

从光闪烁频谱反演大气湍流谱： 原理与数值模拟

饶瑞中

(中国科学院安徽光学精密机械研究所, 国家 863 计划大气光学重点实验室, 合肥 230031)

摘要 建立了一种数值算法, 从光波在湍流大气中传播的闪烁时间频谱的高频特征反演大气光学湍流谱. 此算法具有两点优越性: (1) 反演出的湍流谱直接表征大气折射率的起伏而非大气温度场的起伏; (2) 可以获得高空间波数、大部分位于耗散区的湍流谱, 而用其它方法不易获得此区域的湍流谱. 对 Hill 湍流谱以及一种复杂的湍流谱进行了大量数值模拟来检验此种算法, 结果表明: 如果知道大气风速与湍流内尺度就可以相当有效地获得湍流谱.

关键词 光传播, 大气湍流, 湍流谱, 反演算法

引 言

湍流大气中光波传播的理论研究与技术应用都牵涉到光波或波前的时间频谱的高频特征, 它们与耗散区的湍流谱特征密切相关. 通常通过测量大气温度场的起伏获取大气光学湍流谱, 而高空间波数、位于耗散区的湍流谱不易获得. 对于光波传播的研究目的而言, 利用光学方法获取光学湍流谱可能更为合适. 事实上, 从光波的时间频谱中可以提取湍流谱的有用信息^[1]. 但此方面的工作尚未开展.

在湍流大气中光波传播的研究中, 平面波、球面波以及高斯光束的时间频谱已得到了不同程度的研究^[1~6]. 相应的结果已在波前补偿系统(如自适应光学)中得到了应用^[7,8]. 最近我们通过数值方法对光波起伏频谱的高频特征进行了研究, 发现当湍流内尺度较大以及风速较小时, 耗散区的湍流谱对光波起伏频谱的高频部分起主要贡献^[6]. 这个结果为我们从光波起伏频谱中提取耗散区的湍流谱提供了理论基础.

本文首先给出光波时间频谱的一些特征, 然后描述一种从光波起伏频谱反演湍流谱的算法. 使用两种不同的湍流谱模型(Hill 湍流谱模型以及一种在 Hill 湍流谱叠加一个高频泵浦的复合谱模型)进行了大量数值模拟来检验此种算法. 将这种算法应用于激光在湍流大气中的闪烁频谱的结果将在后续文章中陈述.

1 湍流大气中的光波时间频谱

对于高 Reynolds 数下的各向同性湍流的温度场, Hill 基于单点温度测量和理论分析提出了一种普适谱模型^[9]. 由于湍流场的温度起伏导致折射率 n 的起伏, 根据 Hill 温度谱模型, 折射率起伏的三维谱密度可以表示为

$$\Phi_n(K) = 0.033C_n^2 K^{-11/3} f(Kl_0) \quad (1)$$

式中 K 是空间波数, C_n^2 是折射率结构常数, l_0 是内尺度. f 是表征高频谱密度偏离幂律的函数, 对于 Kolmogorov 湍流谱, $f = 1$. Frehlich^[10] 将 Hill 谱模型拟合为

$$f(x) = \left(\sum_{n=0}^4 a_n x^n \right) \exp(-\delta x) \quad (2)$$

式中 $a_0 = 1, a_1 = 0.70937, a_2 = 2.8235, a_3 = -0.28086, a_4 = 0.08277, \delta = 1.1090$. 相对于 Kolmogorov 谱, Hill 谱的最显著特征是在 $Kl_0 = 1$ 处出现的突起, 它表明湍流耗散区的出现. Tatarskii 等^[11] 从理论上论证了这种特征的存在.

当湍流 Prandtl 数 $Pr \gg 1$ 耗散区的温度谱正比于 K^{-1} , 而当 $Pr \ll 1$ 时正比于 $K^{-17/3}$. 然而对于 $Pr \sim 1$ (对大气 $Pr \sim 0.71$) 的情况, 尚未有显式表达式, 但大致具有幂函数下降趋势^[12].

在均匀湍流路径上传播的球面波的对数振幅 χ 的时间频谱为^[4]

$$W_\chi(f) = 8\pi^2 k^2 \int_0^L dz \int_{2\pi f/v}^\infty dK \frac{K \Phi_n(K)}{\sqrt{(Kv)^2 - (2\pi f)^2}} \left\{ 1 - \cos \left[\frac{K^2 z(L-z)}{kL} \right] \right\} \quad (3)$$

式中 $k = 2\pi/\lambda$ 是光波波数, v 是风速, L 是传播距离, f 是时间频率. 上式先对变量 z 积分后可得下式

$$W_\chi(f) = 8\pi^2 k^2 L \int_{2\pi f/v}^\infty \frac{[1 - I(K)] K \Phi_n(K)}{\sqrt{(Kv)^2 - (2\pi f)^2}} dK \quad (4)$$

式中 $I(K) = [\cos(p)C(q) + \sin(p)S(q)]/q$, $q = K\sqrt{L\lambda}/(2\pi)$, $p = \pi q^2/2$, C 和 S 为 Fresnel 余弦与正弦积分. 由于式 (4) 的积分上限为无穷大, 为方便数值计算, 引入某一变量变换 $K = g(x)$ 使积分在有限的区间进行, 我们可得

$$W_\chi(f) = 8\pi^2 k^2 L \int_{g^{-1}(2\pi f/v)}^1 \frac{[1 - I(K)] K \Phi_n(K) g'(x)}{\sqrt{(Kv)^2 - (2\pi f)^2}} dx \quad (5)$$

严格的写法应将 K 都应写成变量 x 的显式表达, 为简明起见以及突出 K 的意义, 这里采用了式 (5) 的写法, 后面有关内容, 采用了类似的方式.

光波对数振幅时间频谱一般可由特征频率 $f_0 = v/\sqrt{\lambda L}$ (风速 v 与 Fresnel 尺度 $\sqrt{\lambda L}$ 的比值) 分为两部分. 在频率 $f < f_0$ 的区域内频谱基本为常数, 与湍流谱无关, 不能用来做反演. 当 $f > f_0$ 时频谱呈现负幂律 (对 Kolmogorov 湍流) 或某种更快的下降趋势 (如对 Hill 湍流), 它与湍流谱密切相关, 可用来做反演. 湍流内尺度 l_0 直接影响到光波频谱, 它决定着湍流谱偏离幂律的位置. 内尺度越大, 湍流谱就在越低的波数处偏离幂律. 光波对数振幅时间频谱的一个具体例子如图 1 所示. 计算这个频

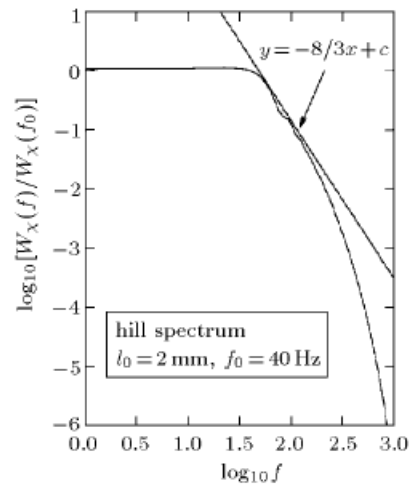


图 1 对应于 Hill 湍流谱的光波对数振幅时间频谱
Fig.1 A wave log-amplitude temporal spectrum evaluated using Hill turbulence model

谱时使用了 Hill 湍流谱, 具体参数都列于图中.

2 反演算法

我们使用公式 (5) 作为反演的基础, 这是一个有关第一类 Volterra 积分方程的反演问题. 与第一类 Fredholm 积分方程的反演问题不同, 目前尚无可靠通用的算法^[13].

只要高于特征频率 f_0 的频率区域的光波频谱才能被用来反演, 但在 f_0 附近频谱变化比较缓慢, 在实验所能获得的最高频率附近的频谱要受噪声的影响, 所以要选择一段合适的频率区间 $[f_{\min}, f_{\max}]$. 由于光波频谱大体上呈幂律趋势, 在对数频率上均匀选择数据点比较合适. 我们选择一种均匀步长、任意权重的数值积分方法来计算式 (5)^[14]. 为便于反演, 将数据按频率从高到低的次序排列. 式 (5) 经离散后变为

$$W_\chi(f_i) = \sum_{j=1}^i w_{ij} \Phi(K_j), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

为实现式 (4) 到式 (5) 的转换, 我们选择了如下变量变换

$$K = C \tanh^{-1}(x) \quad (7)$$

常数因子 C 的选择使得最后一个积分节点的坐标等于用来反演的最高频率值, 因而有

$$C = \frac{2\pi f_{\max}}{v \tanh^{-1}((N-1)/N)} \quad (8)$$

根据式 (6), 我们将从最高频率处一步一步地进行反演. 对于第一步, 应有 $\Phi(K_1) = W_\chi(f_1)/w_{11}$. 然而根据大量数值模拟, 我们发现 $\Phi(K_1) = W_\chi(f_1)/(2w_{11})$ 更为合适. 由于前面的反演误差会带给后面的反演结果, 因而在某些情况下, 反演出的整个湍流谱会出现振荡的现象. 为避免这种情况, 我们将每一步的反演结果与上一步的反演结果进行算术与几何平均, 可以有效地达到目的.

3 数值模拟

我们用一系列不同内尺度的 Hill 湍流谱来产生光波频谱来进行反演数值模拟. 频率区间选择为 $[2f_0, 20f_0]$, 如果 $f_0 = 40$ Hz 则意味着对 $[80, 800]$ Hz 内的光波频谱进行反演. 这个频率区间对应于许多的实际应用, 并且能够在实验中实现. 在产生光波频谱时湍流谱的空间频率上限由 Gaussian 积分的最小节点值确定, 而在更高空间频率上的湍流谱的贡献很小可以忽略不计. 为得到可靠的精度我们使用了 101 个积分节点, 并使用更多的节点数来进行检验. 所有的计算都是在双精度下完成的.

由光波频谱反演的湍流谱示于图 2. 图中实线代表给定的 Hill 湍流谱, 内尺度分别为 1 mm, 2 mm 和 5 mm. 由于使用同样频率区间的数据进行反演, 反演出的湍流谱也位于相同的空间波数区间. 这样, 随着湍流内尺度的增大, 反演出的湍流谱移向耗散区. 反演的湍流谱密度相对于给定谱密度的相对误差示于图 3. 大部分误差小于 10%, 而对于低空间波数处的湍流谱误差则更小. 最大的误差出现在最大的空间波数处, 对应于反演的初始值. 如果我们以谱密度的对数值来考虑相对误差, 它们则更小, 对所有上述几种情况, 在任何空间波数处相对误差都小于 1%.

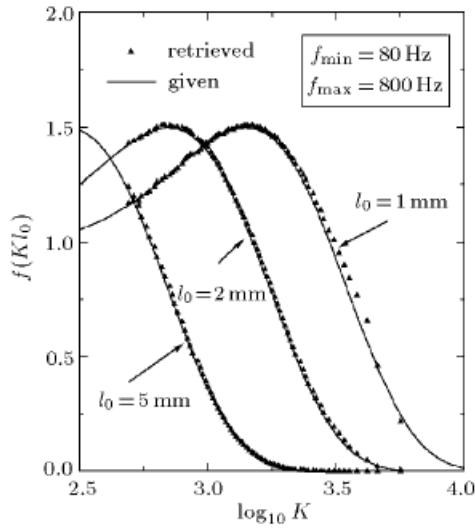


图 2 从内尺度为 1 mm, 2 mm, 和 5 mm 的 Hill 湍流模型反演的湍流谱

Fig.2 Turbulence spectra retrieved from Hill turbulence model with three inner scales 1 mm, 2 mm, and 5 mm

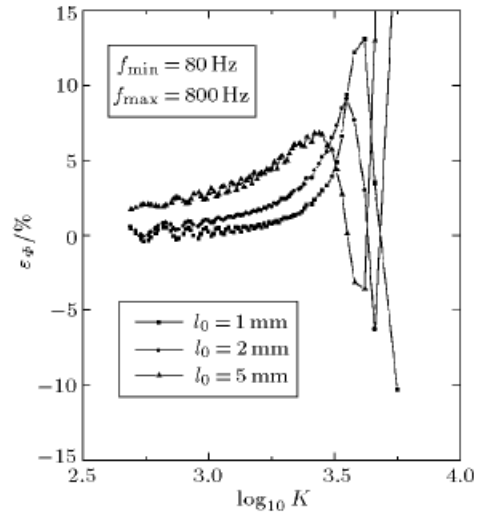


图 3 对应于图 2 的湍流谱密度反演值相对于给定值的相对误差

Fig.3 Relative errors of the retrieved turbulence spectra corresponding to the cases in Fig.2

我们定义反演误差为反演出的所有空间波数处的湍流谱 (谱密度或其对数) 的相对误差的均方根. 对于在同样的时间频率范围 [80,800]Hz 反演出的具有不同内尺度 l_0 的湍流谱, 反演误差随湍流内尺度的变化关系如图 4 所示. 图中上面的一条曲线代表湍流谱密度的相对误差 ϵ_ϕ , 下面的一条曲线代表湍流谱密度的对数值的相对误差 $\epsilon_{\ln \phi}$. 这两条曲线的趋势相同, 但在数值上有很大差别. 对于湍流谱密度, 当湍流内尺度 l_0 较小时 (小于 4mm) 反演误差 ϵ_ϕ 较小, 但随着 l_0 的增大, ϵ_ϕ 迅速增大. 这是由于光波频谱密度随频率增大而减低的趋势对大 l_0 比小 l_0 更显著. 在某个特定频率上, 大 l_0 的光波频谱密度远小于小 l_0 的光波频谱密度, 因而带来更大的反演误差. 另一方面, 即使 l_0 很大, 湍流谱密度对数值的相对误差 $\epsilon_{\ln \phi}$ 一般也很小 (小于 1%). 因为湍流谱密度一般具有幂律变化趋势, $\epsilon_{\ln \phi}$ 作为反演结果的判据比 ϵ_ϕ 更合适. 这样, 我们可以合理地认为本文提出的反演算法是可行的, 频率区间的选择也是合适的.

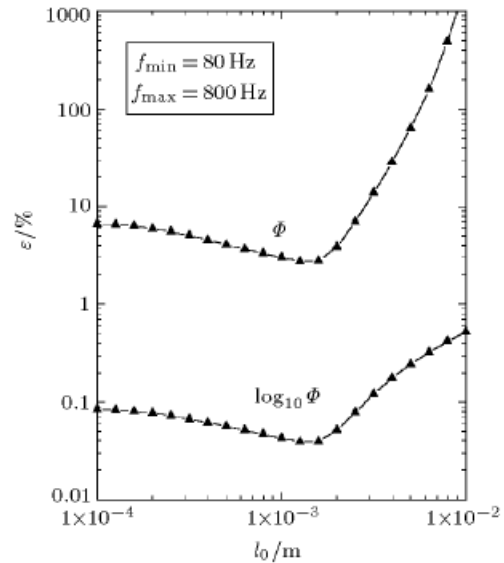


图 4 湍流谱反演误差随内尺度的变化: 上面曲线代表湍流谱密度的反演误差, 下面曲线代表湍流谱密度的对数值的反演误差

Fig.4 Residual errors of turbulence spectra with different inner scales. Upper is for the spectrum density, the lower is for logarithm of the spectrum density

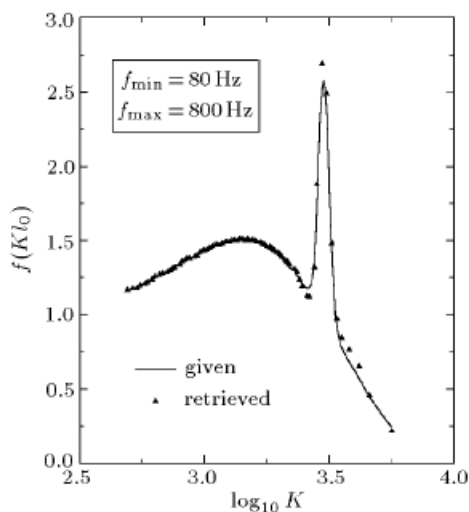


图 5 复杂湍流谱的反演: 给定的湍流谱由内尺度 $l_0=1$ mm 的 Hill 谱和一个位于高空间波数处的峰值叠加构成

Fig.5 The retrieval of a complicated turbulence spectrum. The given spectrum is a composition of a Hill turbulence model with $l_0 = 1$ mm plus a peak

如果反演选择的频率区间相对于特征频率 f_0 是固定的, 那么对于一定的湍流内尺度 l_0 , 反演误差也是固定的而与 f_0 无关. 当 f_0 降低时反演频率区间随之移向低频区域, 反演出的湍流谱也将位于较低的空间波数范围.

上述结果是针对 Hill 湍流谱的, 这种湍流谱随空间波数的变化比较平滑. 而实际上可能存在比较复杂的湍流谱. 例如, 在一些传播条件下, 我们发现在光波频谱的高频部分出现异常的泵浦峰, 这种泵浦峰可能也出现在湍流谱上. 为了检验本算法的一般适用性, 我们针对高频出现泵浦峰的各种不同的湍流谱 (不同的峰值位置、强度和宽度) 的情况进行数值模拟.

反演的结果也与给定的湍流谱很好地符合. 一个反演的例子如图 5 所示. 图中实线代表给定的湍流谱, 它是由内尺度 $l_0 = 1$ mm 的 Hill 谱和一个位于高空间波数处的泵浦峰叠加构成. 即使在泵浦附近, 反演误差也不大. 这些结果进一步验证了本算法对一般复杂湍流谱的适用性.

4 讨 论

从光波在湍流大气中传播的闪烁时间频谱的高频特征, 反演大气光学湍流谱的数值算法得到了 Hill 湍流谱和另一种复杂的湍流谱的数值模拟验证, 证明它可适用于一般具有复杂形式的湍流谱. 数值模拟结果显示: 只要风速与湍流内尺度已知, 就可以有效地获得湍流谱. 只是在实验所能达到的最高频率处, 由于数据样本数太少而出现比较大的误差.

将本算法运用于实验数据的处理尚存在着另外要考虑的一些问题. 包括具有起伏特征的光波频谱的光滑与抽样、高频率处噪声的去除、风速与湍流内尺度的确定等. 这些问题将在后续有关实验数据处理的文章中讨论.

参 考 文 献

- 1 Ishimaru A. Wave Propagation and Scattering in Random Media. New York: IEEE and Oxford University, 1997
- 2 Tatarski VI. Wave Propagating in a Turbulent Atmosphere. Moscow: Nauka, 1967
- 3 Lawrence RS, Strohbehn JW. A survey of clear-air propagation effects relevant to optical communications. In: Proc IEEE, 1970, 58(10): 1523~1545
- 4 Clifford SF. Temporal-frequency spectra for a spherical wave propagating through atmospheric turbulence. *J Opt Soc Am*, 1971, 61(10): 1285~1292
- 5 Andrews LC, Phillips RL. Laser Beam Propagation Through Random Media. Bellingham: SPIE, 1998
- 6 Rao R, Wang S, Liu X, et al. Turbulence spectrum effect on wave temporal-frequency spectra for light propagating through the atmosphere. *J Opt Soc Am*, 1999, A16(11): 2755~2762

- 7 Greenwood DP, Fried DL. Power spectra requirements for wave-front-compensative systems. *J Opt Soc Am*, 1976, 66(3): 193~206
- 8 Whiteley MR, Roggemann MC, Welsh BM. Temporal properties of the Zernike expansion coefficients of turbulence-induced phase aberrations for aperture and source motion. *J Opt Soc Am*, 1998, A15(4): 993~1005
- 9 Hill RJ, Clifford SF. Modified spectrum of atmospheric temperature fluctuations and its application to optical propagation. *J Opt Soc Am*, 1978, 68(6): 892~899
- 10 Frehlich R. Laser scintillation measurements of the temperature spectrum in the atmospheric surface layer. *J Atmos Sci*, 1992; 49(16): 1494~1509
- 11 Tatarskii VI, Dubovikov MM, Praskovsky AA, et al. Temperature fluctuation spectrum in the dissipation range for statistically isotropic turbulent flow. *J Fluid Mech*, 1978, 238: 683~698
- 12 Monin AS, Yaglom AM. *Statistical Fluid Mechanics*, Vol 2. New York: MIT Press, 1975
- 13 Kirsch A. *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*. New York: Springer-Verlag, 1996
- 14 Press WH, Teukolsky SA, Vetterling WT, et al. *Numerical Recipes*, New York: Cambridge University, 1996

RETRIEVAL OF TURBULENCE SPECTRUM FROM TEMPORAL SPECTRUM OF A LIGHT WAVE PROPAGATING THROUGH ATMOSPHERE: PRINCIPLE AND SIMULATIONS

Rao Ruizhong

*(Laboratory for Atmospheric Optics, Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics,
The Chinese Academy of Sciences, Hefei 230031, China)*

Abstract A numerical algorithm is set up for the retrieval of optical turbulence spectrum from high-frequency temporal spectra of a light wave propagating through a turbulent atmosphere. This technique has two advantages. First, the retrieved spectrum is directly related to the refractive index fluctuation rather than temperature fluctuation. Second, the turbulence spectrum at rather high spatial wavenumber, most in the dissipation range, can be retrieved. We test the retrieval procedure through carrying out a lot of simulations with Hill turbulence model and a composed model. It is found that if the wind velocity and the turbulence inner scale are known correctly the turbulence spectrum can be achieved effectively.

Key words light propagation, atmospheric turbulence, turbulence spectrum, retrieval algorithm