

面外剪切下各向异性三相椭圆夹杂中 均匀应力¹⁾

王 旭 沈亚鹏

(西安交通大学工程力学系, 西安 710049)

摘要 论证了只要合适选择中间界面层的弹性常数, 各向异性线弹性固体在远场均匀反平面剪切应力作用下三相椭圆夹杂内椭圆上仍存在均匀应力场. 讨论了内外两椭圆除过其中心相同外无其它任何几何限制条件. 所给出的数值算例显示出该结论的正确性. 该方法为纤维增强复合材料的设计提供了一条新途径.

关键词 各向异性, 反平面剪切, 椭圆夹杂, 均匀应力, 材料本征值

引 言

夹杂(或异相)问题已引起了许多研究者的关注和兴趣. 夹杂可以自然形成, 例如在材料的制备过程中所形成的杂质; 也可以人工合成, 例如近年来兴起的纤维增强复合材料. 对夹杂问题的一个广泛的回顾可见 Mura^[1] 的著作. Eshelby^[2] 最早发现了远场作用均匀应力将会在一个孤立的椭球夹杂体内部造成均匀分布的应力状态. 对于与椭球夹杂体相对应的二维椭圆柱夹杂, Hwu 与 Ting^[3] 得出相似的结论: 即在远场均匀载荷作用下椭圆柱夹杂内部应力仍均匀分布. Gong 与 Meguid^[4] 则考虑了各向同性弹性体在反平面剪切变形下椭圆夹杂问题, 并且他们也得出了与 Hwu 和 Ting 相类似的结论. 上述工作均假定夹杂与周围无限基体理想粘结. Ru 等^[5] 则考虑了各向同性弹性体在反平面剪切变形下三相椭圆夹杂问题; 他们发现只要界面是两个共焦椭圆, 则在远场均匀应力和均匀本征应变作用下内椭圆夹杂体内部仍会保持均匀应力场. 除了研究者的个人兴趣外, 人们如此渴望获得均匀应力场的一个实际原因是夹杂体的损伤主要取决于作用在夹杂体上的最大应力, 而均匀应力场消除了应力的峰值. 从这个意义上讲均匀应力场是最优的.

在 Ru 等的讨论中, 界面层被限制为两个共焦椭圆所形成的环状域. 如果界面为非共焦椭圆, 是否还会存在均匀应力场? 这也正是本文讨论的出发点. 本文的分析表明对于两个给定的椭圆界面, 中间界面层的弹性常数可以根据这两个椭圆的几何参数加以确定从而可以保证椭圆夹杂上的均匀应力状态.

1 基本公式

一均匀的各向异性线弹性固体在反平面剪切变形下的平衡方程及本构方程可表示为^[6]:
平衡方程

$$\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} = 0 \quad (1)$$

2000-11-25 收到第一稿, 2001-04-30 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金(101320101)和西安交通大学博士学位论文基金资助项目.

本构方程

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{31} &= C_{11}w_{,1} + C_{12}w_{,2} \\ \sigma_{32} &= C_{12}w_{,1} + C_{22}w_{,2} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

在方程 (1) 和 (2) 中, σ_{31} 和 σ_{32} 为两个面外剪应力分量; w 为面外位移; C_{11} , C_{12} 和 C_{22} 为弹性常数.

将 (2) 式代入 (1) 式, 可得以下关于 w 的二阶椭圆偏微分方程

$$C_{11}w_{,11} + 2C_{12}w_{,12} + C_{22}w_{,22} = 0 \quad (3)$$

以上方程的通解可取为

$$w = \text{Im} \{f(z_p)\} \quad (4)$$

其中

$$z_p = x + py \quad (5a)$$

$$p = \frac{-C_{12} + i\sqrt{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}}{C_{22}} \quad (5b)$$

并且 p 被称为材料特征值或本征值.

引入应力函数 φ , 使其满足以下关系

$$\sigma_{31} = -\varphi_{,2}, \quad \sigma_{32} = \varphi_{,1} \quad (6)$$

则

$$\varphi = C \text{Re} \{f(z_p)\} \quad (7)$$

其中

$$C = \sqrt{C_{11}C_{22} - C_{12}^2} \quad (8)$$

以上应力和位移边界条件可被统一书写为

$$C^{-1}\varphi + iw = f(z_p) \quad (9)$$

2 存在均匀应力场的可能性

如图 1 所示中间界面层 D_2 与夹杂 D_1 的交界面形成椭圆 L_1 , 该椭圆的长短半轴分别为 a_1 和 b_1 , 不失一般性设其长短半轴分别位于 x 轴和 y 轴上; 中间界面层 D_2 与基体 D_3 的交界面形成椭圆 L_2 , 该椭圆的长短半轴分别为 a_2 和 b_2 , 并且长半轴与正实轴的交角为 θ ($0 \leq \theta < \pi$); 除过 L_1 与 L_2 的中心均在坐标原点外, L_1 的长短半轴与 L_2 的长短半轴间无任何限制条件. 该三相复合系统承受远场均匀机械载荷的作用, 夹杂与界面层、界面层与基体均理想粘结并且夹杂和基体的弹性性质已被确定. 我们以下的任务是能否找到一种中间界面层的弹性性质, 使得夹杂 D_1 上的应力场仍然均匀分布并给出这种均匀分布的应力场.

由于夹杂与基体的弹性性质已知, 则由 (5b) 式可得到椭圆夹杂所对应的材料本征值为 p_1 , 而基体所对应的材料本征值为 p_3 . 虽然中间界面层的弹性性质未知, 分析时首先假定其材料本征值为 p_2 . 在以下分析中全纯函数的下标 i 表示对应于定义域 D_i .

若采用以下一组保角映射函数

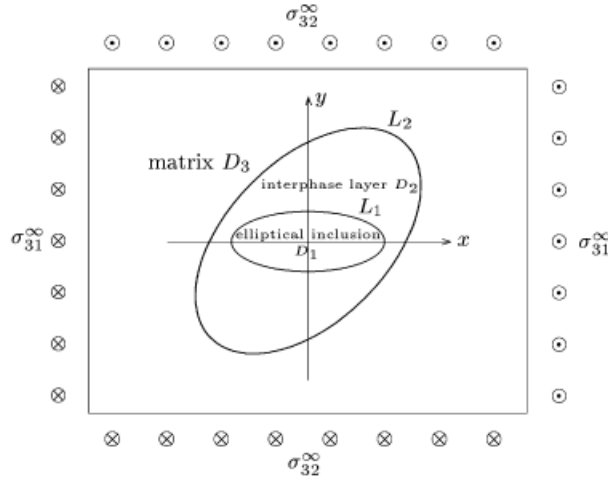


图 1 在远场均匀反平面剪切荷载作用下的三相椭圆夹杂
Fig.1 Three-phase elliptical inclusion in anti-plane shear

$$z_1 = \frac{1}{2} \left\{ (a_1 - ib_1 p_1) \zeta_1 + (a_1 + ib_1 p_1) \frac{1}{\zeta_1} \right\} \quad (10)$$

$$z_2 = \frac{1}{2} \left\{ (a_1 - ib_1 p_2) \zeta_1 + (a_1 + ib_1 p_2) \frac{1}{\zeta_1} \right\} \quad (11)$$

则以上一组映射函数可将夹杂区映射为 ζ_1 -平面上单位圆 $|\zeta_1| = 1$ 以内；而界面层被映射为 ζ_1 -平面上单位圆 $|\zeta_1| = 1$ 以外。

而若采用以下另一组保角映射函数

$$z_2 = \frac{1}{2} \left\{ [(a_2 - ib_2 p_2) \cos \theta + (a_2 p_2 + ib_2) \sin \theta] \zeta_2 + [(a_2 + ib_2 p_2) \cos \theta + (a_2 p_2 - ib_2) \sin \theta] \frac{1}{\zeta_2} \right\} \quad (12)$$

$$z_3 = \frac{1}{2} \left\{ [(a_2 - ib_2 p_3) \cos \theta + (a_2 p_3 + ib_2) \sin \theta] \zeta_2 + [(a_2 + ib_2 p_3) \cos \theta + (a_2 p_3 - ib_2) \sin \theta] \frac{1}{\zeta_2} \right\} \quad (13)$$

则以上一组映射函数可将界面层映射为 ζ_2 -平面上单位圆 $|\zeta_2| = 1$ 以内；而基体区被映射为 ζ_2 -平面上单位圆 $|\zeta_2| = 1$ 以外。

若要获得椭圆夹杂 D_1 上的均匀应力场，则在中间界面层 D_2 上 ζ_1 与 ζ_2 间应存在以下简单的线性比例关系

$$\zeta_1 = \lambda \zeta_2 \quad (14)$$

由 (11) 式和 (12) 式并注意到上式，则可获得以下方程

$$\left. \begin{aligned} (a_1 - ib_1 p_2) \lambda &= (a_2 - ib_2 p_2) \cos \theta + (a_2 p_2 + ib_2) \sin \theta \\ (a_1 + ib_1 p_2) \lambda^{-1} &= (a_2 + ib_2 p_2) \cos \theta + (a_2 p_2 - ib_2) \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

由以上方程可知界面层的材料本征值 p_2 应满足以下二次代数方程

$$(b_2^2 \cos^2 \theta + a_2^2 \sin^2 \theta - b_1^2) p_2^2 + (a_2^2 - b_2^2) \sin(2\theta) p_2 + a_2^2 \cos^2 \theta + b_2^2 \sin^2 \theta - a_1^2 = 0 \quad (16)$$

由以上代数方程可解得满足 $\text{Im}\{p_2\} > 0$ 的一个根 p_2 为

$$p_2 = \frac{(b_2^2 - a_2^2) \sin \theta \cos \theta + i \sqrt{(a_2^2 - a_1^2)(b_2^2 - b_1^2) + (b_2^2 - a_2^2)(a_1^2 - b_1^2) \sin^2 \theta}}{b_2^2 - b_1^2 + (a_2^2 - b_2^2) \sin^2 \theta} \quad (17)$$

并且 (14) 式中出现的比例系数 λ 可由下式获得

$$\lambda = \frac{(a_2 - ib_2 p_2) \cos \theta + (a_2 p_2 + ib_2) \sin \theta}{a_1 - ib_1 p_2} = \frac{a_1 + ib_1 p_2}{(a_2 + ib_2 p_2) \cos \theta + (a_2 p_2 - ib_2) \sin \theta} \quad (18)$$

比较 (17) 式与 (5b) 式可以得到在中间界面层上的弹性常数应满足如下关系

$$\left. \begin{aligned} \frac{C_{12}^{(2)}}{C_{22}^{(2)}} &= \frac{(b_2^2 - a_2^2) \sin \theta \cos \theta}{b_2^2 - b_1^2 + (a_2^2 - b_2^2) \sin^2 \theta} \\ \frac{C_{11}^{(2)}}{C_{22}^{(2)}} &= \frac{(a_2^2 - a_1^2)(b_2^2 - b_1^2) + (b_2^2 - a_2^2)(a_1^2 - b_1^2) \sin^2 \theta + (b_2^2 - a_2^2)^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{[b_2^2 - b_1^2 + (a_2^2 - b_2^2) \sin^2 \theta]^2} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

由 (17) 式和 (19) 式所确定的材料本征值 p_2 以及界面层的弹性常数仅与内外两个椭圆 L_1 和 L_2 的几何参数有关. 若内外两个椭圆满足共焦条件, 即: $a_1^2 - b_1^2 = a_2^2 - b_2^2$, $\theta = 0$, 很明显此时 $p_2 = i$, 而界面层的材料特性为各向同性并满足 $C_{11}^{(2)} = C_{22}^{(2)}$, $C_{12}^{(2)} = 0$. 而这正与 Ru 等^[5] 的分析相符.

下一节我们将会发现若中间界面层的弹性常数满足 (19) 式, 则应力在夹杂上确实呈均匀分布.

3 全场解

在远场作用有均匀载荷 $\sigma_{31}^\infty, \sigma_{32}^\infty$ 时, 当 $z_3 \rightarrow \infty$ 时 $f_3(z_3)$ 具有以下奇异性态

$$f_3(z_3) = K z_3 + O(z_3^{-1}), \quad z_3 \rightarrow \infty \quad (20)$$

其中

$$K = i \frac{C_{22}^{(2)}}{C^2} (\sigma_{31}^\infty + \bar{p}_3 \sigma_{32}^\infty) \quad (21)$$

在映射函数 (13) 式下, 当 $\zeta_2 \rightarrow \infty$ 时 $f_3(\zeta_2)$ 具有以下奇异性态

$$f_3(\zeta_2) = \Pi \zeta_2 + O(\zeta_2^{-1}), \quad \zeta_2 \rightarrow \infty \quad (22)$$

其中

$$\Pi = \frac{1}{2} [(a_2 - ib_2 p_3) \cos \theta + (a_2 p_3 + ib_2) \sin \theta] K \quad (23)$$

为了处理在内界面 L_1 上的连续性条件, 引入如下定义的解析延拓函数

$$\left. \begin{aligned} f_1(\zeta_1) &= \bar{F}_1(1/\zeta_1), \quad 1 < |\zeta_1| < 1/R_c \\ f_2(\zeta_1) &= \bar{F}_2(1/\zeta_1), \quad 1/|\lambda| < |\zeta_1| < 1 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

其中 $R_c = \sqrt{|(a_1 + ib_1 p_1)/(a_1 + ib_1 p_1)|}$.

则在界面 L_1 上面外位移 w 的连续性条件可表示为

$$f_1^+(t_1) - f_1^-(t_1) = f_2^-(t_1) - f_2^+(t_1), \quad |t_1| = 1 \quad (25)$$

由以上方程显见 $f_1(\zeta_1) + f_2(\zeta_1)$ 在圆环域 $\max\{1/|\lambda|, R_c\} < |\zeta_1| < \min\{|\lambda|, 1/R_c\}$ 内解析, 则它可被展为具有如下特殊形式其系数待定的 Laurent 级数

$$f_1(\zeta_1) + f_2(\zeta_1) = A\zeta_1 + \frac{\bar{A}}{\zeta_1}, \quad \max\{1/|\lambda|, R_c\} < |\zeta_1| < \min\{|\lambda|, 1/R_c\} \quad (26)$$

同时界面 L_1 上表面力连续性条件可表示为

$$C_1[f_1^+(t_1) + f_1^-(t_1)] = C_2[f_2^-(t_1) + f_2^+(t_1)], \quad |t_1| = 1 \quad (27)$$

将 (26) 式代入 (27) 式并消去 $f_2^-(t_1)$ 和 $f_2^+(t_1)$, 则可以得到

$$f_1^+(t_1) + f_1^-(t_1) = \delta_1 \left(At_1 + \frac{\bar{A}}{t_1} \right), \quad |t_1| = 1 \quad (28)$$

在以上表达式中 $\delta_1 = \frac{2C_2}{C_1 + C_2}$.

引入如下定义的辅助函数 $\Delta(\zeta_1)$

$$\Delta(\zeta_1) = \begin{cases} f_1(\zeta_1) - \delta_1 A\zeta_1, & R_c < |\zeta_1| < 1 \\ -f_1(\zeta_1) + \delta_1 \frac{\bar{A}}{\zeta_1}, & 1 < |\zeta_1| < 1/R_c \end{cases} \quad (29)$$

由以上定义式显见 $\Delta(\zeta_1)$ 在圆环域 $R_c < |\zeta_1| < 1/R_c$ 解析, 则它在该圆环域内可被展为具有如下特殊形式的系数待定的 Laurent 级数

$$\Delta(\zeta_1) = B\zeta_1 - \frac{\bar{B}}{\zeta_1}, \quad R_c < |\zeta_1| < 1/R_c \quad (30)$$

由 (29) 式和 (30) 式可解得

$$\left. \begin{aligned} f_1(\zeta_1) &= (\delta_1 A + B)\zeta_1 - \frac{\bar{B}}{\zeta_1}, & R_c < |\zeta_1| < 1 \\ f_1(\zeta_1) &= (\delta_1 \bar{A} + \bar{B})\frac{1}{\zeta_1} - B\zeta_1, & 1 < |\zeta_1| < 1/R_c \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

由椭圆夹杂 D_1 上所应满足的解析性条件, 可得到以下代数方程

$$\delta_1 A + B + A\bar{B} = 0 \quad (32)$$

式中 $A = \frac{a_1 - ib_1 p_1}{a_1 + ib_1 p_1}$.

由 (26) 式, (31) 式和 (32) 式可得

$$f_1(\zeta_1) = \frac{-\bar{B}}{a_1 + ib_1 p_1} \left[(a_1 - ib_1 p_1)\zeta_1 + (a_1 + ib_1 p_1)\frac{1}{\zeta_1} \right], \quad R_c < |\zeta_1| < 1 \quad (33)$$

$$f_2(\zeta_1) = (A + B)\zeta_1 + [(1 - \delta_1)\bar{A} - \bar{B}]\frac{1}{\zeta_1}, \quad 1 < |\zeta_1| < |\lambda| \quad (34)$$

由以上 (33) 式和 (34) 式所给出的 $f_1(\zeta_1)$ 和 $f_2(\zeta_1)$ 的表达式已完全满足了界面 L_1 上应力及位移连续性条件以及在夹杂上 $f_1(\zeta_1)$ 的解析条件.

为了处理在外界面 L_2 上的连续性条件, 引入如下定义的解析延拓函数

$$\left. \begin{aligned} f_2(\zeta_2) &= \bar{f}_2(1/\zeta_2), & 1 < |\zeta_2| < |\lambda| \\ f_3(\zeta_2) &= \bar{f}_3(1/\zeta_2), & |\zeta_2| < 1 \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

在界面 L_2 上面外位移 w 的连续性条件可表示为

$$f_2^+(t_2) - f_2^-(t_2) = f_3^-(t_2) - f_3^+(t_2), \quad |t_2| = 1 \quad (36)$$

由以上方程显见 $f_2(\zeta_2) + f_3(\zeta_2)$ 在圆环域 $1/|\lambda| < |\zeta_2| < |\lambda|$ 内解析, 则它可被展为具有如下特殊形式其系数待定的 Laurent 级数

$$f_2(\zeta_2) + f_3(\zeta_2) = D\zeta_2 + \frac{\bar{D}}{\zeta_2}, \quad 1/|\lambda| < |\zeta_2| < |\lambda| \quad (37)$$

同时在界面 L_2 上表面力连续性条件可表示为

$$C_2[f_2^+(t_2) + f_2^-(t_2)] = C_3[f_3^-(t_2) + f_3^+(t_2)], \quad |t_2| = 1 \quad (38)$$

将 (37) 式代入 (38) 式并消去 $f_2^+(t_2)$ 和 $f_2^-(t_2)$, 则可以得到

$$f_3^+(t_2) + f_3^-(t_2) = \delta_2 \left(Dt_2 + \frac{\bar{D}}{t_2} \right), \quad |t_2| = 1 \quad (39)$$

在上式中 $\delta_2 = \frac{2C_2}{C_3 + C_2}$.

注意到 $f_3(\zeta_2)$ 在无穷远点处的奇异性态并由 Plemelj 公式, 可得

$$\left. \begin{aligned} f_3(\zeta_2) &= (\delta_2 D - \Pi)\zeta_2 + \frac{\bar{\Pi}}{\zeta_2}, & |\zeta_2| < 1 \\ f_3(\zeta_2) &= (\delta_2 \bar{D} - \bar{\Pi})\frac{1}{\zeta_2} + \Pi\zeta_2, & |\zeta_2| > 1 \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

将上式代入 (38) 式, 可以求得 $f_2(\zeta_2)$ 在其定义域上的如下表达式

$$f_2(\zeta_2) = [(1 - \delta_2)D + \Pi]\zeta_2 + (\bar{D} - \bar{\Pi})\frac{1}{\zeta_2}, \quad 1/|\lambda| < |\zeta_2| < 1 \quad (41)$$

以上由 (40) 式与 (41) 式所表达的 $f_2(\zeta_2)$ 和 $f_3(\zeta_2)$ 已完全满足了界面 L_2 上应力及位移连续性条件以及 $\zeta_2 \rightarrow \infty$ 时 $f_3(\zeta_2)$ 的奇性条件.

注意到 $\zeta_1 = \lambda\zeta_2$, 并由定义在界面层上全纯函数的协调性条件可得以下关系式

$$(A + B)\lambda\zeta_2 + [(1 - \delta_1)\bar{A} - \bar{B}]\frac{1}{\lambda\zeta_2} = [(1 - \delta_2)D + \Pi]\zeta_2 + (\bar{D} - \bar{\Pi})\frac{1}{\zeta_2}, \quad 1/|\lambda| < |\zeta_2| < 1 \quad (42)$$

比较以上等式中 ζ_2 和 ζ_2^{-1} 的系数, 可得以下两个代数方程

$$\left. \begin{aligned} \lambda(A + B) &= (1 - \delta_2)D + \Pi \\ (1 - \delta_1)A - B &= \bar{\lambda}(D - \bar{\Pi}) \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

联立 (32) 和 (43) 式, 可唯一确定出未知量 A, B, D 及其共轭值 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{D}$ 如下

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ D \\ \bar{A} \\ \bar{B} \\ \bar{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 & 1 & 0 & 0 & A & 0 \\ \lambda & \lambda & 1 - \delta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 - \delta_1 & -1 & -\bar{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{A} & 0 & \delta_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\lambda} & \bar{\lambda} & 1 - \delta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \delta_1 & -1 & -\lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \Pi \\ -\bar{\lambda}\Pi \\ 0 \\ \bar{\Pi} \\ -\lambda\bar{\Pi} \end{bmatrix} \quad (44)$$

至此, 表征夹杂、界面层和基体区应力应变场的全纯函数已完全获得并可列写如下

$$f_1(\zeta_1) = \frac{-\bar{B}}{a_1 + ib_1p_1} \left[(a_1 - ib_1p_1)\zeta_1 + (a_1 + ib_1p_1)\frac{1}{\zeta_1} \right], \quad R_c < |\zeta_1| < 1 \quad (45)$$

$$f_2(\zeta_1) = (A + B)\zeta_1 + [(1 - \delta_1)\bar{A} - \bar{B}]\frac{1}{\zeta_1}, \quad 1 < |\zeta_1| < |\lambda| \quad (46)$$

$$f_3(\zeta_2) = (\delta_2\bar{D} - \bar{\Pi})\frac{1}{\zeta_2} + \Pi\zeta_2, \quad |\zeta_2| > 1 \quad (47)$$

注意到映射函数 (10) 式, 则表达式 (45) 等价于

$$f_1(z_1) = \frac{-2\bar{B}}{a_1 + ib_1p_1}z_1 \quad (48)$$

在上式中 B 可被显式表达为

$$B = \delta_1(2 - \delta_2) \frac{[(\delta_1 - 1)|\lambda|^2 + (1 - \delta_2)]\bar{\lambda}\Pi + A[|\lambda|^2 - (1 - \delta_1)(1 - \delta_2)]\lambda\bar{\Pi}}{[(\delta_1 - 1)|\lambda|^2 + (1 - \delta_2)]^2 - |A|^2[(1 - \delta_1)(1 - \delta_2) - |\lambda|^2]^2} \quad (49)$$

而 (48) 式意味着椭圆夹杂上的应力场和应变场均匀分布, 并且应力的显式表达为

$$\sigma_{32} = -2C_1 \operatorname{Re} \left\{ \frac{\bar{B}}{a_1 + ib_1p_1} \right\}, \quad \sigma_{31} = 2C_1 \operatorname{Re} \left\{ \frac{\bar{B}p_1}{a_1 + ib_1p_1} \right\} \quad (50)$$

本节分析表明当中间层的弹性常数满足 (19) 式时, 我们确实获得了夹杂上均匀分布的应力场. 这个结果初看起来似乎不可思议而同时又是非常美妙的. 在 (19) 式中仍存在一个自由调节量 $C_{22}^{(2)}$, 可以根据需要改变它的大小 (即改变 δ_1 和 δ_2) 从而降低夹杂上的应力值. 在 Ru 的讨论中, 只有当两个椭圆满足共焦条件时才能获得夹杂上的均匀应力分布. 对于任意多层椭圆夹杂而且这些椭圆无任何限制条件, 我们也可以按本文的方法通过选择中间层中的弹性常数而获得夹杂体上的均匀应力分布.

4 算 例

为了验证以上分析的正确性, 本节将给出一个算例.

内椭圆 L_1 的几何参数被取为 $a_1 = 2 \text{ m}$, $b_1 = 1.5 \text{ m}$; 外椭圆 L_2 的几何参数被取为 $a_2 = 4 \text{ m}$, $b_2 = 2 \text{ m}$, $\theta = 45^\circ$; 椭圆夹杂 D_1 的弹性常数被取为 $C_{11}^{(1)} = 30 \text{ GPa}$, $C_{22}^{(1)} = 10 \text{ GPa}$, $C_{12}^{(1)} = 11.5 \text{ GPa}$; 基体 D_3 的弹性常数被取为 $C_{11}^{(3)} = 10 \text{ GPa}$, $C_{22}^{(3)} = 5 \text{ GPa}$, $C_{12}^{(3)} = 0$.

将以上给出的内椭圆 L_1 与外椭圆 L_2 的几何参数代入 (17) 式可确定出中间界面层的材料本征值为 $p_2 = -0.7742 + 0.4181i$, 并由 (19) 式可确定出界面层的弹性常数满足 $C_{12}^{(2)}/C_{22}^{(2)} =$

-0.7742 , $C_{11}^{(2)}/C_{22}^{(2)} = 0.7742$. 假设 $C_{22}^{(2)} = 10$ GPa, 则 $C_{12}^{(2)} = -7.742$ GPa, $C_{11}^{(2)} = 7.742$ GPa. 此三相复合系统承受远场均匀应力 $\sigma_{31}^{\infty} = 10$ GPa, $\sigma_{32}^{\infty} = 0$. 图 2 及图 3 所示为面外位移 w 及应力函数

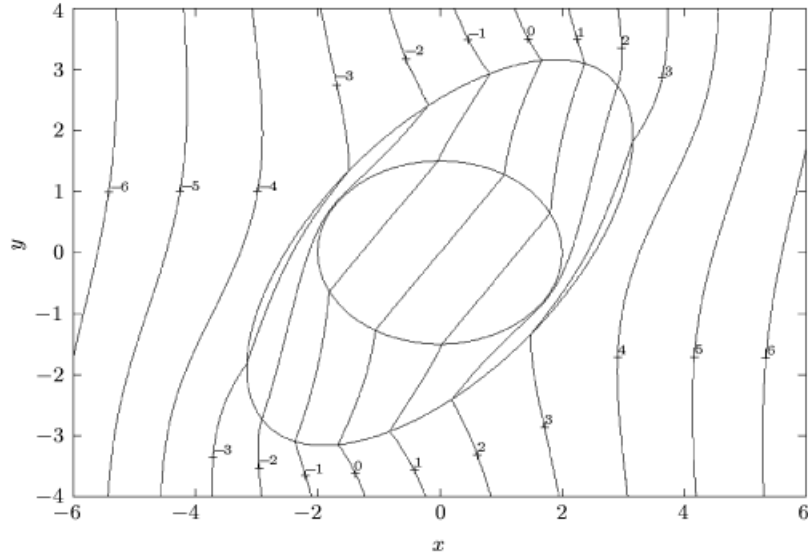


图 2 面外位移 w 等值线图

Fig.2 Contour plots of out-of-plane displacement w

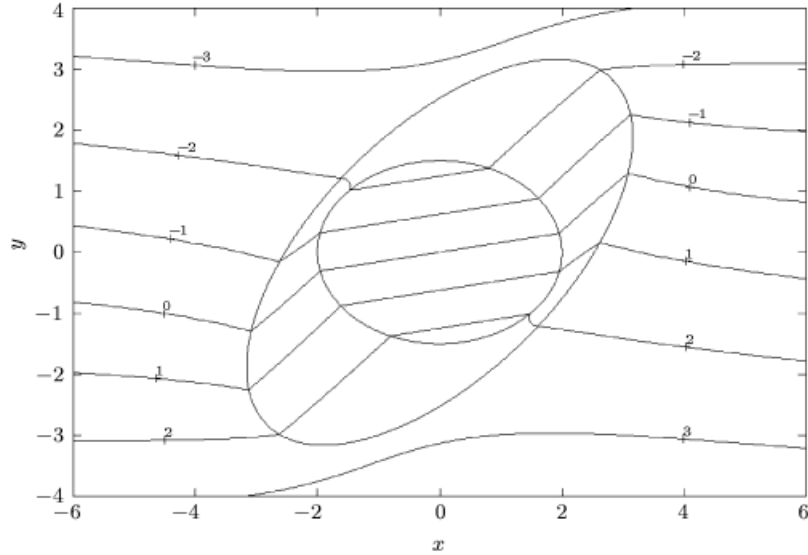


图 3 应力函数 φ 等值线图

Fig.3 Contour plots of stress function φ

数 φ 的等值线图. 由这两张图可见 w 及 φ 在跨越两界面 L_1 和 L_2 时确实连续, 而在椭圆夹杂上 w 及 φ 均是坐标 x 和 y 的线性函数, 这意味着在夹杂上应力场与应变场都呈均匀分布. 图 4 和图 5 所示为两个正则化剪应力分量 $\sigma_{31}/\sigma_{31}^{\infty}$ 和 $\sigma_{32}/\sigma_{31}^{\infty}$ 的等值线图. 由图 4 可见在外椭圆 L_2 的长半轴上基体一侧存在着应力集中; 而在内椭圆 L_1 上界面层一侧也存在应力集中; 同时

在基体上远离夹杂处有 $\sigma_{31} \rightarrow \sigma_{31}^\infty$ 并满足远场条件. 由图 5 可见在内椭圆 L_1 上界面层一侧应力分量 σ_{32} 可以达到较大值而在基体上远离夹杂处有 $\sigma_{32} \rightarrow 0$ 也满足远场条件.

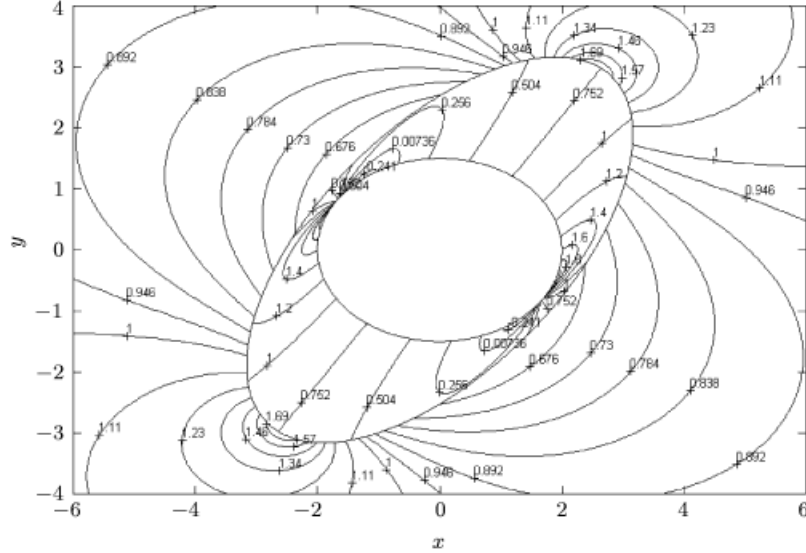


图 4 正则化剪应力分量 $\sigma_{31}/\sigma_{31}^\infty$ 等值线图
Fig.4 Contour plots of stress component $\sigma_{31}/\sigma_{31}^\infty$

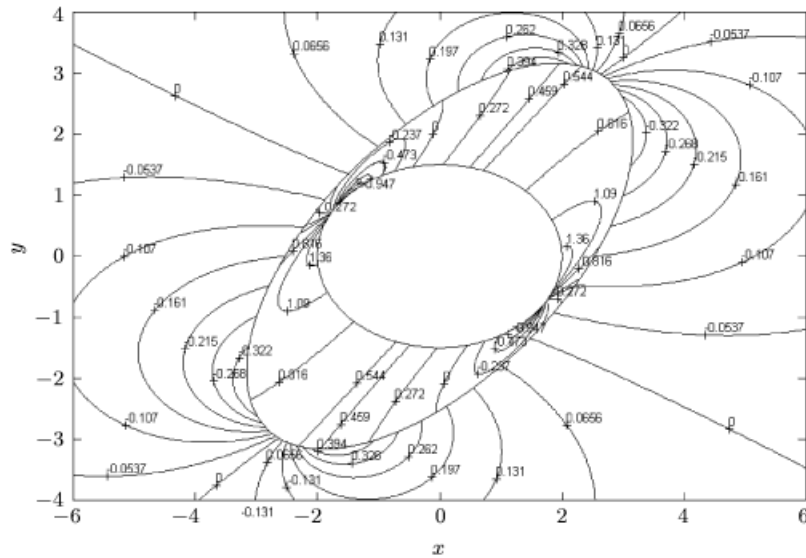


图 5 正则化剪应力分量 $\sigma_{32}/\sigma_{31}^\infty$ 等值线图
Fig.5 Contour plots of stress component $\sigma_{32}/\sigma_{31}^\infty$

5 讨论与结论

本文论证了各向异性线弹性体在反平面剪切变形下三相椭圆夹杂内存在均匀应力的可能性. 本文所给出的求解方法可被看作是弹性力学中的反问题, 即根据系统的响应来确定系统的

参数. 本文所得到的结果无疑比 Ru 等的结果^[5]更广泛, 这主要体现在 1) 将夹杂和基体的各向异性效应考虑进去; 2) 两个椭圆无共焦性限制条件并且它们都可绕坐标原点随意旋转. 本文的讨论仅限于反平面剪切问题, 对于各向异性体的一般二维问题(面内变形与面外变形可能存在耦合性), 可以设想只要取定中间界面层的三个 Stroh 特征值都满足(17)式而同时又保证存在三个独立的 Stroh 特征向量与这个三重特征值相对应, 则在远场均匀载荷作用下椭圆夹杂上仍保持均匀应力状态, 但这时所选定的中间层弹性常数是否能在物理现实中找到有待于更进一步的讨论.

参 考 文 献

- 1 Mura T. *Micromechanics of Defects in Solids*. Boston, Mass: Martinus Nijhoff, 1987
- 2 Eshelby JD. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proc Roy Soc London*, 1957, A241: 376~396
- 3 Hwu C, Ting TCT. Two-dimensional problems of the anisotropic elastic solid with an elliptical inclusion. *Q J Mech Appl Math*, 1989, 42: 553~572
- 4 Gong SX, Meguid SA. A general treatment of the elastic field of an elliptical inhomogeneity under antiplane shear. *ASME J Appl Mech*, 1992, 59: 131~135
- 5 Ru CQ, Schiavone P, Mioduchowski A. Uniformity of stresses within a three-phase elliptic inclusion in anti-plane shear. *J Elasticity*, 1999, 52: 121~128
- 6 Horgan CO. Anti-plane shear deformations in linear and nonlinear solid mechanics. *SIAM Review*, 1995, 37: 53~81

UNIFORMITY OF STRESSES WITHIN A THREE-PHASE ANISOTROPIC ELLIPTIC INCLUSION IN ANTI-PLANE SHEAR¹⁾

Wang Xu Shen Yapeng

(*Department of Engineering Mechanics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China*)

Abstract This investigation proves that a three-phase anisotropic elliptic inclusion under uniform remote stresses in anti-plane shear admits an internal uniform stress field within inner elliptical inclusion provided that constitutive parameters for the interphase layer are properly selected. In comparison with the result obtained by Ru^[5], the inner and the outer ellipses have no other geometrical restrictions except that the two ellipses are concentric; in addition the anisotropic effects for the inner elliptical inclusion and the outer matrix are simultaneously taken into consideration in our discussion. A numerical example is illustrated to verify the correctness of the analysis. The methodology proposed in the present paper provides a novel approach for the design of fiber reinforced composite materials.

Key words anisotropy, anti-plane shear, elliptic inclusion, uniform stresses, material's eigenvalue

Received 25 November 2000, revised 30 April 2001.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10132010) and the Doctorate Foundation of Xian Jiaotong University.