

横观各向同性含液饱和多孔介质中瑞利波的特性分析¹⁾

刘凯欣* 刘颖*†

* (北京大学力学与工程科学系, 北京 100871) † (山东理工大学机械系, 淄博 255000)

摘要 基于 Biot 的孔隙介质理论研究了横观各向同性含液饱和多孔介质中瑞利波的传播特性. 考虑介质内的流体特性及固体颗粒的可压缩性, 导出了广义瑞利波的三维复特征方程, 给出了瑞利波的存在条件. 并且, 通过数值计算讨论了横观各向同性含液饱和多孔介质中的瑞利波波速、质点的运动轨迹和频散特性, 以及流体黏度对瑞利波传播特性的影响.

关键词 瑞利波, 黏度耗散, 横观各向同性, 液体饱和多孔介质

引 言

瑞利波在地震中造成的危害是巨大的. 对于地质材料, 由于其微观结构上的孔隙、微裂纹以及裂纹中流体和气体的存在, 一般作为各向异性的多孔多相变形介质进行模型化. 因而, 澄清瑞利波在各向异性饱和多孔介质中的传播特性, 必将在建筑结构防震及地震波勘探等实际工程领域得到重要的应用.

Biot^[1] 建立了各向异性多孔介质的波动方程, 但未对波的特性进行研究. Jones^[2] 研究了各向同性饱和土中的瑞利波问题, 但在建立特征方程时, 压缩波势函数中只考虑了一种压缩波, 因而势函数不是问题的通解, 导致特征方程有误. Tajuddin^[3] 针对各向同性饱和土建立了考虑两种压缩波的瑞利波特征方程, 但没有讨论流体黏性的影响. 1991 年 Sharma 和 Gogna^[4] 对横观各向同性饱和多孔介质中表面波的传播进行了研究, 但所给出的瑞利波方程的解的形式不能反映各向异性饱和多孔介质中方程可能出现复根的情况. 1997 年, 汪越胜^[5] 等详细分析了横观各向同性饱和多孔介质中平面波的传播特性, 进而研究了瑞利波的生成条件和传播特性, 但是他们的这部分工作也没有讨论流体的黏性效应的影响. 吴世明^[6] 等考虑流体黏性讨论了横观各向同性饱和介质中瑞利波的传播特性, 但是他们忽略了土颗粒的可压缩性, 进而弱化了液体相对瑞利波传播特性的影响.

本文考虑流体的黏性效应和固体颗粒的可压缩性等因素, 基于 Biot 各向异性含液多孔介质理论, 研究了横观各向同性饱和含液多孔介质中瑞利波的传播特性. 首先, 导出了横观各向同性含液饱和多孔介质中广义瑞利波的三维复特征方程, 给出了瑞利波的存在条件. 然后, 计算了横观各向同性饱和多孔介质内瑞利波传播的波速及各子午面内质点的运动轨迹, 并讨论了瑞利波波速与介质材料参数间的关系. 最后, 分析了横观各向同性含液饱和多孔介质中瑞利波的频散特性及流体的黏度对瑞利波传播波速的影响.

1 基本方程

取地深方向为横观各向同性多孔介质的对称轴 z 轴, 沿深度增加方向为正. 根据 Biot^[1] 理论, 横观各向同性含液饱和多孔介质的运动方程为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= \rho \ddot{u}_i + \rho_f \ddot{w}_i \\ -p_{,i} &= \rho_f \ddot{u}_i + m_{ij} \ddot{w}_j + r_{ij} \dot{w}_j \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中 σ_{ij} 为固体骨架中的应力分量, p 为孔隙流体压力, $w_i = -n(u_i - U_i)$ 为流体相对于固体骨架的位移分量, u_i 和 U_i 分别为固体骨架和饱和液体的位移; $\rho = (1 - \phi)\rho_s + \phi\rho_f$ 为固-液混合物的密度, 其中 ρ_s 和 ρ_f 分别为固体骨架和饱和液体的密度. m_{ij} 和 r_{ij} 为 Biot 引进的系数, 均为频率 ω 的函数,

2001-03-18 收到第一稿, 2002-11-15 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助 (19832010, 10025212).

这里, $m_{11} = m_{22} = m_1, m_{33} = m_3, r_{11} = r_{22} = r_1, r_{33} = r_3, m_{ij} = r_{ij} = 0 (i \neq j)$, 其中

$$\left. \begin{aligned} m_i &= \operatorname{Re}[\alpha_i(\omega)]\rho_f/\phi \\ r_i &= \eta/\operatorname{Re}[k_i(\omega)] \end{aligned} \right\} (i = 1, 2, 3) \quad (2)$$

其中 ϕ 为孔隙率, η 为流体的黏度系数, $\alpha_i(\omega)$ 为动态孔隙弯曲度, $k_i(\omega)$ 为相应的动态渗透率, 两者之间的关系为^[7] $\alpha_i(\omega) = i\eta\phi/[k_i(\omega)\omega\rho_f]$. 文中 $i, j = 1, 2, 3$ 分别对应于 x, y, z . 众多的学者对孔隙介质的动态渗透率进行了研究, 并对一些简单形状孔隙给出了解析表达式. 在本文的计算中, 参考文献[7]给出的近似公式, 并将其扩展到横观各向同性

介质, 此时 j 向的动态渗透率可以表示为

$$k_j(\omega) = k_{j0} \left[\left(1 - \frac{4i\alpha_{j\infty}^2 k_{j0}^2 \omega \rho_f}{\eta A_j^2 \phi^2} \right)^{0.5} - \frac{i\alpha_{j\infty} k_{j0} \omega \rho_f}{\eta \phi} \right]^{-1} \quad (3)$$

其中 i 为虚数单位, $\alpha_{j\infty}$ 为 $\omega \rightarrow \infty$ 时的动态弯曲度, k_{j0} 为 $\omega = 0$ 时的渗透率, A_j 为孔隙特征尺寸, 它们均可独立测量. 公式(3)仅依赖于四个易于确定的常量 $\alpha_{j\infty}, k_{j0}, A_j$ 和 ϕ , 并适用于整个频域. 公式(3)的引入, 使得 Biot 的孔隙介质理论在整个频域内有效.

横观各向同性含液饱和多孔介质的本构方程为

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \\ p \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccccccc} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 & M_1 \\ A_{12} & A_{11} & A_{13} & 0 & 0 & 0 & M_1 \\ A_{13} & A_{13} & A_{33} & 0 & 0 & 0 & M_3 \\ 0 & 0 & 0 & 2A_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2A_{66} & 0 \\ M_1 & M_1 & M_3 & 0 & 0 & 0 & M \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{23} \\ e_{31} \\ e_{12} \\ \xi \end{array} \right\} \quad (4)$$

其中 $e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ 为固体骨架的应变分量, $\xi = -w_{i,i}$ 为孔隙流体的体应变分量. 结合 Simon 和 Paul 的理论^[8], 我们可以得到 Biot 系数与固体骨架弹性常数间有如下关系

$$\begin{aligned} A_{mn} &= C_{mn} + \alpha_m \alpha_n M \\ \alpha_1 &= \alpha_2 = 1 - \frac{C_{11} + C_{12} + C_{13}}{3K_s} \\ \alpha_3 &= 1 - \frac{2C_{13} + C_{33}}{3K_s}, \quad \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0 \\ M &= \left(\frac{1-\phi}{K_s} + \frac{\phi}{K_f} - \frac{2C_{11} + C_{33} + 2C_{12} + 4C_{13}}{9K_s^2} \right)^{-1} \\ M_1 &= -M\alpha_1, \quad M_3 = -M\alpha_3 \end{aligned}$$

其中 $C_{mn}(m, n = 1, \dots, 6)$ 为固体骨架的弹性常数, K_s 和 K_f 分别为固体和流体的体积模量.

2 瑞利波的特征方程及波速

考虑到各向异性介质中, 瑞利波的特征方程具有复根的性质, 设瑞利波的解的形式为

$$[u_i, w_i] = [A_i, B_i] \exp ik(x + rz - ct) \quad (5)$$

其中 A_i, B_i 分别为固体和流体位移分量的幅值, r (复数) 为衰减指数, k 为圆波数, c 为瑞利波波速, 且 $k = \omega/c$. 将方程(5)代入方程(1)和(4), 整理得

$$[d_{lm}][A_x, A_z, B_x, B_z]^T = \mathbf{0} \quad (l, m = 1, \dots, 4) \quad (6)$$

其中矩阵 $[d_{lm}]$ 中各元素均可表示为 ω, r 和 k 的函数.

为了得到 A_i, B_i 的非零解, 有行列式的值 $|d_{lm}| = 0$, 将其展开可得到关于 r^2 的三次方程

$$\beta_1 r^6 + \beta_2 r^4 + \beta_3 r^2 + \beta_4 = 0 \quad (7)$$

因为 $\beta_n(n = 1, \dots, 4)$ 的形式非常繁杂, 这里不再详细给出.

设 $r = a + ib$, 因为瑞利波沿深度方向呈指数衰减, 从方程(5)可以看出, 只有具有正虚部的 r 的根才是本方程的解. 设 $r^{(n)}(n = 1, 2, 3)$ 为方程(7)的三个具有正虚部的根, $\Gamma_m^{(n)}(m = 1, \dots, 4)$ 为方程(6)相应的归一化解, 则方程(6)的解的形式可表示为

$$\begin{aligned} [A_x^{(n)}, A_z^{(n)}, B_x^{(n)}, B_z^{(n)}] &= \\ [\Gamma_1^{(n)}, \Gamma_2^{(n)}, \Gamma_3^{(n)}, \Gamma_4^{(n)}] K_r^{(n)} f_r^{(n)} & \quad (8) \end{aligned}$$

其中 $f_r^{(n)} (n = 1, 2, 3)$ 为任意常数, $K_r^{(n)} = \left[\sum_{m=1}^4 |\Gamma_m^{(n)}|^2 \right]^{-1/2}$, $\Gamma_m^{(n)}$ 为 $d_{lm}^{(n)}$ 的函数, 而 $d_{lm}^{(n)}$ 可以通过将方程 (6) d_{lm} 中的 r 用 $r^{(n)}$ 代替而得到.

横观各向同性饱和多孔介质的透水自由边界条件为

$$\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = p = 0, \text{ at } z = 0 \quad (9)$$

将方程 (4) 和方程 (8) 代入方程 (9), 自由边界条件可以表示为

$$[H_{mn}] \{f_r^{(1)}, f_r^{(2)}, f_r^{(3)}\}^T = 0 \quad (m, n = 1, 2, 3) \quad (10)$$

其中

$$H_{1n} = A_{13}\Gamma_1^{(n)} + A_{33}r^{(n)}\Gamma_2^{(n)} - M_3\Gamma_3^{(n)} - M_3r^{(n)}\Gamma_4^{(n)}$$

$$H_{2n} = A_{44}\Gamma_2^{(n)} + A_{44}r^{(n)}\Gamma_1^{(n)}$$

$$H_{3n} = M_1\Gamma_1^{(n)} + M_3r^{(n)}\Gamma_2^{(n)} - M\Gamma_3^{(n)} - Mr^{(n)}\Gamma_4^{(n)}$$

为了得到 $f_r^{(n)}$ 的非零解, 矩阵 $[H_{mn}]$ 的行列式值必须为零, 因此可得横观各向同性液体饱和多孔介质中瑞利波的特征方程为

$$\text{Det}H = \begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (11)$$

一般 $\text{Det}H$ 为复数, 因此方程 (11) 可以重写为

$$\text{Re}[\text{Det}H] = 0 \quad (12a)$$

$$\text{Im}[\text{Det}H] = 0 \quad (12b)$$

式 (12) 即为瑞利波存在的条件. 对于给定的频率, 同时满足方程 (12a) 和 (12b) 的波速 c 即为所求.

3 数值结果和分析

下面通过具体算例讨论瑞利波沿含液饱和多孔介质半无限体自由表面任意方向传播时的质点运动轨迹以及多孔介质参数对瑞利波传播波速的影响. 材料参数取于文献 [9].

表 1 横观各向同性液体饱和多孔介质材料参数

Table 1 Parameters of transversely isotropic fluid saturated porous media

c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{33}	c_{44}	c_{66}	k_s	ρ_s	ρ_f
GPa	GPa	GPa	GPa	GPa	GPa	GPa	kg/m ³	kg/m ³
9.57	1.19	2.33	8.32	3	4.19	35	2600	1000
K_{10}	K_{20}	K_{30}	$\alpha_{1\infty}$	$\alpha_{2\infty}$	$\alpha_{3\infty}$	ϕ	η	
darcy	darcy	darcy					Pa·s	
1	1	0.1	1	1	1	0.2	0.001	

图 1 给出了半无限体各子午面内不同深度处 ($z = 0, -1.5, -2.5$) 质点的运动轨迹. 图中 $A = \left[\sum_{n=1}^3 |f_r^{(n)}|^2 \right]^{-1/2} K_r^{(n)}$, 从 xoz 平面到 $yo z$ 平面每隔 15° 选取一子午面. 我们可以看到各粒子运动轨迹为椭圆, 且随深度的增加, 运动幅值成指数衰减. 同一深度上, 质点运动轨迹没有幅值衰减, 各质点运动轨迹相同. 各质点在各自的子午面内作面内运动.

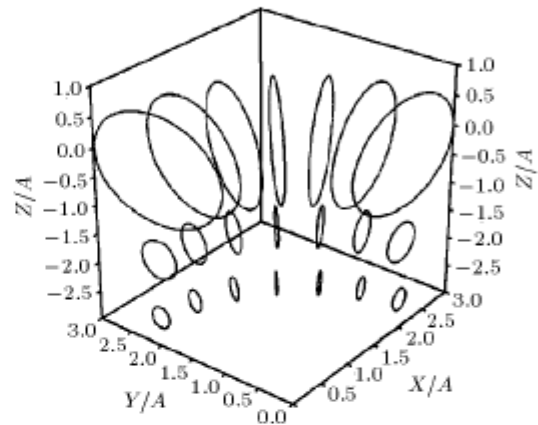


图 1 各子午面内粒子的运动轨迹 ($\eta = 0$)

Fig.1 Partical traces in different sagittal planes at $\eta = 0$

图 2 给出了 xoz 平面内瑞利波波速随孔隙率的变化规律. 可以看到, 随孔隙率的增加, 瑞利波波速逐渐增加, 当 $\phi \rightarrow 1$ 时, 含液饱和多孔介质渐变为流体, 此时瑞利波波速逐渐趋近于水波波速 ($c = \sqrt{K_f/\rho_f}$).

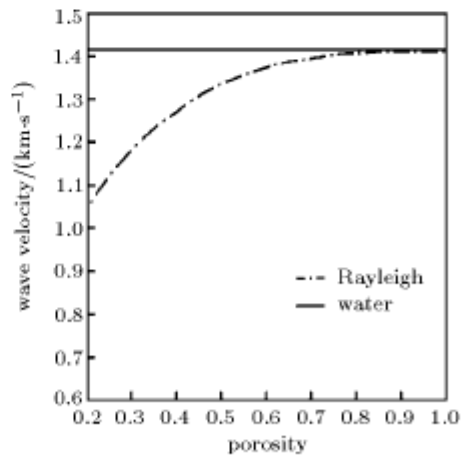


图 2 瑞利波波速随孔隙率的变化 ($\eta = 0$)

Fig.2 Variation of Rayleigh wave velocity with respect to porosity at $\eta = 0$

图 3 给出了 $\eta = 0$ 及 $\eta = 0.001$ 时, 波速随频率的变化曲线. 如图所示, 在忽略流体黏度时, 瑞利波波速与频率无关, 但是当计及流体黏度效应时, 瑞利波波速将随频率发生频散. 随频率的增加, 波速逐渐增大, 在平面波临界频率^[9] ($f_{cj} = 3\eta\phi[8\pi k_{jo}\alpha_{j\infty}\rho_f]^{-1}$) 附近, 波速发生明显变化, 在高频区, 瑞利波波速趋向于 $\eta = 0$ 时的波速. 从方程 (1) 和方程 (2) 可以得知, 随频率增加, 惯性效应越来越强, 黏性效应越来越弱, 耗散项 r_j/ω 以 $\omega^{-1/2}$ 的量级减小, 并随 $\omega \rightarrow \infty$ 而趋于零, 此时 m_j 趋向于 ρ_f/ϕ , $\eta \neq 0$ 时的运动方程退化为 $\eta = 0$ 时的运动方程, 因此在高频段, 瑞利波特征方程就退化为 $\eta = 0$ 时的特征方程, 故两者波速趋同. 从图中可以看出, 当计及流体黏度效应时, 瑞利波波速不仅取决于固体骨架中的快波和剪切波的波速, 而且受慢波波速的影响.

图 4 给出了 xoz 平面内不同频率下瑞利波波速

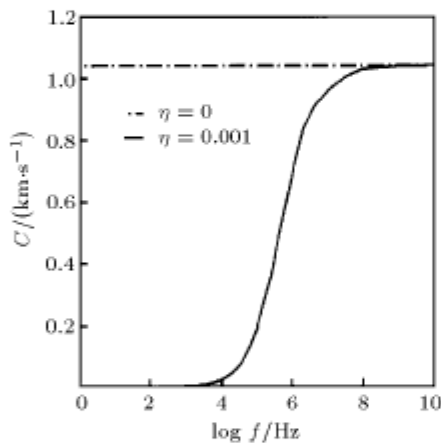


图 3 瑞利波波速随频率的变化

Fig.3 Rayleigh wave velocity with respect to frequency

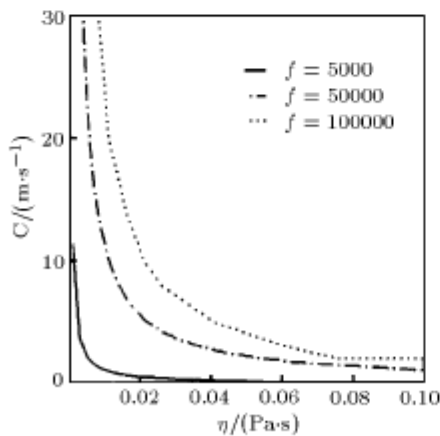


图 4 不同频率下瑞利波波速随流体黏度的变化

Fig.4 Variation of Rayleigh wave velocity with respect to fluid viscosity for different frequency

随流体黏度的变化曲线. 可以看到, 随流体黏度的增加, 瑞利波波速迅速减小, 但是随着频率的增加, 波速随黏度的变化减缓. 这是随频率增加, 黏性占优向惯性占优转化的结果. 从图中还可以看出, 当流体黏度较小时, 瑞利波的波速对流体黏度的变化更加敏感.

由以上的分析可以得知, 横观各向同性含液饱和和多孔介质中, 流体相的存在对瑞利波的传播特性有很大影响. 瑞利波的波速不仅取决于固体骨架中快波和剪切波的波速, 而且受慢波的影响. 以上的研究结果可总结如下:

(1) 瑞利波的波速随孔隙率的增加而增加, 当孔隙率趋于 1 时, 瑞利波波速趋于水波波速.

(2) 随着流体黏性的增加, 瑞利波的波速迅速减小; 但随着频率的增加, 由于流体黏性效应逐渐减弱, 瑞利波的波速随黏度的变化减缓. 在低黏度区, 瑞利波的波速对黏度的变化更加敏感.

(3) 计及流体黏度时, 瑞利波波速体现出频率相关性. 随着频率的增加, 瑞利波的波速从很小的值逐渐增加, 在临界频率附近, 波速迅速增加, 在高频区逐渐趋向于忽略流体黏度时的瑞利波波速.

总之, 各向异性含液饱和和多孔介质由于流体相的存在, 瑞利波的传播特性体现出不同于其在纯固体中传播的性质.

参 考 文 献

- 1 Biot MA. General solutions of the equations of elasticity and consolidation for a porous material. *J Appl Mech*, 1956, 23: 91~95
- 2 Jones JP. Rayleigh waves in a poroelastic half-plane. *J Acoust Soc Am*, 1961, 33: 952~962
- 3 Tajuddin M. Rayleigh waves in a poroelastic half-space. *J Acoust Soc Am*, 1984, 75: 682~684
- 4 Sharma MD, Gogna ML. Wave propagation in anisotropic liquid-saturated porous solids. *J Acoust Soc Am*, 1991: 1068~1073
- 5 汪越胜, 章梓茂. 横观各向同性液体饱和多孔介质中平面波的传播. *力学学报*, 1997, 29(3): 257~268 (Wang Yuesheng, Zhang Zimao. Propagation of plane waves in transversely isotropic fluid-saturated porous media. *Acta Mechanica Sinica*, 1997, 29(3): 257~268 (in Chinese))
- 6 吴世明. 土介质中的波. 北京: 科学出版社, 1997 (Wu Shiming. *Wave Propagation in Soils*. Beijing: Science Press, 1997 (in Chinese))
- 7 Johnson DL, Koplik J, Dashen R. Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media. *J Fluid Mech*, 1987, 176: 379~402

8 Simon BR, Paul DK. An analytical solution for the transient response of saturated porous elastic solids. *Int J Numer Anal Methods Geomech*, 1984, 8: 381~398

9 Denis P Schmitt. Acoustic multipole logging in transversely isotropic poroelastic formations. *J Acoust Soc Am*, 1989, 86: 2397~2421

CHARACTERISTIC OF RAYLEIGH WAVES IN TRANSVERSELY ISOTROPIC FLUID-SATURATED POROUS MEDIA¹⁾

Liu Kaixin* Liu Ying*,†

*(*Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University, Beijing 100871, China*)

†(*Department of Mechanics Engineering, Shandong University of Technology, Zibo 255000, China*)

Abstract Fluid phase in the porous media has great influence on the propagation characteristic of Rayleigh waves. Though many researches have been carried out on the propagation of Rayleigh waves in the fluid saturated porous media, the emphasis is mainly focused on the isotropic solid skeleton and the non-viscous fluid. The effects of fluid viscosity on the propagation characteristic of Rayleigh waves are seldom calculated or discussed. However, clarification of the characteristic of Rayleigh waves in the anisotropic viscous-fluid saturated porous media have significant meaning in many practical fields such as oil extraction engineering, protection and control of pollution in geophysics and hydrology.

In this paper, the propagation characteristic of Rayleigh waves in transversely isotropic viscous-fluid saturated porous media is studied based on Biot's theory under the assumption that the symmetry axes of the transversely isotropic skeleton and dynamic permeability are parallel to the vertical axis of the borehole. With consideration of the dissipation due to the fluid viscosity and the compressibility of the solid grains, the three-dimensional complex characteristic equation of Rayleigh waves in the transversely isotropic fluid saturated porous media for the real frequency domain is derived by introducing the dynamic permeability, and the existing conditions are also given. The Rayleigh wave speeds and particle traces in different sagittal planes are calculated. The effects of the porosity and the fluid viscosity on the propagation of Rayleigh waves are numerically simulated. The analytical results show that when the fluid viscosity is taken into account, the Rayleigh wave speed is frequency dependence, which is different from the situation when the solid skeleton is isotropic or the fluid viscosity is omitted. The Rayleigh wave speed is not only decided by the velocity of fast and transverse waves in the solid skeleton, but also affected by the velocity of the slow waves.

Key words Rayleigh wave, viscous dispersion, transversely isotropic, fluid-saturated porous media

Received 18 March 2001, revised 15 November 2002.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (19832010, 10025212).