v^3 + \frac{3}{2}a_2vu^2 + 3a_1uv^2\Big) + \rho^3(c_1u^3 - 3c_2u^2v - 3c_1uv^2 + c_2v^3) \\ \dot{v} &= 6u + \rho\Big(\frac{3}{2}a_2u^3 + 3a_1u^2v - \frac{3}{2}a_2uv^2\Big) + \rho^3(c_2u^3 + 3c_1u^2v - 3c_2uv^2 - c_1v^3) \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

$$\dot{\theta} = 2 + \rho(2a_1uv + a_2u^2 - a_2v^2) \tag{29}$$

由此可知，对 2:3 内共振系统变换 (16) 是可行的．

例 3 强 1:1 内共振系统

$$\left.\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \mathrm{i}z_1 + (a_1+\mathrm{i}a_2)z_2 + (b_1+\mathrm{i}b_2)z_1^2\bar{z}_2 \\ \dot{z}_2 &= \mathrm{i}z_2 + (c_1+\mathrm{i}c_2)\bar{z}_1^2 z_2^3 \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

显然有 $\omega_1 = 1, \omega_2 = 1$, 因而根据变换 (16)，方程 (30) 可化为

$$\left.\begin{aligned}
\dot{u} &= (v^3c_2 - 3v^2uc_1 - 3vu^2c_2 + u^3c_1)\rho^2 + (-v^2b_1 + vub_2)\rho + \frac{v^2a_1 + vua_2}{\rho} \\
\dot{v} &= (-3v^2uc_2 + 3vu^2c_1 + u^3c_2 - v^3c_1)\rho^2 + (u^2b_2 - vub_1)\rho + 2u + \frac{vua_1 + u^2a_2}{\rho} \\
\dot{\rho} &= (b_1u + b_2v)\rho^2 + a_1u - a_2v
\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

和

$$\dot{\theta} = (-b_1v + b_2u)\rho + 1 + \frac{a_1v + a_2u}{\rho} \tag{32}$$

由此可以看出，尽管我们在节 2 中推导时假定特征根是半单的，但得到的变换 (16) 对非半单内共振系统仍然适用.

3 结 论

内共振系统的动力学是多自由度非线性系统研究的重要方面之一. 受文献 [7,8] 的启发，本文提出了一种可用于任意双频内共振系统的通用降维变换.

首先利用 Normal Form 的方法和 Poincare 共振条件，导出了双频内共振系统 Normal Form 的一般形式. 然后将变换带入到得到的 Normal Form 中，经计算证明，在该变换的作用下，可以将 Normal Form 转化成一个三维的动力学方程.

尽管在推导过程中假定参与内共振两对纯虚根是半单的，但本文例子表明本文提出的变换还可用于非半单的情况 (即强 1:1 内共振系统). 将该变换用于多重共振的单自由度系统时，发现此类系统的分岔实际上是一个双变量分岔问题. 因此即使对单自由度系统，现有关于其分岔的结论还不完整.

另外，还有一个问题值得讨论：本文的变换能否进一步推广到任何类型的内共振系统. 对于该问题的进一步的讨论，本文的思路是可以借鉴的.

致谢 作者感谢陆启韶教授在讨论中给予的指导.

参 考 文 献

1 吴志强. 多自由度非线性系统的非线性模态及 Normal Form 直接方法. [博士学位论文], 天津：天津大学研究生院, 1996 (Wu Zhiqiang. Nonlinear normal modes and Normal Form direct method for multi-degrees of freedom of nonlinear systems. [PhD thesis], Tianjin: Tianjin University, 1996 (in Chinese))

2 Vakakis AF. Nonlinear normal modes (NNMs) and their appllications in vibration theory: an overview. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1997, 11(1): 3~22

3 吴志强, 陈予恕. 非线性模态的分类和新的求解方法. 力学学报, 1996, 28(3): 298~307 (Wu Zhiqiang, Chen Yushu. Classification and new construction methods for nonlinear normal modes. *Acta Mechanica Sinica*, 1996, 28(3): 298~307 (in Chinese))

4 Nayfeh AH, Mook DT. Nonlinear Oscillation. John Wiley & Sons, New York, 1979

5 陈予恕. 非线性振动. 天津：天津科学技术出版社, 1983 (Chen Yushu. Nonlinear Vibration. Tianjin: Tianjin Science and Technology Press, 1983(in Chinese))

6 Chen Yushu, Leung YT. Bifurcation and Chaos in Engineering. London: Springer-Verlag, 1998

7 Langford WF, Zhan K. Dynamics of 1:1 resonance in vortex-induced vibration. *PVP*-Vol. 247

8 Chen Yushu, Yang Caixia, Wu Zhiqiang, et al. 1:2 internal resonance of coupled dynamic system with quadratic and cubic nonlinearities. *Appl Math Mech*, 2001, 22(8): 917~924

NORMAL FORMS AND THEIR SIMPLIFICATION OF NONLINEAR SYSTEMS WITH INTERNAL RESONANCE BETWEEN TWO FREQUENCIES [1)]

Wu Zhiqiang Chen Yushu

(*Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin* 300072, *China*)

Abstract The Normal Forms and their simplification of the nonlinear systems with internal resonance between two frequencies are discussed. By using the method for solving the Normal Form of a nonlinear systems developed by us, the general Normal Form is derived out for the nonlinear systems with an arbitrary kind of internal resonance between two frequencies. To distinguish their effects, the nonlinear terms in Normal Forms are divided into two classes, the non-internal-resonant ones and the internal-resonant ones. It is proved that, under the universal transformation proposed in the paper, the Normal Forms of all the two-frequency-resonant nonlinear system become new dynamical systems of dimension 3. Three application examples, i.e. nonlinear systems of 1 degree of freedom excited by multiple harmonics, 2:3 internally resonant systems and strong 1:1 internally resonant systems, are used to show that the transformation is useful in simplifying the Normal Forms either for semi-simple systems or nonsemi-simple systems.

Key words Normal Form, internal resonance, dimension reduction

Received 14 August 2000, revised 11 June 2002.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (19990510), the National Key Basic Special Fund (G199802316) and the Tianjin Natural Science Foundation(013604711).